

光滑映射芽的 \mathcal{R}_G 无限决定性

刘苏卉¹, 刘恒兴²

(1. 江汉大学人工智能学院数学与大数据系, 湖北 武汉 430056)

(2. 武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

摘要: 本文研究了光滑映射芽关于 \mathcal{R}_G - 的无限决定性问题, 其中 G 是一线性 Lie 群和 \mathcal{R}_G 是光滑映射芽中右等价群的某类子群. 利用乘积积分理论中的方法, 获得了光滑映射芽关于 \mathcal{R}_G - 的无限决定性的充要条件. 推广了文献 [1-4] 中的有关结果.

关键词: 光滑映射芽; \mathcal{R}_G 子群; 无限决定性; \mathcal{R}_G 等价; 切空间

MR(2010) 主题分类号: 58K40 中图分类号: O192

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2025)06-0517-08

1 引言

光滑映射的奇点理论主要内容是研究在各种等价关系下的映射芽. 决定性问题是光滑映射的奇点理论中的基本论题.

在文献 [5] 中, Mather 从微分拓扑观点出发给出了光滑映射芽 $f: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow \mathbf{R}^p$ 在群 $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$ 作用下的等价关系. 考虑了一个基本问题: 什么条件下一个光滑映射芽等价到它自身的泰勒多项式? 这就是的有限决定性问题. 而无限决定性概念是有限决定性的延伸, 无限决定性涉及光滑映射芽在平坦扰动下的稳定性问题. 在文献 [1-2] 中, Wilson 刻划了光滑映射芽在群 $\mathcal{J} = \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$ 作用下的无限决定性问题及 \mathcal{K} 有限决定映射芽关于群 \mathcal{A} 作用下的无限决定性问题. Brodersen 在文献 [6] 中证明了当映射芽不满足 \mathcal{K} 有限决定性条件时, [2] 中结论仍成立. 文献 [7] 研究了带参数的函数芽的无限决定性问题. 对于非孤立奇点的情况, Sun 和 Wilson 在文 [8] 中研究了带有线孤立奇点的光滑函数芽的无限相对决定性. 随后这项工作文 [9-10] 中被推广到其非孤立奇点集包含有更一般子集的光滑函数芽的情形.

新近 Donghe Pei 在文 [3] 中讨论了两种新等价关系下的光滑函数芽的无限相对决定性. 此外, 文献 [11-12] 研究了关于作用群 \mathcal{R} 的一些子群 \mathcal{R}_N 和 \mathcal{R}_I 的光滑映射芽的有限性问题.

受上述文献的启发, 在本文中, 当 G 是一线性 Lie 群时, 我们利用 G 定义了光滑映射芽中 \mathcal{R}_G - 等价关系, 考虑了光滑映射芽在群 \mathcal{R}_G 作用下的轨道切空间, 而轨道切空间是轨道的无穷小逼近, 然后利用乘积积分理论 ([13]) 研究光滑映射芽关于 \mathcal{R}_G - 等价关系下的无限决定性问题, 给出了映射芽的无限决定的充要条件.

2 基本记号与概念

记 ε_n 为所有光滑函数芽 $f: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow \mathbf{R}$ 构成的环, m_n 为所有光滑函数芽 $f: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$ 构成的理想, 它是 ε_n 的极大理想. 如果将 ε_n 中的所有平坦函数芽构成的理想记为

*收稿日期: 2024-11-26 接收日期: 2024-12-05

基金项目: 国家自然科学基金项目基金资助 (12071353).

作者简介: 刘苏卉 (1988-), 女, 湖北武汉, 讲师, 主要研究方向: 奇点理论及应用.

m_n^∞ , 那么 $m_n^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} m_n^k$. 对于芽 f , 记 $j^k f(x)$ 为芽 f 在 x 处的 k 阶 Taylor 多项式. 特别地, 当 $k = \infty$ 时, 将 $j^\infty f(x)$ 看作芽 f 在 x 处的 Taylor 级数.

