

## 一部件冷贮备的三部件可修系统非负时间依赖解的存在唯一性

阿力木·米吉提

(新疆开放大学经管学院, 新疆 乌鲁木齐 830049)

**摘要:** 本文研究了一部件冷贮备的三部件可修系统非负时间依赖解的存在唯一性. 首先, 对应于此三部件系统的数学模型转化为 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题. 然后, 利用泛函分析中的强连续算子半群理论证明此三部件可修系统模型非负时间依赖解的存在唯一性.

**关键词:** 一部件冷贮备的三部件可修系统;  $C_0$ -半群; dispersive 算子

MR(2010) 主题分类号: 47D03 中图分类号: O177.92

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2025)06-0535-14

### 1 引言

在系统可靠性的理论研究和应用中很多因素都会影响其可靠性, 因此有必要对产品的存储可靠性进行研究<sup>[1-2]</sup>. 冷贮备可修复系统作为产品的存储可靠性分析中的最重要的系统, 引起了众多国内外学者的研究兴趣<sup>[3-9]</sup>. 刘宝友<sup>[3]</sup>研究了修理人员休假的冷贮备可修复系统, 唐应辉和刘艳<sup>[4]</sup>研究了修理工单重休假且无法维修如新的冷贮备可修系统, 苏保河<sup>[5]</sup>研究了修理工为系统外客户服务的两部件冷贮备系统, 并利用补充变量法和广义马尔可夫过程得到了系统的一些重要可靠性指标, 刘仁彬等<sup>[6]</sup>通过引入维修人员延迟休假的概念, 研究了一个 N 部件串联可维修系统的模型, 陈永燕和郑海鹰<sup>[7]</sup>将修理工延误休假的概念推广到冷贮备可修系统, 建立了相应的数学模型并研究了其可靠性指标, El-Sherbeny<sup>[8]</sup>研究了泊松冲击下的两部件冷贮备系统, 得出了该系统的可靠性指标, 马梦饶等<sup>[9]</sup>研究了离散时间冷贮备可修重试系统, 利用差分方程迭代解法和母函数法等推导出了系统可用度, 可靠度和首次失效前平均时间等关键可靠性指标. 和(冷)贮备系统类似, 鉴于其广泛的应用场景, 具有关闭规则的可靠性系统一直是研究热点, 已有大量相关文献对其进行探讨. 然而, 从所查阅的文献来看, 目前针对带有关闭规则的可靠性模型的研究范畴较为局限, 主要集中在串联系统<sup>[10-11]</sup>, 表决系统<sup>[12]</sup>以及串-并联系统<sup>[13]</sup>. 相比之下, 具有关闭规则的贮备系统目前尚未发现有相关文献展开研究, 但此类系统却有着极为重要的应用价值. 在实际生活中, 带有关闭规则的贮备系统有着诸多典型应用. 以常见的智能电话为例, 其内部通常配备两个处理器, 其中一个处理器处于运行状态, 另一个则处于冷贮备状态, 而电源部分与处理器呈串联关系. 当电源部分出现故障失效时, 会关闭处理器; 但若处理器失效, 电源部分有可能不受影响而继续供电. 一旦某个处理器失效, 备用处理器会立即启动进行替换. 再看汽车的情况, 在汽车运行过程中, 当某一个轮胎失效时, 发动机仍能正常运转; 然而, 一旦发动机失效, 轮胎将无法继续工作. 若发动机未出现故障, 便可以使用备用轮胎替换失效轮胎. 在电子设备领域, 也存在类似情况.

\*收稿日期: 2025-04-06 接收日期: 2025-07-11

基金项目: 新疆开放大学研究团队项目资助.

作者简介: 阿力木·米吉提 (1978-), 男, 维吾尔族, 新疆阿克陶, 教授, 主要研究方向: 可靠性模型的动态分析. E-mail: alimjanmijit@aliyun.com.

当电源部分失效时, 会关闭功能部分; 而当功能部分失效时, 为方便检修, 电源部分仍能保持运行. 若电源部分未失效, 而功能部分出现故障, 就可以使用备用部件替换失效部件, 并对失效部件立即进行修理. 鉴于上述实际情形, 在文献 [14] 中, 作者聚焦于单向关闭两不同部件串联一部件冷贮备的可修系统, 假定两部件串联, 部件 1 失效, 关闭部件 2, 而部件 2 失效, 部件 1 却可以继续运行. 与此同时假定部件 3 冷贮备, 当部件 2 失效后, 部件 3 立即替换部件 2, 当部件 3 失效后而部件 1 没有失效时, 如果部件 2 已修好立即用部件 2 替换部件 3. 作者运用补充变量法对该系统的可靠性进行分析, 成功得出一系列重要的可靠性指标. 截至目前, 除了这篇文献的研究成果外, 尚未发现有其他关于单向关闭两不同部件串联一部件冷贮备的可修系统的研究成果, 在文献 [14] 的基础上, 本文运用泛函分析中的强连续算子半群理论研究单向关闭两不同部件串联一部件冷贮备的三部件可修系统的时间依赖解, 证明此系统非负时间依赖解的存在唯一性.

根据文献 [14], 单向关闭两不同部件串联一部件冷贮备的三部件可修系统由以下概率微积分方程组描述:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0(t) + \int_0^\infty \mu_1(y)P_2(t, y)dy + \int_0^\infty \mu_2(y)P_7(t, y)dy, \quad (1.1)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_1 + \lambda_2)P_1(t) + \int_0^\infty \mu_2(y)P_3(t, y)dy, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial P_2(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_2(t, y)}{\partial y} = -\mu_1(y)P_2(t, y), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial P_3(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_3(t, y)}{\partial y} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y))P_3(t, y), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial P_4(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_4(t, y)}{\partial y} = -\mu_2(y)P_4(t, y) + \lambda_1 P_3(t, y), \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial P_5(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_5(t, y)}{\partial y} = -(\lambda_3 + \mu_2(y))P_5(t, y) + \lambda_2 P_3(t, y), \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial P_6(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_6(t, y)}{\partial y} = -\mu_2(y)P_6(t, y) + \lambda_3 P_5(t, y), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial P_7(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_7(t, y)}{\partial y} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y))P_7(t, y), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial P_8(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_8(t, y)}{\partial y} = -\mu_2(y)P_8(t, y) + \lambda_1 P_7(t, y), \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial P_9(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_9(t, y)}{\partial y} = -(\lambda_3 + \mu_2(y))P_9(t, y) + \lambda_2 P_7(t, y), \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial P_{10}(t, y)}{\partial t} + \frac{\partial P_{10}(t, y)}{\partial y} = -\mu_2(y)P_{10}(t, y) + \lambda_3 P_9(t, y), \quad (1.11)$$

