

一类十一次 Hamilton 系统的 Abelian 积分零点个数

白 龙, 董白英

(宁夏师范大学数学与计算机科学学院, 宁夏 固原 756099)

摘要: 本文研究了一类十一次多中心平面 Hamilton 系统在 $n(n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_+)$ 次多项式扰动下 Abelian 积分的零点个数. 应用 Picard-Fuchs 方程法, 证明了这类扰动 Hamilton 系统的 Abelian 积分的零点个数的上界 (计重数).

关键词: Hamilton 系统; Abelian 积分; Picard-Fuchs 方程; 极限环

MR(2010) 主题分类号: 34C07; 34C23 中图分类号: O175

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2025)06-0525-10

1 引言

考虑近 Hamilton 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon f(x, y), \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon g(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $0 < |\varepsilon| \ll 1$, $H(x, y)$ 是关于 x 和 y 的 $m + 1$ 次实多项式, $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 是关于 x 和 y 的次数不超过 n 的实多项式. 假设系统 (1.1) $_{\varepsilon=0}$ 有连续闭轨线族

$$\Gamma_h \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | H(x, y) = h, h \in \Sigma\}.$$

Σ 为 h 的最大存在开区间. 定义后继函数

$$d(h, \varepsilon) := P_\varepsilon(h) - h = \varepsilon I(h) + o(\varepsilon^2),$$

其中 $P_\varepsilon(h)$ 为 Poincaré 映射下 h 的像, 则 ε 的系数 $I(h)$ 可表示为

$$I(h) = \oint_{\Gamma_h} f(x, y)dx - g(x, y)dy, h \in \Sigma, \quad (1.2)$$

式 (1.2) 称为 Abelian 积分. 当 $I(h)$ 不恒等于零时, Abelian 积分 $I(h)$ 的孤立零点的最大个数 (计重数) 就给出了在扰动前系统 (1.1) 的闭轨族所形成的区域内产生极限环个数 (计重数) 的上界^[1]. 寻找 Abelian 积分 $I(h)$ 的零点个数的上界 $B(n)$ 称为弱化的 Hilbert 第 16 问题^[2]. 对 Hamilton 函数

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}x^3 + axy^2 + \frac{1}{3}by^3,$$

*收稿日期: 2025-04-06 接收日期: 2025-05-12

基金项目: 国家自然科学基金基金资助 (12261070); 宁夏自然科学基金资助 (2022AAC03333).

作者简介: 白龙 (1966-), 男, 甘肃平凉, 教授, 主要研究方向: 主要从事微分方程动力学研究.

E-mail: 305178410@qq.com.

Horozov 等^[3]用 Picard-Fuchs 方程法证明了 $B(n) \leq 5n + 15$. 对于 Hamilton 函数

$$H(x, y) = ax^2 + by^2 - x^4 + cx^2y^2 + y^4,$$

杨纪华^[4]等证明了 $B(n) \leq 90n + 24$. 对于 Hamilton 函数 $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$, $\deg U(x) = 4$ 时, 赵育林等^[5]证明了 $B(n) \leq 7n + 5$. 对于 4 次 Hamilton 函数

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + ax^4 + bx^2y^2 + cy^4$$

周鑫等^[6]得到相应 Abelian 积分 $I(h)$ 的代数结构, 并给出了 $a > 0, b = 0$ 和 $c = 0$ 时 $I(h)$ 零点个数的上界. 对于 Hamilton 函数

$$H(x, y) = x^2 + y^2 - x^4 + ax^2y^2 + y^4, a > -2,$$

吴娟娟等^[7]证明了 $B(n) \leq 2\lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + 12\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor + 23$. 对 Hamilton 函数

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{c}{6}x^6,$$

赵丽琴等^[8]证明了 $B(n) \leq 54n - 13$. 对 Hamilton 函数

$$H(x, y) = x^2 + cx^4 + y^4,$$

张永康等^[9]证明了 $B(2n + 2) = B(2n + 1) \leq 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 4$.