文献 [5] 中, Mather 定义了右等价群 $\mathcal{R} = \{h : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0) \text{ 是微分同胚芽}\}$, 两个映射芽 $f, g \in \varepsilon_n$ 是 \mathcal{R} -等价的当且仅当存在一个微分同胚芽 $h \in \mathcal{R}$, 使得 $f \circ h = g$, 其中 $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$. 因为 $h(0) = 0$, 所以 $h_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots, n$. 从而 $h_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)x_j$, 其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$, 且 $a_{ij}(x) \in \varepsilon_n$. 因此 $h(x) = A[x] \cdot x$, 其中 $A(x) = (a_{ij}(x))_{n \times n}$. 因为 h 在 $x = 0$ 处的 Jacobian 矩阵为 $J(h)|_{x=0} = A[0]$, 并且 h 是可逆的, 所以 $A[0]$ 是非奇异的. 由此, 函数芽 $f, g \in \varepsilon_n$ 是 \mathcal{R} -等价的当且仅当存在一个矩阵芽 $A[x] \in \varepsilon_n^{n \times n}$, 其中 $A[0]$ 非奇异, 使得 $f(A[x] \cdot x) = g(x)$.

设 $R = \{A \mid A : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow GL(\mathbf{R}, n) \text{ 是光滑映射芽}\}$, 及 $\mathcal{R} = \{A[x] \cdot x \mid A \in R\}$.

定义 2.1 设 $G \subset GL(n, \mathbf{R}^n)$ 是一线性 Lie 群.

$$R_G = \{A \in R \mid A[x] \in G, x \in (\mathbf{R}^n, 0)\},$$

以及 \mathcal{R} 的子群

$$\mathcal{R}_G = \{A[x] \cdot x \mid A \in R_G\}.$$

这里 R_G 是 R 的子群同时 \mathcal{R}_G 是微分同胚芽构成的 \mathcal{R} 的子群.

例 对于给定矩阵 $N \in \mathbf{R}^{n \times n}$,

$$G = \{X \in GL(\mathbf{R}, n) \mid X \cdot N \cdot X^T = N, x \in (\mathbf{R}^n, 0)\},$$

是 $GL(\mathbf{R}, n)$ 是一线性 Lie 群 (参见文 [11-12])

如果 $N = I_n, \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 那么 G 分别为实正交群, Lorentz 群和 R 自身. 特别地, 当 $n = 2m$ 且 $N = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$ 时, $G = Sp(2m, \mathbf{R})$ 为实辛群. 相应的 R_G 和 \mathcal{R}_G 分别记为相应的 R_N 和 \mathcal{R}_N

$G = SO(n) \subset GL(n, \mathbf{R}), G = SL(n, \mathbf{R}) \subset GL(n, \mathbf{R})$ 是一线性 Lie 群. 由主对角线上元素为 1 的上三角矩阵构成的线性 Lie 群 G . 可得相应的 R_G 和 \mathcal{R}_G .

又若记 ε_n^p 为所有光滑映射芽 $f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow \mathbf{R}^p$ 构成的环, $m_n \varepsilon_n^p$ 为所有光滑映射芽 $f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ 构成的理想. 对于 $f \in m_n \varepsilon_n^p$, 用 $V(f)$ 表示所有沿 f 的光滑向量场组成的 ε_n 模. 这个模通过它的自由基 $\frac{\partial}{\partial y_1} \circ f, \dots, \frac{\partial}{\partial y_p} \circ f$ 可以等同于 ε_n^p . 特别地, 如果 f 分别是 $(\mathbf{R}^n, 0), (\mathbf{R}^p, 0)$ 到自身的恒同映射芽, 此时的 $V(f)$ 分别就是秩为 n 的自由 ε_n 模 $V(\mathbf{R}^n)$, 秩为 p 的自由 ε_p 模 $V(\mathbf{R}^p)$. 定义 $tf : V(\mathbf{R}^n) \rightarrow V(f)$ 为 $tf(X)(x) = Df(x)(X(x)), X \in V(\mathbf{R}^n), x \in (\mathbf{R}^n, 0)$, 它是两个自由 ε_n 模之间的线性映射, 其中 Df 是 f 的 Jacobian 矩阵 (参见文 [14]).

定义 2.2 f 与 g 是 \mathcal{R}_G -等价的意指存在 $A[x] \cdot x \in \mathcal{R}_G$ 使得 $f(A[x] \cdot x) = g(x)$ (记为 $f \circ A = g$).

注 1 若记 $\mathcal{R}_G \cdot f$ 表示芽 f 在群 \mathcal{R}_G 作用下的轨道, 则芽 f 与 g 是 \mathcal{R}_G -等价的当且仅当 f 与 g 是属于同一个 \mathcal{R}_G -轨道.