$$P_2(t, 0) = \lambda_1 [P_0(t) + P_1(t)] + \int_0^\infty \mu_2(y)P_4(t, y)dy + \int_0^\infty \mu_2(y)P_8(t, y)dy, \quad (1.12)$$

$$P_3(t, 0) = \lambda_2 P_0(t) + \int_0^\infty \mu_2(y)P_9(t, y)dy, \quad (1.13)$$

$$P_4(t, 0) = \int_0^\infty \mu_2(y)P_{10}(t, y)dy, \quad (1.14)$$

$$P_7(t, 0) = \lambda_2 P_1(t) + \int_0^\infty \mu_2(y) P_5(t, y) dy, \quad (1.15)$$

$$P_8(t, 0) = \int_0^\infty \mu_2(y) P_6(t, y) dy, \quad (1.16)$$

$$P_5(t, 0) = P_6(t, 0) = P_9(t, 0) = P_{10}(t, 0) = 0, \quad (1.17)$$

$$P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0, y) = \dots = P_{10}(0, y) = 0. \quad (1.18)$$

这里  $(t, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ ;  $P_0(t)$  表示在  $t$  时刻系统中部件 1 和 2 在运行, 部件 3 冷贮备的概率;  $P_1(t)$  表示在  $t$  时刻部件 1 和 3 在运行, 部件 2 冷贮备的概率;  $P_2(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 1 在修理, 部件 2 和 3 冷贮备, 部件 1 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_3(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 1 和 3 在运行, 部件 2 在修理, 部件 2 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_4(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 2 在修理, 部件 1 待修, 部件 3 冷贮备, 部件 2 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_5(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 2 在修理, 部件 3 待修, 部件 1 在运行, 且部件 2 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_6(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 2 在修理, 部件 1 和 3 待修, 且部件 2 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_7(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 1 和 2 在运行, 部件 3 在修理, 部件 3 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_8(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 1 待修, 部件 2 冷贮备, 部件 3 在修理, 部件 3 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_9(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 1 在运行, 部件 2 待修, 部件 3 在修理, 部件 3 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $P_{10}(t, y)dy$  表示在  $t$  时刻部件 1 和 2 待修, 部件 3 在修理, 部件 3 已消耗的修理时间在  $(y, y + dy]$  内的概率;  $\lambda_i$  是部件  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 的失效率;  $\mu_i(y)$  是部件  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 在故障状态, 并部件  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 已消耗的修理时间为  $y$  的修复率;  $\lambda_3$  是部件 2 和 3 均失效后, 部件 1 的正常运行率.

## 2 模型的转换

为研究单向关闭两不同部件串联一部件冷贮备的三部件可修系统的时间依赖解的存在唯一性, 首先通过选择系统的状态空间, 主算子及其定义域, 将该模型转化成 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题. 然后运用泛函分析中的强连续算子半群理论研究此系统的时间依赖解, 证明此系统非负时间依赖解的存在唯一性. 为此, 首先将系统转化为抽象 Cauchy 问题形式, 注意到研究问题的实际意义, 选取状态空间为

$$Y = \left\{ P \in R^2 \times (L^1[0, \infty))^9 \mid \|P\| = |P_0| + |P_1| + \sum_{i=2}^{10} \|P_i\|_{L^1[0, \infty)} < \infty \right\},$$

设  $P = (P_0, P_1, P_2(y), P_3(y), P_4(y), P_5(y), P_6(y), P_7(y), P_8(y), P_9(y), P_{10}(y))^T$ , 并定义算子及其它们的定义域,

$$A_1 P = \text{diag} \left( -(\lambda_1 + \lambda_2), -(\lambda_1 + \lambda_2), -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy}, -\frac{d}{dy} \right) P,$$

$$D(A_1) = \left\{ P \in X \mid \begin{array}{l} \frac{dP_i(y)}{dy} \in L^1[0, \infty), P_i(y) (i = 2, \dots, 10) \text{ 是绝对连续函数且} \\ P_2(0) = \lambda_1 (P_0 + P_1) + \int_0^\infty \mu_2(y) P_4(y) dy + \int_0^\infty \mu_2(y) P_8(y) dy, \\ P_3(0) = \lambda_2 P_0 + \int_0^\infty \mu_2(y) P_9(y) dy, P_4(0) = \int_0^\infty \mu_2(y) P_{10}(y) dy, \\ P_7(0) = \lambda_2 P_1 + \int_0^\infty \mu_2(y) P_5(y) dy, P_8(0) = \int_0^\infty \mu_2(y) P_6(y) dy, \\ P_5(0) = P_6(0) = P_9(0) = P_{10}(0) = 0 \end{array} \right\},$$

$$\begin{aligned}
A_2 P = & \left( 0, 0, -\mu_1(y)P_2(y), -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y))P_3(y), -\mu_2(y)P_4(y) + \lambda_1 P_3(y), \right. \\
& -(\lambda_3 + \mu_2(y))P_5(y) + \lambda_2 P_3(y), -\mu_2(y)P_6(y) + \lambda_3 P_5(y), -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y))P_7(y), \\
& \left. -\mu_2(y)P_8(y) + \lambda_1 P_7(y), -(\lambda_3 + \mu_2(y))P_9(y) + \lambda_2 P_7(y), -\mu_2(y)P_{10}(y) + \lambda_3 P_9(y) \right)^T, \\
A_3 P = & \left( \int_0^\infty \mu_1(y)P_2(y)dy + \int_0^\infty \mu_2(y)P_7(y)dy, \int_0^\infty \mu_2(y)P_3(y)dy, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right)^T, \\
D(A_2) = & D(A_3) = Y.
\end{aligned}$$

则在选取的状态空间  $Y$  中, 把方程组 (1.1)-(1.18) 可以描述为 Banach 空间  $Y$  上的抽象 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{dP(t)}{dt} = (A_1 + A_2 + A_3)P(t), & \forall t \in [0, \infty), \\ P(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T. \end{cases} \quad (2.1)$$

### 3 系统 (2.1) 非负时间依赖解的存在唯一性

**定理 3.1** 如果  $\mu_1(y)$  和  $\mu_2(y)$  满足

$$\mu_1 = \sup_{y \in [0, \infty)} \mu_1(y) < \infty, \quad \mu_2 = \sup_{y \in [0, \infty)} \mu_2(y) < \infty,$$

则  $A_1 + A_2 + A_3$  生成一个正压缩  $C_0$ -半群  $T(t)$ .