本文研究了如下 Hamilton 函数

$$H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{72}x^{12} = h, h \in \Sigma = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right), \quad (1.3)$$

相应的向量场

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3, \\ \dot{y} = \frac{x^3}{6} (6 - 6x^4 + x^8). \end{cases} \quad (1.4)$$

在多项式 $f(x, y) = \sum_{1 \leq 4i+4j+1 \leq n} a_{ij}x^{4i}y^{4j+1}$ 和 $g(x, y) = \sum_{1 \leq 4i+4j+1 \leq n} b_{ij}x^{4i+1}y^{4j}$ 扰动下相应的 Abelian 积分 $I(h)$ 零点个数的上界 (计重数). 设 $P(x, y) = -y^3, Q(x, y) = \frac{x^3}{6} (6 - 6x^4 + x^8)$. 由 $P(x, y) = 0$ 且 $Q(x, y) = 0$ 可得系统 (1.4) 有五个奇点 $\widetilde{O}_1(-\sqrt[4]{3+\sqrt{3}}, 0), O(0, 0), O_1(\sqrt[4]{3+\sqrt{3}}, 0), C'(-\sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, 0), C(\sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, 0)$. 根据矩阵

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix}$$

在五点 $\widetilde{O}_1, O, O_1, C', C$ 处的特征根可得, 当 $h \in \Sigma = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$ 时, 系统有三个中心点 $\widetilde{O}_1(-\sqrt[4]{3+\sqrt{3}}, 0), O(0, 0), O_1(\sqrt[4]{3+\sqrt{3}}, 0)$ 和两个对称的退化鞍点 $C'(-\sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, 0), C(\sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, 0)$,

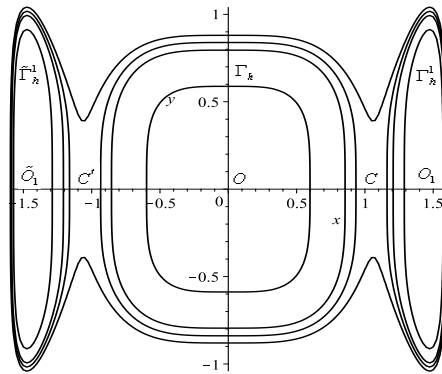


图 1: 系统 (1.4) 的相图

$C(\sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, 0)$, 有三个分别围绕中心 \tilde{O}_1, O, O_1 的周期环域 $\tilde{\Gamma}_h^1, \Gamma_h, \Gamma_h^1$. 如图 1 所示. 其中

$$\tilde{\Gamma}_h^1 = \left\{ (x, y) \mid H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{72}x^{12} = h, x < -\sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, h \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right) \right\},$$

$$\Gamma_h = \left\{ (x, y) \mid H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{72}x^{12} = h, -\sqrt[4]{3-\sqrt{3}} < x < \sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, h \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right) \right\},$$

$$\Gamma_h^1 = \left\{ (x, y) \mid H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{72}x^{12} = h, x > \sqrt[4]{3-\sqrt{3}}, h \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right) \right\}.$$

下面对 $h \in \Sigma = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$ 时在周期环域 Γ_h 上的情形进行讨论, 本文的主要结果为

定理 1.1 对 Hamilton 函数

$$H(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{72}x^{12} = h, h \in \Sigma = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

在周期环域 Γ_h 上, $B(n) \leq 7\lceil \frac{n-1}{4} \rceil + 5$, 其中 $n = \max\{\deg f, \deg g\}$ 且 $n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_+$.

2 Abelian 积分 $I(h)$ 的代数结构

在周期环域 Γ_h 上, 由分部积分可得

$$\oint_{\Gamma_h} x^{4i+1}y^{4j}dy = -\frac{4i+1}{4j+1} \oint_{\Gamma_h} x^{4i}y^{4j+1}dx, \tag{2.1}$$

所以 Abelian 积分 (1.2) 可表示为

$$I(h) = \oint_{\Gamma_h} L(x, y)dx, \tag{2.2}$$

其中 $L(x, y) = \sum_{1 \leq 4i+4j+1 \leq n} c_{ij}x^{4i}y^{4j+1}$, i 和 j 是自然数, $c_{ij} = -\left(\frac{4i+1}{4j+1}a_{ij} + b_{ij}\right)$.

对 $h \in \Sigma$, 记

$$I_{4i,4j+1}(h) = \oint_{\Gamma_h} x^{4i}y^{4j+1}dx, \tag{2.3}$$

所以

$$I(h) = \sum_{1 \leq 4i+4j+1 \leq n} c_{ij} I_{4i,4j+1}(h).$$

从而,Abelian 积分 $I(h)$ 的代数结构可由下面两个引理给出.