定义 2.3 设 $f \in m_n \varepsilon_n^p$, f 是无限 \mathcal{R}_G - 决定的, 意指对任意的芽 $g \in m_n \varepsilon_n^p$ 满足 $j^\infty f(0) = j^\infty g(0)$, 都有 f 与 g 是 \mathcal{R}_G - 等价的. 即对于 $f \in \varepsilon_n$, f 是 \mathcal{R}_G - 无限决定的意指对于任意的 $u \in m^\infty$, 存在原点处的一个光滑微分同胚芽 ϕ 使得 $f + u = f \circ \phi$, 简记为

$$f + m^\infty \subset f \circ \mathcal{R}_G.$$

定义 2.4 $V_G(\mathbf{R}^n) = \{A \mid A : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow \mathbf{L}G\}$, 其中 $\mathbf{L}G$ 是 G 的切空间.
 $\mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n) = \{A[x] \cdot x \mid A[x] \in \mathbf{L}G, x \in (\mathbf{R}^n, 0)\}$

例 (参见文 [15]) $G = \{X \in GL(\mathbf{R}, n) \mid X \cdot N \cdot X^T = N\}$, 的切空间 $\mathbf{L}G = \{A \mid A \in M_n(\mathbf{R}), A \cdot N + N \cdot A^T = 0\}$, $V_G(\mathbf{R}^n) = \{A[x] \cdot x \mid A[x] \in \varepsilon_n^{n \times n}, A[x] \cdot N + N \cdot (A[x])^T = 0\}$. $SO(n) \subset GL(n, \mathbf{R})$ 的切空间为 $\mathcal{SO}(n) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid X^t = -X\}$, $V_{SO(n)}(\mathbf{R}^n) = \{A \mid A[x] \in \mathcal{SO}(n), x \in (\mathbf{R}^n, 0)\}$ $SL(n, \mathbf{R}) \subset GL(n, \mathbf{R})$ 的切空间为 $\mathcal{SL}(n, \mathbf{R}) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \text{trace} X = 0\}$, $V_{SL(n, \mathbf{R})}(\mathbf{R}^n) = \{A \mid A[x] \in \mathcal{SL}(n, \mathbf{R}), x \in (\mathbf{R}^n, 0)\}$ 由主对角线上元素为 1 的上三角矩阵构成的线性 Lie 群 G , 它的切空间为严格上三角矩阵构成 Lie 代数 $\mathbf{L}G$, 也有相应 $V_G(\mathbf{R}^n)$.

注 2 对线性 Lie 群 $G, \mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n)$ 不一定是 \mathcal{E}_n - 模.

引理 2.1 (Nakayama 引理)(参见文 [14]) 设 A 是一个具有单位元 (记为 1) 的交换环, I 为 A 中的理想且具有下列性质: 对每一 $\alpha \in I, 1 + \alpha$ 是 A 中的可逆元, 假设 M 是有限生成的 A - 模, N 为 M 的 A - 子模. 若 $N + I \cdot M = M$, 则 $N = M$.

现考虑轨道 $\mathcal{R}_G \cdot f$ 的切空间.

设 $f \in m_n \varepsilon_n^p$, 记 $\mathcal{R}_G \cdot f := \{\phi \cdot f \mid \text{对任意的 } \phi \in \mathcal{R}_G\}$ 为 f 在 \mathcal{R}_G 作用下的轨道.

若现取 ε_{n+1}^p 中的光滑映射芽 γ , 设 $\gamma_t(x) = \gamma(x, t)$, 当 t 足够小时, $\gamma_t \in \varepsilon_n^p$. 假设 $\gamma_0 = f$ 和 $\gamma_t \in \mathcal{R}_G \cdot f$, 则对每个 t , 存在 $\psi_t \in \mathcal{R}_G$ 使得 $\gamma_t = \psi_t \circ f$, 但这不能确保我们所选取的 ψ_t 使得 $\psi : (x, t) \rightarrow \psi(x, t) = \psi_t(x)$ 是 $(\mathbf{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ 的一个光滑映射芽.

因此, 为了研究轨道 $\mathcal{R}_G \cdot f$ 的切空间, 应先考虑导网空间中的轨道 $\mathcal{R}_G^k \cdot j^k f$ 的切空间.