**证** 分四步证明此定理. 第一步估计  $A_1$  的豫解式. 第二步验证定义域  $D(A_1)$  在  $X$  中的稠密性. 第三步指出算子  $A_2$  和  $A_3$  的有界性, 并推出主算子  $A_1 + A_2 + A_3$  生成一个  $C_0$ -半群  $T(t)$ . 最后由主算子的耗散性和 Phillips 定理得到主算子生成的半群  $T(t)$  是一个正压缩  $C_0$ -半群.

对任意的  $\pi \in Y$ , 考虑方程  $(\gamma I - A_1)P = \pi$ , 这等价于

$$(\gamma + \lambda_1 + \lambda_2)P_i = \pi_i, \quad i = 0, 1, \quad (3.1)$$

$$\frac{dP_j(y)}{dy} = -\gamma P_j(y) + \pi_j(y), \quad j = 2, \dots, 10, \quad (3.2)$$

$$P_2(0) = \lambda_1(P_0 + P_1) + \int_0^\infty \mu_2(y)P_4(y)dy + \int_0^\infty \mu_2(y)P_8(y)dy, \quad (3.3)$$

$$P_3(0) = \lambda_2 P_0 + \int_0^\infty \mu_2(y)P_9(y)dy, \quad (3.4)$$

$$P_4(0) = \int_0^\infty \mu_2(y)P_{10}(y)dy, \quad (3.5)$$

$$P_7(0) = \lambda_2 P_1 + \int_0^\infty \mu_2(y)P_5(y)dy, \quad (3.6)$$

$$P_8(0) = \int_0^\infty \mu_2(y)P_6(y)dy, \quad (3.7)$$

$$P_5(0) = P_6(0) = P_9(0) = P_{10}(0) = 0. \quad (3.8)$$

解 (3.1) 和 (3.2) 得

$$P_i = \frac{1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} \pi_i, \quad i = 0, 1, \quad (3.9)$$

$$P_j(y) = C_j e^{-\gamma y} + e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_j(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau, \quad j = 2, \dots, 10. \quad (3.10)$$

(3.10) 结合边界条件 (3.3)–(3.8) 推出

$$C_5 = C_6 = C_9 = C_{10} = 0, \quad (3.11)$$

$$C_4 = P_4(0) = \int_0^\infty \mu_2(y) P_{10}(y) dy = \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_{10}(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau dy, \quad (3.12)$$

$$C_8 = P_8(0) = \int_0^\infty \mu_2(y) P_6(y) dy = \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_6(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau dy, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} C_2 = P_2(0) &= \lambda_1 (P_0 + P_1) + \int_0^\infty \mu_2(y) P_4(y) dy + \int_0^\infty \mu_2(y) P_8(y) dy \\ &= \frac{\lambda_1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (\pi_0 + \pi_1) + \int_0^\infty \mu_2(y) \left[ C_4 e^{-\gamma y} + e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_4(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau \right] dy \\ &= \frac{\lambda_1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (\pi_0 + \pi_1) + C_4 \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} dy + \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_4(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau dy \\ &= \frac{\lambda_1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (\pi_0 + \pi_1) + \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_{10}(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau dy \cdot \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} dy \\ &\quad + \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_4(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau dy, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} C_3 = P_3(0) &= \lambda_2 P_0 + \int_0^\infty \mu_2(y) P_9(y) dy \\ &= \frac{\lambda_2}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} \pi_0 + \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_9(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau dy, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} C_7 = P_7(0) &= \lambda_2 P_1 + \int_0^\infty \mu_2(y) P_5(y) dy \\ &= \frac{\lambda_2}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} \pi_1 + \int_0^\infty \mu_2(y) e^{-\gamma y} \int_0^y \pi_5(\tau) e^{\gamma \tau} d\tau dy. \end{aligned} \quad (3.16)$$

当  $\gamma > \mu_1 + \mu_2$  时, 由定理条件, (3.12)–(3.16) 和 Fubini 定理推出

$$\begin{aligned} |C_2| &\leq \frac{\lambda_1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \mu_2^2 \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_{10}(\tau)| e^{\gamma \tau} d\tau dy \cdot \int_0^\infty e^{-\gamma y} dy \\ &\quad + \mu_2 \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_4(\tau)| e^{\gamma \tau} d\tau dy \\ &= \frac{\lambda_1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \mu_2^2 \int_0^\infty |\pi_{10}(\tau)| e^{\gamma \tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau + \mu_2 \int_0^\infty |\pi_4(\tau)| e^{\gamma \tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \frac{\mu_2^2}{\gamma^2} \|\pi_{10}\|_{L^1[0,\infty)} + \frac{\mu_2}{\gamma} \|\pi_4\|_{L^1[0,\infty)}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} |C_3| &\leq \frac{\lambda_2}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} |\pi_0| + \mu_2 \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_9(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau dy \\ &= \frac{\lambda_2}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} |\pi_0| + \mu_2 \int_0^\infty |\pi_9(\tau)| e^{\gamma\tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau \\ &= \frac{\lambda_2}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} |\pi_0| + \frac{1}{\gamma} \|\pi_9\|_{L^1[0,\infty)}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} |C_4| &\leq \mu_2 \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_{10}(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau dy = \mu_2 \int_0^\infty |\pi_{10}(\tau)| e^{\gamma\tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau \\ &= \frac{\mu_2}{\gamma} \|\pi_{10}\|_{L^1[0,\infty)}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} |C_7| &\leq \frac{\lambda_2}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} |\pi_1| + \mu_2 \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_9(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau dy \\ &= \frac{\lambda_2}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} |\pi_1| + \frac{\mu_2}{\gamma} \|\pi_9\|_{L^1[0,\infty)}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$|C_8| \leq \mu_2 \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_6(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau dy = \frac{\mu_2}{\gamma} \|\pi_6\|_{L^1[0,\infty)}. \quad (3.21)$$