引理 2.1 当 $n = 4i + 4j + 1 = 4k + 1 \geq 5$ 时, 积分 $I_{4i,4j+1}(h)$ 可以表示为 $I_{l,m}(h)$ ($l+m = 4k - 7, 4k - 3$) 和 $hI_{l,m}(h)$ ($l+m = 4k - 11, 4k - 7$ 或 $4k - 3$) 的线性组合.

证 在式 (1.3) 两端同时对 x 求导可得

$$x^3 - x^7 + \frac{1}{6}x^{11} + y^3 \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad (2.4)$$

给式 (2.4) 两端同乘以 $x^{4i-11}y^{4j+1}$, 并沿 Γ_h 关于 x 积分可得

$$I_{4i,4j+1} = 6I_{4i-4,4j+1} - 6I_{4i-8,4j+1} + \frac{6(4i-11)}{4j+5}I_{4i-12,4j+5}, \quad (2.5)$$

其中 $i \geq 3$, 给式 (1.3) 两端同乘以 $x^{4i}y^{4j-3}$, 并沿 Γ_h 关于 x 积分可得

$$I_{4i,4j+1} = 4hI_{4i,4j-3} - I_{4i+4,4j-3} + \frac{1}{2}I_{4i+8,4j-3} - \frac{1}{18}I_{4i+12,4j-3}. \quad (2.6)$$

由式 (2.5) 可得

$$I_{4i+12,4j-3} = 6I_{4i+8,4j-3} - 6I_{4i+4,4j-3} + \frac{6(4i+1)}{4j+1}I_{4i,4j+1}. \quad (2.7)$$

把式 (2.7) 代入式 (2.6) 可得

$$I_{4i,4j+1} = \frac{4j+1}{8(i+3j+1)}[24hI_{4i,4j-3} - 4I_{4i+4,4j-3} + I_{4i+8,4j-3}]. \quad (2.8)$$

由式 (2.6) 可得

$$I_{4i-12,4j+5} = 4hI_{4i-12,4j+1} - I_{4i-8,4j+1} + \frac{1}{2}I_{4i-4,4j+1} - \frac{1}{18}I_{4i,4j+1}. \quad (2.9)$$

把式 (2.9) 代入式 (2.5) 可得

$$\begin{aligned} & I_{4i,4j+1} \quad (2.10) \\ &= \frac{1}{4(i+3j+1)}[72(4i-11)hI_{4i-12,4j+1} - 36(2i+2j-3)I_{4i-8,4j+1} + 9(4i+8j-1)I_{4i-4,4j+1}]. \end{aligned}$$

在式 (2.5) 中取 $(i, j) = (3, k-1)$ 可得

$$I_{12,4k-3} = 6I_{8,4k-3} - 6I_{4,4k-3} + \frac{6}{4k+1}I_{0,4k+1}. \quad (2.11)$$

在式 (2.8) 中取 $(i, j) = (2, k-1)$ 可得

$$I_{8,4k-3} = \frac{4k-3}{24k}[24hI_{8,4k-7} - 4I_{12,4k-7} + I_{16,4k-7}]. \quad (2.12)$$

由式 (2.10) 可得

$$I_{4i+8,4j-3} = \frac{1}{4(i+3j)} [72(4i-3)hI_{4i-4,4j-3} - 36(2i+2j-1)I_{4i,4j-3} + 9(4i+8j-1)I_{4i+4,4j-3}]. \tag{2.13}$$

在式 (2.13) 中取 $(i, j) = (1, k-1), (2, k-1), (2, k-2)$ 可得

$$I_{12,4k-7} = \frac{1}{4(3k-2)} [72hI_{0,4k-7} - 36(2k-1)I_{4,4k-7} + 9(8k-5)I_{8,4k-7}]. \tag{2.14}$$

$$I_{16,4k-7} = \frac{1}{4(3k-1)} [360hI_{4,4k-7} - 36(2k+1)I_{8,4k-7} + 9(8k-1)I_{12,4k-7}]. \tag{2.15}$$

$$I_{16,4k-11} = \frac{1}{4(3k-4)} [360hI_{4,4k-11} - 36(2k-1)I_{8,4k-11} + 9(8k-9)I_{12,4k-11}]. \tag{2.16}$$