引理 2.2 记 $R_G^k = \{j^k \phi \mid \phi \in R_G\}$, $V_G^k(\mathbf{R}^n) = \{j^k \varphi \mid \varphi \in V_G(\mathbf{R}^n)\} (k \geq 1)$, $T_e R_G^k$ 表示单位元 e 处的切空间, 则有

$$T_e R_G^k = V_G^k(\mathbf{R}^n) = V_G(\mathbf{R}^n)/m_n^{k+1}.$$

证 因为 R^k 是 Lie 群, R_G^k 是 R^k 的闭子群, 所以由 Lie 群的闭普通子群必是 Lie 子群得, R_G^k 是 Lie 子群. 因此 R_G^k 的李代数为 R_G^k 在单位元 e 处的切空间 $T_e R_G^k$, 且可证明

$$T_e R_G^k = V_G^k(\mathbf{R}^n) = V_G(\mathbf{R}^n)/m_n^{k+1}.$$

事实上, 取一可微曲线 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow R_G^k$, 满足 $\alpha(0) = I_n$, 则 $\alpha(t) = A(t)$, 并且 $\frac{d\alpha(t)}{dt} \Big|_{t=0} \in T_e R_G^k$, 其中 $A(t) \in R_G^k$, 即存在 $\check{A}(t) \in R_G$ 满足: 当 $x \in (\mathbf{R}^n, 0)$ 时, $\check{A}(t)[x] \in G, j^k \check{A}(t)[x] = A(t)[x]$

对 $\check{A}(t)$ 关于 t 求导, 且由 $\frac{d\check{A}(t)}{dt} \Big|_{t=0}[x] \in \mathbf{L}G$, 且

$$j^k \left(\frac{d\check{A}(t)[x]}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d(j^k \check{A}(t)[x])}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d\alpha(t)[x]}{dt} \Big|_{t=0},$$

故 $T_e R_N^k \subset V_N^k(\mathbf{R}^n)$.

另一方面, 若 $A \in V_G^k(\mathbf{R}^n)$, 则存在 $\check{A} \in V_G(\mathbf{R}^n)$ 使得 $\check{A}[x] \in \mathbf{LG}$ 和 $j^k \check{A} = A$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 我们考虑曲线 $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow R_G$, $\alpha(t) = \exp(t\check{A})$ 和 $\exp(t\check{A})[x] = \exp(t\check{A}[x])$, 由 Lie 群与其切空间构成的 Lie 代数之间的指数映射保证了 Lie 群 G 的 Lie 代数 \mathbf{LG} 内一定存在一个包含 0 的开凸集 W , 使得 \exp 是 W 到 G 内开核 U 上的一个微分同胚.(参见文献 [16] 第三章定理 5) 以致 $e^{t\check{A}[x]} \in G$

从 $j^k \alpha(t) \in R_G^k$, 且 $\frac{d(j^k \alpha(t))}{dt} = j^k(\frac{d(\alpha(t))}{dt})$. 故 $T_e R_G^k \supset V_G^k(\mathbf{R}^n)$. 由此 $T_e R_G^k = V_G^k(\mathbf{R}^n)$.

注 3 进一步类似上面可证明 $T_e \mathcal{R}_G^k = \mathcal{V}_G^k(\mathbf{R}^n)$.

引理 2.3 (参见文 [17]) 设 G 是代数作用在一个光滑代数簇 M 上的代数群, 则对应的轨道是 M 中的光滑拟代数子集.

命题 2.1 设 $f \in m_n \varepsilon_n^p$, 对任意的整数 $k (k \geq 1)$, 若记 $\mathcal{R}_G^k := \{j^k \phi \mid \phi \in \mathcal{R}_G\}$, $J^k(n, p) := \{j^k f \mid f \in \varepsilon_n^p\}$, 则轨道 $\mathcal{R}_G^k \cdot j^k f$ 在 $j^k f$ 处的切空间满足

$$T_{j^k f} \mathcal{R}_G^k \cdot j^k f = tf(\mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n))/m_n^{k+1}.$$

证 因为 \mathcal{R}_G^k 是 Lie 群, 所以 \mathcal{R}_G^k 在 $J^k(n, p)$ 上的作用是代数作用. 当 $j^k f \in J^k(n, p)$ 时, 若 $\mathcal{R}_G^k \cdot j^k f$ 表示 $j^k f$ 在 \mathcal{R}_G^k 作用下的轨道, 则由引理 2.3 知 $\mathcal{R}_G^k \cdot j^k f$ 是 $J^k(n, p)$ 中的光滑子流形. 因此轨道 $\mathcal{R}_G^k \cdot j^k f$ 在 $j^k f$ 处有切空间.