由 (3.9), (3.10), (3.17)–(3.21) 与 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned} \|P\| &= \sum_{i=0}^1 |P_i| + \sum_{j=2}^{10} \|P_j\|_{L^1[0,\infty)} = \sum_{i=0}^1 |P_i| + \sum_{j=2}^{10} \int_0^\infty |P_j(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \sum_{j=2}^4 \int_0^\infty \left( |C_j| e^{-\gamma y} + e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_j(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau \right) dy \\ &\quad + \sum_{k=5}^6 \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_k(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau dy + \sum_{l=7}^8 \int_0^\infty \left( |C_l| e^{-\gamma y} + e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_l(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau \right) dy \\ &\quad + \sum_{m=9}^{10} \int_0^\infty e^{-\gamma y} \int_0^y |\pi_m(\tau)| e^{\gamma\tau} d\tau dy \\ &= \frac{1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \sum_{j=2}^4 \left( \frac{1}{\gamma} |C_j| + \int_0^\infty |\pi_j(\tau)| e^{\gamma\tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau \right) \\ &\quad + \sum_{k=5}^6 \int_0^\infty |\pi_k(\tau)| e^{\gamma\tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau + \sum_{l=7}^8 \left( \frac{1}{\gamma} |C_l| + \int_0^\infty |\pi_l(\tau)| e^{\gamma\tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau \right) \\ &\quad + \sum_{m=9}^{10} \int_0^\infty |\pi_m(\tau)| e^{\gamma\tau} \int_\tau^\infty e^{-\gamma y} dy d\tau \\ &= \frac{1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \sum_{j=2}^4 \left( \frac{1}{\gamma} |C_j| + \frac{1}{\gamma} \|\pi_j\|_{L^1[0,\infty)} \right) \\ &\quad + \sum_{k=5}^6 \frac{1}{\gamma} \|\pi_k\|_{L^1[0,\infty)} + \sum_{l=7}^8 \left( \frac{1}{\gamma} |C_l| + \frac{1}{\gamma} \|\pi_l\|_{L^1[0,\infty)} \right) + \sum_{m=9}^{10} \frac{1}{\gamma} \|\pi_m\|_{L^1[0,\infty)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \sum_{i=2,3,4,7,8} \frac{1}{\gamma} |C_i| + \frac{1}{\gamma} \sum_{j=2}^{10} \|\pi_j\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\leq \frac{1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \frac{\lambda_1}{\gamma(\gamma + \lambda_1 + \lambda_2)} (|\pi_0| + |\pi_1|) \\
&\quad + \frac{\mu_2^2}{\gamma^3} \|\pi_{10}\|_{L^1[0,\infty)} + \frac{\mu_2}{\gamma^2} \|\pi_4\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\quad + \frac{\lambda_2}{\gamma(\gamma + \lambda_1 + \lambda_2)} |\pi_0| + \frac{1}{\gamma^2} \|\pi_9\|_{L^1[0,\infty)} + \frac{\mu_2}{\gamma^2} \|\pi_{10}\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\quad + \frac{\lambda_2}{\gamma(\gamma + \lambda_1 + \lambda_2)} |\pi_1| + \frac{\mu_2}{\gamma^2} \|\pi_9\|_{L^1[0,\infty)} + \frac{\mu_2}{\gamma^2} \|\pi_6\|_{L^1[0,\infty)} + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=2}^{10} \|\pi_i\|_{L^1[0,\infty)} \\
&= \left( \frac{1}{\gamma + \lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\gamma(\gamma + \lambda_1 + \lambda_2)} \right) (|\pi_0| + |\pi_1|) + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=2,3,5,7,8} \|\pi_i\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\quad + \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\mu_2}{\gamma^2} \right) \sum_{j=4,6,9} \|\pi_j\|_{L^1[0,\infty)} + \left( \frac{1}{\gamma} + \frac{\mu_2}{\gamma^2} + \frac{\mu_2^2}{\gamma^3} \right) \|\pi_{10}\|_{L^1[0,\infty)} \\
&= \frac{1}{\gamma} (|\pi_0| + |\pi_1|) + \frac{1}{\gamma} \sum_{i=2,3,5,7,8} \|\pi_i\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\quad + \frac{\mu_2 + \gamma}{\gamma^2} \sum_{j=4,6,9} \|\pi_j\|_{L^1[0,\infty)} + \frac{\gamma^2 + \mu_2\gamma + \mu_2^2}{\gamma^3} \|\pi_{10}\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\leq \frac{1}{\gamma - \mu_2} \|\pi\|. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

当  $\gamma > \mu_2$  时, (3.22) 说明,  $(\gamma I - A_1)^{-1}$  存在, 并且

$$(\gamma I - A_1)^{-1} : Y \rightarrow D(A_1), \|(\gamma I - A_1)^{-1}\| \leq \frac{1}{\gamma - \mu_2}.$$

第二步, 证明  $D(A_1)$  在状态空间  $Y$  中稠密, 取集合

$$\mathcal{U} = \{P = (P_0, P_1, P_2(y), \dots, P_{10}(y)) \mid P_i \in R, P_j \in C_0^\infty[0, \infty), i = 0, 1, j = 2, \dots, 10\},$$

则由文献 [15] 知道  $\mathcal{U}$  在状态空间  $Y$  中稠密. 若定义集合

$$\Omega = \left\{ P = (P_0, P_1, P_2(y), \dots, P_{10}(y)) \left| \begin{array}{l} P_i \in C_0^\infty[0, \infty), \text{ 且存在 } \tau_i > 0, \text{ 当} \\ y \in [0, \tau_i] \text{ 时, 有 } P_i(y) = 0, i = 2, \dots, 10 \end{array} \right. \right\}$$

则容易证明  $\Omega$  在  $\mathcal{U}$  中稠密. 由  $\Omega, \mathcal{U}, Y$  的关系知道, 为了证明  $D(A_1)$  在  $Y$  中稠密, 只需证  $D(A_1)$  在  $\Omega$  中稠密即可.

任取  $P = (P_0, P_1, P_2(y), \dots, P_{10}(y)) \in \Omega$ , 存在  $\tau_i > 0$ , 使得  $y \in [0, \tau_i]$  时, 有  $P_i(y) = 0 (i = 2, \dots, 10)$ . 若定义  $2s = \min_{2 \leq k \leq 10} \tau_k$ , 那么对  $y \in [0, 2s]$  都有  $P_i(y) = 0 (i = 2, \dots, 10)$ .