在式 (2.8) 中分别取 $(i, j) = (0, k), (1, k-1), (2, k-2)$, 在式 (2.10) 中取 $(i, j) = (3, k-3), (4, k-4), \dots, (k-1, 1), (k, 0)$, 同时结合 (2.11),(2.12),(2.14),(2.15) 和 (2.16) 可得

$$AJ = B,$$

其中 $J = (I_{0,4k+1}, I_{4,4k-3}, I_{8,4k-7}, I_{12,4k-11}, I_{16,4k-15}, \dots, I_{4k-4,5}, I_{4k,1})$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4k+1}{2(3k+1)} & -\frac{(4k+1)(4k-3)}{8(3k+1)} \left[\frac{h}{k} + \frac{1056k^2-880k+151}{128k(3k-1)(3k-2)} \right] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4k-3}{8(3k-1)} \left[\frac{9(8k-5)}{4(3k-2)} - 4 \right] & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4k-7}{8(3k-3)} \left[\frac{9(8k-9)}{4(3k-4)} - 4 \right] & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{4k+1}{8(3k+1)} \left\{ 24hI_{0,4k-3} + \frac{(72k+21)(4k-3)}{16k(3k-1)(3k-2)} hI_{0,4k-7} + \left[\frac{15(4k-3)}{4k(3k-1)} h - \frac{(216k-75)(2k-1)(4k-3)}{32k(3k-1)(3k-2)} \right] I_{4,4k-7} \right\} \\ \frac{4k-3}{8(3k-1)} \left[\frac{18}{3k-2} hI_{0,4k-7} + (24h - \frac{18k-9}{3k-2}) I_{4,4k-7} \right] \\ \frac{4k-7}{8(3k-3)} \left[\frac{90}{3k-4} hI_{0,4k-11} + (24h - \frac{18k-9}{3k-4}) I_{8,4k-11} \right] \\ \frac{1}{4(3k-5)} [72hI_{0,4k-11} - 36(2k-3)I_{4,4k-11} + 9(8k-11)I_{8,4k-11}] \\ \frac{1}{4(3k-7)} [360hI_{4,4k-15} - 36(2k-3)I_{8,4k-15} + 9(8k-15)I_{12,4k-15}] \\ \vdots \\ \frac{1}{4(k+3)} [72(4k-15)hI_{4k-16,5} - 36(2k-3)I_{4k-12,5} + 9(4k+3)I_{4k-8,5}] \\ \frac{1}{4(k+1)} [72(4k-11)hI_{4k-12,1} - 36(2k-3)I_{4k-8,1} + 9(4k-1)I_{4k-4,1}] \end{bmatrix}.$$

显然, $\det A = 1$, 且 B 中的元素仅含有 $I_{l,m}(h) (l+m = 4k-7, 4k-3)$ 和 $hI_{l,m}(h) (l+m = 4k-11, 4k-7$ 或 $4k-3)$. 所以, 引理 2.1 成立.

引理 2.2 在 (1.2) 中假设 $n \geq 5$, 对 Hamilton 函数 (1.3), $I(h)$ 可表示为

$$I(h) = \alpha(h)I_{0,1}(h) + \beta(h)I_{4,1}(h) + \gamma(h)I_{8,1}(h), \tag{2.17}$$

其中 $\alpha(h), \beta(h), \gamma(h)$ 是关于 h 的多项式, $\deg \alpha(h) \leq \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor = k$, $\deg\{\beta(h), \gamma(h)\} \leq \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - 1 = k - 1$. 且 k 是 $\deg \alpha(h)$ 的最小上界, $k - 1$ 是 $\deg \beta(h)$ 和 $\deg \gamma(h)$ 的最小上界.