已知 \mathcal{R}_G^k 的李代数 $T_e \mathcal{R}_G^k = \mathcal{V}_G^k(\mathbf{R}^n) = \{j^k(A[x]) \cdot x \mid A[x] \in \mathbf{LG}, x \in (\mathbf{R}^n, 0)\}$. 现设 $\exp: T_e \mathcal{R}_G^k \rightarrow \mathcal{R}_G^k$ 表示指数映射, 则

$$\begin{aligned} T_{j^k f} \mathcal{R}_G^k \cdot j^k f &= \left\{ \frac{d}{dt} j^k(f(\exp(tj^k(A[x] \cdot x)))) \Big|_{t=0} \mid A \in T_e R_G = V_G(\mathbf{R}^n) \right\}, \\ &= j^k \left(\frac{d}{dt} (f(\exp(t(A[x] \cdot x)))) \Big|_{t=0} \right). \end{aligned}$$

其中 $A[x] \cdot x \in \mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n)$, 由注 2 及指数映射的性质, 有 $\exp(t(A[x] \cdot x)) = g_t \in \mathcal{R}_G$, 从而

$$\begin{aligned} j^k \left(\frac{d}{dt} (f(\exp(t(A[x] \cdot x)))) \Big|_{t=0} \right) &= j^k \left(\frac{d}{dt} (f \circ g_t)(x) \Big|_{t=0} \right) \\ &= j^k(Df(x)(A[x] \cdot x)) \in tf(\mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n))/m_n^{k+1}. \end{aligned}$$

定义 2.5 设 $f \in m_n \varepsilon_n^p$, 轨道 $\mathcal{R}_G \cdot f$ 在 f 处的切空间 $T\mathcal{R}_G f$ 定义如下:

$$T\mathcal{R}_G f = tf(\mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n)).$$

由命题 2.1 知, 这个定义是合理的.

3 主要结果及证明

此部分将给出光滑映射芽的 \mathcal{R}_G -无限决定的充要条件.

定义 3.1 设 $f \in m_n \varepsilon_n^p$, f 是无限 \mathcal{R}_G -决定的, 意指对任意的芽 $g \in m_n \varepsilon_n^p$ 满足 $j^\infty f(0) = j^\infty g(0)$, 都有 f 与 g 是 \mathcal{R}_G -等价的.

定理 3.1 设 $f \in m_n \varepsilon_n^p$ 及 $tf\mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n)$ 是 ε_n -有限生成的, 则 f 是无限 \mathcal{R}_G -决定的当且仅当

$$m_n^\infty \varepsilon_n^p \subset T\mathcal{R}_G f. \quad (*)$$

证 假设 f 是无限 \mathcal{R}_G - 决定的. 任取 $u \in m_n^\infty \varepsilon_n^p$. 定义

$$F(t, x) = f(x) + tu(x), \quad t \in \mathbf{R}$$

且 $F_t(x) := F(t, x)$. 由假设条件, $F_t(x) \in \mathcal{R}_G \cdot f$. 又 $F_0(x) = f(x)$, 因此 $\frac{dF}{dt}|_{t=0} = u(x) \in T\mathcal{R}_G f$. 所以

$$m_n^\infty \varepsilon_n^p \subset T\mathcal{R}_G f.$$

反之, 对任意给定 $t_0 \in [0, 1]$, 设 $g \in m_n \varepsilon_n^p$ 满足 $j^\infty f(0) = j^\infty g(0)$, 定义

$$F : (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n, t_0 \times 0) \rightarrow \mathbf{R}^p$$

为 $F(t, x) = f(x) + t(g(x) - f(x))$, $F_t(x) := F(t, x)$.

欲证 g 是 \mathcal{R}_G - 等价于 f 的. 只需证明对于充分接近 t_0 的 t , $F_t(x)$ 是 \mathcal{R}_G - 等价于 $F_{t_0}(x)$.

因为 $F_{t_0}(x) - f(x) = t_0(g(x) - f(x))$ 且 $g - f \in m_n^\infty \varepsilon_{n+1}^p$, 得

$$T\mathcal{R}_G F_{t_0} \subset T\mathcal{R}_G f,$$

再利用 (*), 得

$$T\mathcal{R}_G f \subset T\mathcal{R}_G F_{t_0} + m_n(T\mathcal{R}_G f),$$

根据 Nakayama 引理, 对于任意的 t_0 , 都有

$$T\mathcal{R}_G F_{t_0} = T\mathcal{R}_G f.$$

又 $\frac{\partial F_t}{\partial t} = g(x) - f(x) \in m_n^\infty \varepsilon_n^p \subset T\mathcal{R}_G f = T\mathcal{R}_G F_t = tF_t(\mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n))$, 由此可知, 存在 $\xi \in \mathcal{V}_G(\mathbf{R}^n)$ 使得

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} = tF_t(\xi), \Rightarrow \frac{\partial F_t(x)}{\partial t} - DF_t(x)(\xi(x)) = 0, \quad (* *)$$

其中 $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = A[x] \cdot x, A[x] \in \mathbf{LG}, x \in (\mathbf{R}^n, 0)$.