定义

$$\begin{aligned} h^s(0) &= (h_0^s, h_1^s, h_2^s(0), h_3^s(0), h_4^s(0), h_5^s(0), h_6^s(0), h_7^s(0), h_8^s(0), h_9^s(0), h_{10}^s(0)) \\ &= \left( P_0, P_1, \lambda_1(P_0 + P_1) + \int_{2s}^{\infty} \mu_2(y)P_4(y)dy + \int_{2s}^{\infty} \mu_2(y)P_8(y)dy, \right. \\ &\quad \lambda_2P_0 + \int_{2s}^{\infty} \mu_2(y)P_9(y)dy, \int_{2s}^{\infty} \mu_2(y)P_{10}(y)dy, \\ &\quad \left. 0, 0, \lambda_2P_1 + \int_{2s}^{\infty} \mu_2(y)P_5(y)dy, \int_{2s}^{\infty} \mu_2(y)P_6(y)dy, 0, 0 \right) \\ h^s &= (h_0^s, h_1^s, h_2^s(y), h_3^s(y), h_4^s(y), h_5^s(y), h_6^s(y), h_7^s(y), h_8^s(y), h_9^s(y), h_{10}^s(y)), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} h_i^s(y) &= \begin{cases} h_i^s(0) \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2, & \text{当 } y \in [0, s), \\ -d_i(y-s)^2(y-2s)^2, & \text{当 } y \in [s, 2s), \quad i = 2, \dots, 10, \\ P_i(y), & \text{当 } y \in [2s, \infty), \end{cases} \\ d_2 &= \frac{\int_0^s \mu_2(y)(h_2^s(0) + h_8^s(0)) \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2 dy}{2 \int_s^{2s} \mu_2(y)(y-s)^2(y-2s)^2 dy}, \quad d_3 = \frac{\int_0^s \mu_2(y)h_9^s(0) \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2 dy}{\int_s^{2s} \mu_2(y)(y-s)^2(y-2s)^2 dy}, \\ d_4 &= \frac{\int_0^s \mu_2(y)h_{10}^s(0) \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2 dy}{\int_s^{2s} \mu_2(y)(y-s)^2(y-2s)^2 dy}, \quad d_7 = \frac{\int_0^s \mu_2(y)h_5^s(0) \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2 dy}{\int_s^{2s} \mu_2(y)(y-s)^2(y-2s)^2 dy}, \\ d_8 &= \frac{\int_0^s \mu_2(y)h_6^s(0) \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2 dy}{\int_s^{2s} \mu_2(y)(y-s)^2(y-2s)^2 dy}, \quad d_5 = d_6 = d_9 = d_{10} = 0. \end{aligned}$$

则, 容易验证  $h^s \in D(A_1)$ , 且

$$\begin{aligned} \|P - h^s\| &= \sum_{i=2}^{10} \int_0^{\infty} |P_i(y) - h_i^s(y)| dy \\ &= \sum_{i=2}^{10} \int_0^s |h_i^s(0)| \left(1 - \frac{y}{s}\right)^2 dy + \sum_{i=2}^{10} \int_s^{2s} |d_i| (y-s)^2 (y-2s)^2 dy \\ &= \frac{s}{3} \cdot \sum_{i=2}^{10} |h_i^s(0)| + \frac{s^5}{30} \cdot \sum_{i=2}^{10} |d_i| \rightarrow 0, \quad \text{当 } s \rightarrow 0. \end{aligned}$$

上式表明  $D(A_1)$  在  $\Omega$  中稠密, 即  $D(A_1)$  在  $Y$  中稠密. 由前面两个步骤和 Hille-Yosida 定理即知, 算子  $A_1$  生成某个  $C_0$ -半群.

第三步证明其他两个算子  $A_2$  与  $A_3$  是有界线性算子. 对  $\forall P \in Y$ , 根据  $A_2, A_3$  和状态空间  $Y$  中范数的定义有

$$\begin{aligned} \|A_2 P\| &\leq \mu_1 \|P_2\|_{L^1[0, \infty)} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) \|P_3\|_{L^1[0, \infty)} + \mu_2 \|P_4\|_{L^1[0, \infty)} + \lambda_1 \|P_3\|_{L^1[0, \infty)} \\ &\quad + (\lambda_3 + \mu_2) \|P_5\|_{L^1[0, \infty)} + \lambda_2 \|P_3\|_{L^1[0, \infty)} + \mu_2 \|P_6\|_{L^1[0, \infty)} + \lambda_3 \|P_5\|_{L^1[0, \infty)} \\ &\quad + (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) \|P_7\|_{L^1[0, \infty)} + \mu_2 \|P_8\|_{L^1[0, \infty)} + \lambda_1 \|P_7\|_{L^1[0, \infty)} \\ &\quad + (\lambda_3 + \mu_2) \|P_9\|_{L^1[0, \infty)} + \lambda_2 \|P_7\|_{L^1[0, \infty)} + \mu_2 \|P_{10}\|_{L^1[0, \infty)} + \lambda_3 \|P_9\|_{L^1[0, \infty)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_1 \|P_2\|_{L^1[0,\infty)} + (2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2) \|P_3\|_{L^1[0,\infty)} + \mu_2 \|P_4\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\quad + (2\lambda_3 + \mu_2) \|P_5\|_{L^1[0,\infty)} + \mu_2 \|P_6\|_{L^1[0,\infty)} + (2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2) \|P_7\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\quad + \mu_2 \|P_8\|_{L^1[0,\infty)} + (2\lambda_3 + \mu_2) \|P_9\|_{L^1[0,\infty)} + \mu_2 \|P_{10}\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\leq (2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + \mu_1 + \mu_2) \|P\|, \\
\|A_3 P\| &= \left| \int_0^\infty \mu_1(y) P_2(y) dy + \int_0^\infty \mu_2(y) P_7(y) dy \right| + \left| \int_0^\infty \mu_2(y) P_3(y) dy \right| \\
&\leq \mu_1 \|P_2\|_{L^1[0,\infty)} + \mu_2 \|P_7\|_{L^1[0,\infty)} + \mu_2 \|P_3\|_{L^1[0,\infty)} \\
&\leq (\mu_1 + \mu_2) \|P\|.
\end{aligned}$$

上面的两个不等式表明算子  $A_2$  和  $A_3$  是有界的, 同时容易推出这两个算子是线性算子. 从而, 由  $C_0$ -半群的扰动理论<sup>[16]</sup> 即知, 主算子  $A_1 + A_2 + A_3$  生成一个  $C_0$ -半群  $T(t)$ .