证 下面用数学归纳法证明. 由式 (2.8) 和式 (2.10) 可得

$$\begin{aligned} I_{0,5}(h) &= \frac{5}{32}[24hI_{0,1} - 4I_{4,1} + I_{8,1}], I_{0,9}(h) = \frac{9}{56}[24hI_{0,5} - 4I_{4,5} + I_{8,5}], \\ I_{0,13}(h) &= \frac{13}{80}[24hI_{0,9} - 4I_{4,9} + I_{8,9}], I_{4,5}(h) = \frac{1}{8}[24hI_{4,1} - 4I_{8,1} + I_{12,1}], \\ I_{4,9}(h) &= \frac{9}{64}[24hI_{4,5} - 4I_{8,5} + I_{12,5}], I_{8,5}(h) = \frac{5}{48}[24hI_{8,1} - 4I_{12,1} + I_{16,1}], \\ I_{8,9}(h) &= \frac{1}{8}[24hI_{8,5} - 4I_{12,5} + I_{16,5}], I_{12,1}(h) = \frac{1}{16}[72hI_{0,1} - 108I_{4,1} + 99I_{8,1}], \\ I_{16,1}(h) &= \frac{1}{20}[360hI_{4,1} - 180I_{8,1} + 135I_{12,1}], I_{12,5}(h) = \frac{1}{28}[72hI_{0,5} - 180I_{4,5} + 171I_{8,5}], \\ I_{16,5}(h) &= \frac{1}{32}[360hI_{4,5} - 252I_{8,5} + 207I_{12,5}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

所以, 当 $k = 1, 2, 3$ 时结论成立.

假设当 $k \leq d - 1$ 时, 即 $n = 4k + 1 \leq 4d - 3$ 时, $I(h) = \oint_{\Gamma_h} L(x, y)dx$ 能表示成

$$I(h) = \alpha^n(h)I_{0,1}(h) + \beta^n(h)I_{4,1}(h) + \gamma^n(h)I_{8,1}(h), \quad (2.19)$$

其中 $\deg \alpha^n(h) \leq \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor = k \leq d - 1$, $\deg\{\beta^n(h), \gamma^n(h)\} \leq \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - 1 = k - 1 \leq d - 2$.

当 $k = d$ 时, 由引理 2.1 和式 (2.19) 可得

$$\begin{aligned} I(h) &= \sum_{l+m \leq 4k-3} A_{lm}I_{lm} + h \sum_{l+m \leq 4k-3} B_{lm}I_{lm} \\ &= \alpha^{4d-3}(h)I_{0,1}(h) + \beta^{4d-3}(h)I_{4,1}(h) + \gamma^{4d-3}(h)I_{8,1}(h) \\ &\quad + h(\alpha_1^{4d-3}(h)I_{0,1}(h) + \beta_1^{4d-3}(h)I_{4,1}(h) + \gamma_1^{4d-3}(h)I_{8,1}(h)) \\ &= \alpha(h)I_{0,1}(h) + \beta(h)I_{4,1}(h) + \gamma(h)I_{8,1}(h). \end{aligned}$$

其中 $\deg\{\alpha^{4d-3}(h), \alpha_1^{4d-3}(h)\} \leq d - 1$, $\deg\{\beta^{4d-3}(h), \beta_1^{4d-3}(h), \gamma^{4d-3}(h), \gamma_1^{4d-3}(h)\} \leq d - 2$, A_{lm} 和 B_{lm} 是任意常数. 因此,

$$\begin{aligned} \deg \alpha(h) &\leq \max\{\deg \alpha^{4d-3}(h), \deg \alpha_1^{4d-3}(h) + 1\} \leq d = k, \\ \deg \beta(h) &\leq \max\{\deg \beta^{4d-3}(h), \deg \beta_1^{4d-3}(h) + 1\} \leq d - 1 = k - 1, \\ \deg \gamma(h) &\leq \max\{\deg \gamma^{4d-3}(h), \deg \gamma_1^{4d-3}(h) + 1\} \leq d - 1 = k - 1. \end{aligned}$$

所以, 对任意的 $k \in \mathbb{N}_+$, 引理 2.2 成立.

3 Picard-Fuchs 方程和 Riccati 方程

本节将证明 $I_{0,1}, I_{4,1}, I_{8,1}$ 满足的 Picard-Fuchs 方程和相关的 Riccati 方程.