第四步证明主算子  $A_1 + A_2 + A_3$  是 dispersive 算子. 对  $\forall P \in D(A_1)$ , 定义

$$\alpha(y) = \left( \frac{[P_0]^+}{P_0}, \frac{[P_1]^+}{P_1}, \frac{[P_2(y)]^+}{P_2(y)}, \frac{[P_3(y)]^+}{P_3(y)}, \dots, \frac{[P_{10}(y)]^+}{P_{10}(y)} \right),$$

其中

$$[P_n]^+ = \begin{cases} P_n & \text{当 } P_n > 0 \\ 0 & \text{当 } P_n \leq 0 \end{cases}, n = 0, 1, \quad [P_k(y)]^+ = \begin{cases} P_k(y) & \text{当 } P_k(y) > 0 \\ 0 & \text{当 } P_k(y) \leq 0 \end{cases}, k = 2, \dots, 10,$$

若定义  $B_k^+ = \{y \in [0, \infty) \mid P_k(y) > 0\}$ ,  $B_k^- = \{y \in [0, \infty) \mid P_k(y) \leq 0\}$  ( $k = 2, \dots, 10$ ),

则由  $[P_k(y)]^+$  ( $k = 2, \dots, 10$ ) 的定义和文献[17]同样的方法可以推出

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dP_k(y)}{dy} \cdot \frac{[P_k(y)]^+}{P_k(y)} dy &= \int_{B_k^+} \frac{dP_k(y)}{dy} \cdot \frac{[P_k(y)]^+}{P_k(y)} dy + \int_{B_k^-} \frac{dP_k(y)}{dy} \cdot \frac{[P_k(y)]^+}{P_k(y)} dy \\
&= \int_{B_k^+} \frac{dP_k(y)}{dy} dy = \int_0^\infty \frac{d[P_k(y)]^+}{dy} dy = -[P_k(0)]^+, k = 2, \dots, 10. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

那么对上述定义的  $\alpha(y)$  和  $P \in D(A_1)$ , 由 (3.23), 边界条件和不等式

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu_n(y) P_k(y) dy &\leq \int_0^\infty \mu_n(y) [P_k(y)]^+ dy (n = 1, 2, k = 2, \dots, 10), \\
\int_0^\infty P_l(y) \frac{[P_m(y)]^+}{P_m(y)} dy &\leq \int_0^\infty [P_l(y)]^+ dy (l, m = 2, \dots, 10, l \neq m),
\end{aligned}$$

推出

$$\begin{aligned}
\langle (A_1 + A_2 + A_3) P, \alpha(y) \rangle &= \left\{ -(\lambda_1 + \lambda_2) P_0 + \int_0^\infty \mu_1(y) P_2(y) dy + \int_0^\infty \mu_2(y) P_7(y) dy \right\} \cdot \frac{[P_0]^+}{P_0} \\
&\quad + \left\{ -(\lambda_1 + \lambda_2) P_1 + \int_0^\infty \mu_2(y) P_3(y) dy \right\} \cdot \frac{[P_1]^+}{P_1} \\
&\quad + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_2(y)}{dy} - \mu_1(y) P_2(y) \right\} \cdot \frac{[P_2(y)]^+}{P_2(y)} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_3(y)}{dy} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y)) P_3(y) \right\} \cdot \frac{[P_3(y)]^+}{P_3(y)} dy \\
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_4(y)}{dy} - \mu_2(y) P_4(y) + \lambda_1 P_3(y) \right\} \cdot \frac{[P_4(y)]^+}{P_4(y)} dy \\
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_5(y)}{dy} - (\lambda_3 + \mu_2(y)) P_5(y) + \lambda_2 P_3(y) \right\} \cdot \frac{[P_5(y)]^+}{P_5(y)} dy \\
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_6(y)}{dy} - \mu_2(y) P_6(y) + \lambda_3 P_5(y) \right\} \cdot \frac{[P_6(y)]^+}{P_6(y)} dy \\
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_7(y)}{dy} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y)) P_7(y) \right\} \cdot \frac{[P_7(y)]^+}{P_7(y)} dy \\
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_8(y)}{dy} - \mu_2(y) P_8(y) + \lambda_1 P_7(y) \right\} \cdot \frac{[P_8(y)]^+}{P_8(y)} dy \\
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_9(y)}{dy} - (\lambda_3 + \mu_2(y)) P_9(y) + \lambda_2 P_7(y) \right\} \cdot \frac{[P_9(y)]^+}{P_9(y)} dy \\
& + \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_{10}(y)}{dy} - \mu_2(y) P_{10}(y) + \lambda_3 P_9(y) \right\} \cdot \frac{[P_{10}(y)]^+}{P_{10}(y)} dy \\
= & -(\lambda_1 + \lambda_2) [P_0]^+ + \frac{[P_0]^+}{P_0} \int_0^\infty \mu_1(y) P_2(y) dy + \frac{[P_0]^+}{P_0} \int_0^\infty \mu_2(y) P_7(y) dy \\
& - (\lambda_1 + \lambda_2) [P_1]^+ + \frac{[P_1]^+}{P_1} \int_0^\infty \mu_2(y) P_3(y) dy - \sum_{k=2}^{10} \int_0^\infty \frac{dP_k(y)}{dy} \cdot \frac{[P_k(y)]^+}{P_k(y)} dy \\
& - \int_0^\infty \mu_1(y) [P_2(y)]^+ dy - \int_0^\infty (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y)) [P_3(y)]^+ dy \\
& - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_4(y)]^+ dy + \int_0^\infty \lambda_1 P_3(y) \cdot \frac{[P_4(y)]^+}{P_4(y)} dy \\
& - \int_0^\infty (\lambda_3 + \mu_2(y)) [P_5(y)]^+ dy + \int_0^\infty \lambda_2 P_3(y) \frac{[P_5(y)]^+}{P_5(y)} dy \\
& - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_6(y)]^+ dy + \int_0^\infty \lambda_3 P_5(y) \frac{[P_6(y)]^+}{P_6(y)} dy \\
& - \int_0^\infty (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y)) [P_7(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_8(y)]^+ dy \\
& + \int_0^\infty \lambda_1 P_7(y) \cdot \frac{[P_8(y)]^+}{P_8(y)} dy - \int_0^\infty (\lambda_3 + \mu_2(y)) [P_9(y)]^+ dy \\
& + \int_0^\infty \lambda_2 P_7(y) \frac{[P_9(y)]^+}{P_9(y)} dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_{10}(y)]^+ dy + \int_0^\infty \lambda_3 P_9(y) \frac{[P_{10}(y)]^+}{P_{10}(y)} dy \\
\leq & -(\lambda_1 + \lambda_2) ([P_0]^+ + [P_1]^+) \\
& + \frac{[P_0]^+}{P_0} \left( \int_0^\infty \mu_1(y) [P_2(y)]^+ dy + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_7(y)]^+ dy \right) \\
& + \frac{[P_1]^+}{P_1} \int_0^\infty \mu_2(y) [P_3(y)]^+ dy + \sum_{k=2}^{10} [P_k(0)]^+ - \int_0^\infty \mu_1(y) [P_2(y)]^+ dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^\infty [P_3(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_3(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_4(y)]^+ dy \\
& + \lambda_1 \int_0^\infty [P_3(y)]^+ dy - \lambda_3 \int_0^\infty [P_5(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_5(y)]^+ dy \\
& + \lambda_2 \int_0^\infty [P_3(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_6(y)]^+ dy + \lambda_3 \int_0^\infty [P_5(y)]^+ dy \\
& - (\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^\infty [P_7(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_7(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_8(y)]^+ dy \\
& + \lambda_1 \int_0^\infty [P_7(y)]^+ dy - \lambda_3 \int_0^\infty [P_9(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_9(y)]^+ dy \\
& + \lambda_2 \int_0^\infty [P_7(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_{10}(y)]^+ dy + \lambda_3 \int_0^\infty [P_9(y)]^+ dy \\
= & -(\lambda_1 + \lambda_2) ([P_0]^+ + [P_1]^+) \\
& + \frac{[P_0]^+}{P_0} \left( \int_0^\infty \mu_1(y) [P_2(y)]^+ dy + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_7(y)]^+ dy \right) \\
& + \frac{[P_1]^+}{P_1} \int_0^\infty \mu_2(y) [P_3(y)]^+ dy + \lambda_1 ([P_0]^+ + [P_1]^+) \\
& + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_4(y)]^+ dy + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_8(y)]^+ dy \\
& + \lambda_2 [P_0]^+ + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_9(y)]^+ dy + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_{10}(y)]^+ dy \\
& + \lambda_2 [P_1]^+ + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_5(y)]^+ dy + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_6(y)]^+ dy \\
& - \int_0^\infty \mu_1(y) [P_2(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_3(y)]^+ dy \\
& - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_4(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_5(y)]^+ dy \\
& - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_6(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_7(y)]^+ dy \\
& - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_8(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_9(y)]^+ dy - \int_0^\infty \mu_2(y) [P_{10}(y)]^+ dy \\
= & \left( \frac{[P_0]^+}{P_0} - 1 \right) \left( \int_0^\infty \mu_1(y) [P_2(y)]^+ dy + \int_0^\infty \mu_2(y) [P_7(y)]^+ dy \right) \\
& + \left( \frac{[P_1]^+}{P_1} - 1 \right) \int_0^\infty \mu_2(y) [P_3(y)]^+ dy \\
\leq & 0.
\end{aligned}$$

上式表明算子  $A_1 + A_2 + A_3$  是 dispersive 算子. 由这个结论, 第一步, 第二步和 Phillips 定理推出算子  $A_1 + A_2 + A_3$  生成一个正压缩  $C_0$ -半群. 由  $C_0$ -半群的唯一性理论<sup>[16]</sup> 知道,  $A_1 + A_2 + A_3$  生成的  $C_0$ -半群就是  $T(t)$ .

在状态空间  $Y$  中定义集合

$$\Theta = \{P \in Y \mid P = (P_0, P_1, P_2(y), \dots, P_{10}(y)), P_0 \geq 0, P_1 \geq 0, P_k(y) \geq 0, k = 2, \dots, 10\},$$

则所定义的集合  $\Theta$  是  $Y$  中的锥. 由  $Y$  的定义易证它的共轭空间

$$Y^* = \left\{ P^* \in R^2 \times (L^\infty[0, \infty))^9 \mid \|P^*\| = \sup \left\{ |P_0^*|, |P_1^*|, \sup_{2 \leq k \leq 10} \|P_k\|_{L^\infty[0, \infty)} \right\} < \infty \right\},$$

是一个 Banach 空间<sup>[18]</sup>. 对  $P \in D(A_1) \cap \Theta$ , 取  $P^* = \|P\|(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ , 同时利用边界条件推出

$$\begin{aligned} & \langle (A_1 + A_2 + A_3)P, P^* \rangle \\ &= \left\{ -(\lambda_1 + \lambda_2)P_0 + \int_0^\infty \mu_1(y)P_2(y)dy + \int_0^\infty \mu_2(y)P_7(y)dy \right\} \|P\| \\ &+ \left\{ -(\lambda_1 + \lambda_2)P_1 + \int_0^\infty \mu_2(y)P_3(y)dy \right\} \|P\| \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_2(y)}{dy} - \mu_1(y)P_2(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_3(y)}{dy} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y))P_3(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_4(y)}{dy} - \mu_2(y)P_4(y) + \lambda_1 P_3(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_5(y)}{dy} - (\lambda_3 + \mu_2(y))P_5(y) + \lambda_2 P_3(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_6(y)}{dy} - \mu_2(y)P_6(y) + \lambda_3 P_5(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_7(y)}{dy} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2(y))P_7(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_8(y)}{dy} - \mu_2(y)P_8(y) + \lambda_1 P_7(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_9(y)}{dy} - (\lambda_3 + \mu_2(y))P_9(y) + \lambda_2 P_7(y) \right\} \|P\| dy \\ &+ \int_0^\infty \left\{ -\frac{dP_{10}(y)}{dy} - \mu_2(y)P_{10}(y) + \lambda_3 P_9(y) \right\} \|P\| dy \\ &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \|P\| (P_0 + P_1) + \|P\| \sum_{i=2}^{10} P_i(0) - \|P\| \sum_{\substack{i=4 \\ i \neq 7}}^{10} \int_0^\infty \mu_2(y)P_i(y)dy \\ &= -(\lambda_1 + \lambda_2) \|P\| (P_0 + P_1) + \lambda_1 \|P\| (P_0 + P_1) + \|P\| \int_0^\infty \mu_2(y)P_4(y)dy \\ &+ \|P\| \int_0^\infty \mu_2(y)P_8(y)dy + \lambda_2 \|P\| P_0 + \|P\| \int_0^\infty \mu_2(y)P_9(y)dy \\ &+ \|P\| \int_0^\infty \mu_2(y)P_{10}(y)dy + \lambda_2 \|P\| P_1 + \|P\| \int_0^\infty \mu_2(y)P_5(y)dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|P\| \int_0^{\infty} \mu_2(y) P_6(y) dy - \|P\| \sum_{\substack{i=4 \\ i \neq 7}}^{10} \int_0^{\infty} \mu_2(y) P_i(y) dy \\
& = 0.
\end{aligned}$$