引理 3.1 对 Hamilton 函数 (1.3), 向量 $V = (I_{0,1}, I_{4,1}, I_{8,1})^T$ 满足 Picard-Fuchs 方程

$$RV = (Bh + C)V', \quad (3.1)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2} & 24 & 0 \\ \frac{99}{8} & 18 & 24 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{27}{4} & \frac{35}{16} \\ 0 & -\frac{297}{16} & \frac{513}{64} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 16 & 0 \\ -\frac{99}{8} & -18 & 24 \end{bmatrix}.$$

证 在式 (1.3) 两端关于 h 求导可得

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \frac{1}{y^3}, \quad (3.2)$$

进而由式 (2.3) 可得 $I'_{4i,4j+1} = (4j+1) \oint_{\Gamma_h} x^{4i} y^{4j-3} dx$, 即可得

$$I_{4i,4j-3} = \frac{1}{4j+1} I'_{4i,4j+1}. \quad (3.3)$$

把 (3.3) 代入 (2.8) 可得

$$I_{4i,4j+1} = \frac{1}{8(i+3j+1)} [24hI'_{4i,4j+1} - 4I'_{4i+4,4j+1} + I'_{4i+8,4j+1}]. \quad (3.4)$$

在式 (3.4) 中分别取 $(i, j) = (0, 0), (1, 0)$ 和 $(2, 0)$ 可得

$$\begin{cases} I_{0,1} = \frac{1}{8}(24hI'_{0,1} - 4I'_{4,1} + I'_{8,1}), \\ I_{4,1} = \frac{1}{16}(24hI'_{4,1} - 4I'_{8,1} + I'_{12,1}), \\ I_{8,1} = \frac{1}{24}(24hI'_{8,1} - 4I'_{12,1} + I'_{16,1}). \end{cases} \quad (3.5)$$

由式 (2.18) 可得

$$\begin{cases} I'_{12,1} = \frac{1}{16}(72I_{0,1} + 72hI'_{0,1} - 108I'_{4,1} + 99I'_{8,1}), \\ I'_{16,1} = \frac{1}{20} \left(\frac{1215}{2}I_{0,1} + 360I_{4,1} + \frac{1215}{2}hI'_{0,1} + 360hI'_{4,1} - \frac{3645}{4}I'_{4,1} + \frac{10485}{4}I'_{8,1} \right). \end{cases} \quad (3.6)$$

把式 (3.6) 代入式 (3.5) 即可得结论成立. 证毕.

引理 3.2 对系统 (1.4), $I_{0,1}, I_{4,1}$ 和 $I_{8,1}$ 满足

$$D(h) \begin{bmatrix} I''_{0,1} \\ I''_{4,1} \\ I''_{8,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(h) & a_{12}(h) \\ a_{21}(h) & a_{22}(h) \\ a_{31}(h) & a_{32}(h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{0,1} \\ I'_{4,1} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} D(h) &= 288h(48h^2 - 1), \\ a_{11}(h) &= -9216h^2 - 288h + 144, a_{12}(h) = -48h - 36, \\ a_{21}(h) &= 144h(1 + 12h) - 324h(16h + 5) + 1188h, a_{22}(h) = -288h(16h + 5) + 1728h, \\ a_{31}(h) &= 3456h^2 + 324h(12h - 11) - 3564h(4h - 1), a_{32}(h) = 288h(12h - 11) - 5184h(4h - 1). \end{aligned}$$

证 在式 (3.1) 两端对 h 求导可得

$$(R - B)V' = (Bh + C)V'', \quad (3.8)$$

其中

$$R - B = \begin{bmatrix} -16 & 0 & 0 \\ -9 & -8 & 0 \\ -\frac{99}{4} & -36 & 0 \end{bmatrix}.$$

由 (3.8) 可得 (3.7). 证毕.

注 由 (3.8) 推导 (3.7) 时, 由于三阶矩阵 $(Bh + C)$ 的逆矩阵计算量大, 系数复杂, 本文借助数学软件 Maple 进行相关计算, 程序如下: `LinearAlgebra:-MatrixInverse(rtable(1..3, 1..3, [[-4*h, -4, 1], [(1/7)*k*h, -4*h - 9/7*k, 27/28*k - 1], [-(4/7*k)*h + (3/28*(k^2))*h, k*h + 36/7*k - 27/28*(k^2), -4*h + 81/112*(k^2) - 48/7*k]], subtype=Matrix))`.

由式 (3.3) 可得 $I'_{0,1}(h) = \oint_{\Gamma_h} y^{-3} dx = 3 \iint_{\text{int}(\Gamma_h)} y^{-4} dx dy \neq 0$, 所以可得如下引理.

引理 3.3 对 Hamilton 函数 (1.3), $\omega(h) = \frac{I'_{4,1}(h)}{I'_{0,1}(h)}$ 满足 Riccati 方程

$$D(h)\omega'(h) = -a_{12}(h)\omega^2(h) + [a_{32}(h) - a_{11}(h)]\omega(h) + a_{31}(h). \quad (3.9)$$

证 由于 $\omega'(h) = \frac{I'_{4,1}(h)I'_{0,1}(h) - I'_{4,1}(h)I''_{0,1}(h)}{I'_{0,1}(h)^2}$, 结合式 (3.7) 即可得式 (3.9). 证毕.

4 主要结果的证明

由 (2.17) 和 (3.1) 可得

$$I'(h) = \alpha_1(h)I'_{0,1}(h) + \beta_1(h)I'_{4,1}(h) + \gamma_1(h)I'_{8,1}(h), \quad (4.1)$$

其中 $\deg \alpha_1(h) \leq k$, $\deg\{\beta_1(h), \gamma_1(h)\} \leq k - 1$.

引理 4.1 设 $\Omega = \{h | \gamma_1(h) = 0, h \in \Sigma\}$, 则当 $h \in \Sigma \setminus \Omega$ 时, 等式

$$\left(\frac{I'(h)}{\gamma_1(h)} \right)' = \frac{M(h)}{D(h)\gamma_1^2(h)} \quad (4.2)$$

成立, 其中

$$M(h) = \alpha_2(h)I'_{0,1}(h) + \beta_2(h)I'_{4,1}(h), \quad (4.3)$$

$\deg \alpha_2(h) \leq 2k + 1$, $\deg \beta_2(h) \leq 2k$.

证 由 (4.1) 和 (3.7) 可得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{I'(h)}{\gamma_1(h)} \right)' \\ &= \left(\frac{\alpha_1(h)}{\gamma_1(h)} \right)' I'_{0,1}(h) + \left(\frac{\beta_1(h)}{\gamma_1(h)} \right)' I'_{4,1}(h) + \frac{1}{\gamma_1(h)} [\alpha_1(h)I''_{0,1}(h) + \beta_1(h)I''_{4,1}(h) + \gamma_1(h)I''_{8,1}(h)] \\ &= \frac{1}{D(h)\gamma_1^2(h)} [\alpha_2(h)I'_{0,1}(h) + \beta_2(h)I'_{4,1}(h)], \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\alpha_2(h) &= D(h)[\alpha'_1(h)\gamma_1(h) - \alpha_1(h)\gamma'_1(h)] + a_{11}(h)\alpha_1(h)\gamma_1(h) + a_{21}(h)\beta_1(h)\gamma_1(h) + a_{31}(h)\gamma_1^2(h), \\ \beta_2(h) &= D(h)[\beta'_1(h)\gamma_1(h) - \beta_1(h)\gamma'_1(h)] + a_{12}(h)\alpha_1(h)\gamma_1(h) + a_{22}(h)\beta_1(h)\gamma_1(h) + a_{32}(h)\gamma_1^2(h).\end{aligned}$$

并且 $\deg \alpha_2(h) \leq 2k + 1$, $\deg \beta_2(h) \leq 2k$. 证毕.

引理 4.2 ^[3] 设 $I'(h), M(h), \gamma_1(h)$ 在 Σ 中的零点个数分别为 $\#I'(h), \#M(h), \#\gamma_1(h)$, 则

$$\#I'(h) \leq \#M(h) + \#\gamma_1(h) + 1. \quad (4.4)$$

定理 4.3 对 Hamilton 函数 (1.3), $W(h) = \frac{M(h)}{I'_{0,1}(h)}$ 满足 Riccati 方程

$$D(h)\beta_2(h)W'(h) = R_0(h)W^2(h) + R_1(h)W(h) + R_2(h), \quad (4.5)$$

其中

$$\begin{aligned}R_0(h) &= -a_{12}(h), R_1(h) = D(h)\beta'_2(h) + [a_{32}(h) - a_{11}(h)]\beta_2(h) + 2a_{12}(h)\alpha_2(h), \\ R_2(h) &= D(h)[\alpha'_2(h)\beta_2(h) - \alpha_2(h)\beta'_2(h)] - [a_{32}(h) - a_{11}(h)]\alpha_2(h)\beta_2(h) - a_{12}(h)\alpha_2^2(h) \\ &\quad + a_{31}(h)\beta_2^2(h), \deg R_2(h) \leq 4k + 3.\end{aligned}$$

证 由式 (4.3) 可得

$$W(h) = \frac{M(h)}{I'_{0,1}(h)} = \alpha_2(h) + \beta_2(h)\omega(h), \quad (4.6)$$

所以

$$W'(h) = \alpha'_2(h) + \beta'_2(h)\omega(h) + \beta_2(h)\omega'(h),$$

同时结合式 (3.9) 即可得证.