上式表示算子  $A_1 + A_2 + A_3$  是保守算子. 由于初值  $P(0) \in D(A_1^2) \cap \Theta$ , 因此可以用 Fatforini 定理<sup>[19]</sup>, 并得到如下结论:

**定理 3.2**  $T(t)$  对于三部件系统 (2.1) 的初值  $P(0)$  是等距算子, 即

$$\|T(t)P(0)\| = \|P(0)\| (\forall t \in [0, \infty)). \quad (3.24)$$

综合定理 3.1 和定理 3.2 得到本文的主要结果:

**定理 3.3** 如果  $\mu_1(y)$  和  $\mu_2(y)$  满足

$$\mu_1 = \sup_{y \in [0, \infty)} \mu_1(y) < \infty, \quad \mu_2 = \sup_{y \in [0, \infty)} \mu_2(y) < \infty,$$

则系统 (2.1) 存在唯一的非负时间依赖解  $P(t, y)$ , 并满足  $\|P(t, \cdot)\| = 1, \forall t \in [0, \infty)$ .

**证** 由于  $P(0) \in D(A_1^2) \cap \Theta$ , 所以由文献 [15] 中的定理 11 与本文中的定理 3.1 知道, 所讨论的三部件系统 (2.1) 存在唯一的正时间依赖解  $P(t, y)$ , 并其可表示为

$$P(t, y) = T(t)P(0), \quad \forall t \in [0, \infty),$$

上式结合 (3.24) 式得到

$$\|P(t, \cdot)\| = \|T(t)(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\| = \|(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)\| = 1, \quad \forall t \in [0, \infty).$$

## 4 结论

本文运用泛函分析中的强连续算子半群理论, 研究了一个由单向关闭的两不同部件串联与一部件冷贮备构成的三部件可修系统的时间依赖解的存在唯一性. 具体而言, 首先通过引入状态空间, 算子及其定义域, 将该系统的模型转化为 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题. 随后, 证明了该系统模型非负时间依赖解的存在唯一性, 为后续研究时间依赖解的渐近行为奠定了基础. 因此, 可以借鉴文献 [20] 中的思想方法, 进一步探讨该系统时间依赖解的渐近行为.

## 参 考 文 献

- [1] 吴和成. 系统可靠性评定方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [2] 吴和成, 刘思峰. 基于不确定数据指数型产品贮存可靠性的置信下限 [J]. 中国机械工程, 2006, 17(22): 2330-2332.
- [3] 刘宝友. 冷贮备可修假系统的可靠性 [J]. 河北师范大学学报, 1994, 18(02): 19-23.
- [4] 唐应辉, 刘艳. 修理工单重休假且不能修复如新的冷储备可修系统 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(02): 47-52.

- [5] 苏保河. 冷储备可修系统的一个模型及其经济分析 [J]. 数学的实践与认识, 1996, 26(04): 351–356.
- [6] 刘仁彬, 唐应辉, 曹保山.  $N$  部件串联可修系统的一个新模型及其可靠性分析 [J]. 工程数学学报, 2008, 25(03): 421–428.
- [7] 陈永燕, 郑海鹰. 冷储备可修系统的一个新模型及其可靠性分析 [J]. 浙江大学学报 (理学版), 2011, 38(03): 274–278.
- [8] El-Sherbeny M S. Stochastic behavior of a two-unit cold standby redundant system under poisson shocks [J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2017, 42(07): 3043–3053.
- [9] 马梦饶, 胡林敏, 于晓芸. 离散时间冷储备可修重试系统可靠性建模 [J]. 燕山大学学报, 2025, 49(02): 177–188.
- [10] 史定华. 两部件串联可修模型分析 [J]. 自动化学报, 1985, 11(1): 71–79.
- [11] Cao J. Availability and failure frequency of two-unit series system with shut-off rule [C]. Singapore: World Scientific, 1987: 1–13.
- [12] Khalil Z S. Availability of series systems with various shut-off rules [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1985, 34(2): 187–189.
- [13] 程江, 唐应辉. 单向关闭三部件串 - 并联可修系统的可靠性 [J]. 系统工程学报, 2010, 25(5): 717–722.
- [14] 程江, 唐应辉, 余纱妙. 单向关闭两不同部件串联 - 部件冷贮备的三部件可修系统的可靠性 [J]. 应用数学, 2017, 30(01): 27–39.
- [15] Adams R. Sobolev space [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [16] Gupur G, Li X Z, Zhu G T. Functional analysis method in queueing theory [M]. Hertfordshire: Research Information Ltd., 2001.
- [17] 阿力木·米吉提. 附有不可靠服务台和无等待能力的  $M/G/1/1$  排队模型时间依赖解的渐近性分析 (英文)[J]. 应用数学, 2018, 31(01): 60–78.
- [18] 阿力木·米吉提, 蔡玲霞. 第二种服务可选的  $M/M/1$  排队模型状态空间及对偶空间的完备性 [J]. 新疆师范大学学报 (自然科学版), 2012, 31(02): 72–76.
- [19] Fattorini H O. The cauchy problem [M]. Massachusetts: Addison-Wesley, 1983.
- [20] 阿力木·米吉提. 一个供应链系统可靠性模型时间依赖解的渐近行为 [J]. 数学杂志, 2017, 37(01): 201–210.

## EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE NONNEGATIVE TIME — DEPENDENT SOLUTION OF A THREE UNIT SYSTEM WITH ONE COLD STANDBY UNIT

ALIM Mijit

(School of Economics and Management, The Open University of Xinjiang, Urumqi 830049, China)

**Abstract:** In this paper, we study the existence and uniqueness of the nonnegative time-dependent solution of a three unit system with one cold standby unit. Firstly, by choosing suitable state space we transform the three unit system model into an abstract Cauchy problem. Then, by using the strong continuous semigroup theory in functional analysis we prove the existence and uniqueness of the nonnegative time — dependent solution of the model.

**Keywords:** Three unit system with one cold standby unit;  $C_0$ — semigroup; dispersive operator

**2010 MR Subject Classification:** 47D03