引理 4.4 ^[5] 假设 $\Sigma_0 = (a, b) \subset \Sigma$, 则当 $h \in \Sigma_0$ 时, $\#W(h) \leq \#\beta_2(h) + \#R_2(h) + 1$. 其中表达式 $\#\psi(h)$ 表示 $\psi(h)$ 在 Σ_0 上的零点个数 (计重数).

定理 1.1 的证明 分别由引理 4.1 和引理 4.3 可得 $\deg \beta_2(h) \leq 2k$, $\deg R_2(h) \leq 4k + 3$. 从而由引理 4.4 可得

$$\#W(h) \leq 6k + 4.$$

由式 (4.1) 可得 $\deg \gamma_1(h) \leq k - 1$. 从而由引理 4.2 可得

$$\#I'(h) \leq 7k + 4 = 7 \left[\frac{n-1}{4} \right] + 4.$$

因此, 对 $h \in \Sigma = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{12}\right)$ 且在周期环域 Γ_h 上时, $B(n) \leq 7 \left[\frac{n-1}{4} \right] + 5$. 定理 1.1 证毕.

参 考 文 献

- [1] Horozov E, Iliev I D. On the number of limit cycles in perturbations of quadratic Hamiltonian systems[J]. Proc London Math Soc, 1994, 69(3): 198–224.
- [2] Li J B. Hilbert’s 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields[J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 2003, 13(1): 47–106.
- [3] Horozov E, Iliev I D. Linear estimate for the number of zeros of Abelian integrals with cubic Hamiltonians[J]. Nonlinearity, 1998, 11(6): 1521–1537.
- [4] Yang J H. On the number of zeros of Abelian integral for a class of cubic Hamiltonian systems[J]. Dynamical Systems, 2019, 34(4): 561–583.
- [5] Zhao Y L, Zhang Z F. Linear estimate of the number of zeros of Abelian integrals for a kind of quartic Hamiltonians[J]. J Differential Equations, 1999, 155(1): 73–88.
- [6] Zhou X, Li C P. On the algebraic structure of Abelian integrals for a kind of perturbed cubic Hamiltonian systems[J]. J Math Anal Appl, 2009, 359(1): 209–215.
- [7] Wu J J, Zhang Y K, Li C P. On the number of zeros of Abelian integrals for a kind of quartic Hamiltonians[J]. Appl Math Comput, 2014, 228(1): 329–335.
- [8] Zhao L Q, Qi M H, Liu C J. The cyclicity of period annuli of a class of quintic Hamiltonian systems[J]. J Math Anal Appl, 2013, 403(1): 391–407.
- [9] 张永康, 李宝毅, 隋世友. 一类单中心三次 Hamilton 系统的 Abel 积分零点个数 [J]. 天津师范大学学报 (自然科学版), 2023, 43(6): 1–5.

THE NUMBER OF ZEROS OF ABELIAN INTEGRALS OF A CLASS OF HAMILTONIAN SYSTEM WITH ELEVEN DEGREE

BAI Long, DONG Bai-Ying

(*School of Mathematics and Computer Science, Ningxia Normal University, Guyuan Ningxia 756099, China*)

Abstract: In this paper, we study the number of zeros of Abelian integral for a class of Hamiltonian system under perturbations of a polynomials with degree n ($n = 4k + 1, k \in \mathbb{N}_+$). By using Picard-Fuchs equation method, we derive the upper bound of the number of zeros of Abelian integrals for this class of perturbed Hamiltonian systems (taking into account the multiplicity).

Keywords: Hamilton system; Abelian integral; Picard-Fuchs equation; limit cycle

2010 MR Subject Classification: 34C07; 34C23