记 \tilde{A} 是 $-\xi$ 的具有初始条件 $\tilde{A}_{t_0}(x) = x$ 的积分, 那么由流的性质有 $\frac{\partial \tilde{A}_t}{\partial t} \circ \tilde{A}_t^{-1}(x) = A[x] \cdot x$. 从而有 $\frac{\partial \tilde{A}_t(x)}{\partial t} = A[\tilde{A}_t(x)] \cdot \tilde{A}_t(x)$.

由于 $A[x] \in \varepsilon_n^{n \times n}$, 所以该微分方程存在唯一解 $h_t(x)$. 因此 $\frac{\partial \tilde{A}_t(x)}{\partial t} = A[h_t(x)] \cdot \tilde{A}_t(x)$. 利用乘积积分的知识 (参见文 [1] 定理 2.1), 得到 $h_t(x)$ 的另一表达形式

$$\tilde{A}_t(x) = \prod_{t_0}^t e^{A[h_s(x)]ds} \cdot \tilde{A}_{t_0}(x) = \prod_{t_0}^t e^{A[h_s(x)]ds} \cdot x = \lim_{\mu \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k} \cdot x,$$

这里 μ 是区间 $[t_0, t]$ 划分 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ 中子区间长度的最大值, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. 因此 \tilde{A}_t 可以用矩阵形式表示为 $\tilde{A}_t(x) = \tilde{A}_t[x] \cdot x, \tilde{A}_t[x] = \prod_{t_0}^t e^{A[h_s(x)]ds}$. 因为

$$A[h_s(x)] \in \mathbf{LG},$$

由 Lie 群与其切空间构成的 Lie 代数之间的指数映射保证了 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathbf{L}(G)$ 内一定存在一个包含 0 的开凸集 W , 使得 \exp 是 W 到 G 内开核 U 上的一个微分同胚.(参见文 [15] 第三章定理 5) 以致 $e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k} \in G$, 再由 Lie 群定义与性质知

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \prod_{k=1}^n e^{A[h_{t_k}(x)]\Delta t_k} = \prod_{t_0}^t e^{A[h_s(x)]ds} \in G,$$

即 $\tilde{A}_t[x] \in G$. 且 $(\tilde{A}_t[x])^{-1} \in G$. 故 $\tilde{A}_t \in \mathcal{R}_G$.

又由

$$\frac{\partial F_t \circ \tilde{A}_t}{\partial t} = \frac{\partial F_t}{\partial t} \circ \tilde{A}_t + tF_t \circ \frac{\partial \tilde{A}_t}{\partial t} = \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} + tF_t \circ \frac{\partial \tilde{A}_t}{\partial t} \circ \tilde{A}_t^{-1} \right) \circ \tilde{A}_t = \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} - tF_t(\xi) \right) \circ \tilde{A}_t = 0,$$

则这蕴含 $\frac{d(F_t \circ \tilde{A}_t)}{dt} = 0$. 从而当 t 充分接近 t_0 时, 有 $F_t \circ \tilde{A}_t = F_{t_0}$.

因为 $[0, 1]$ 是紧集, 所以 $[0, 1]$ 的任意开覆盖必有有限子覆盖. 而对于有限子覆盖的每一个开集来说, 均有 $F_t \circ \tilde{A}_t = F_{t_0}$. 因此该等式可由充分小的 t_0 邻域延拓到 $[0, 1]$ 区间, 从而有 $F_1 \circ \tilde{A}_1 = F_0$, 即 $g \circ \tilde{A}_1 = f$, 这就证明了 g 是 \mathcal{R}_G - 等价于 f 的.

推论 3.1 当取 $G = SO(n)$, $G = SL(n, \mathbf{R})$ 和 $G = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X \cdot N \cdot X^T = N\}$, 其中 N 是一给定矩阵时, 则 f 是无限 \mathcal{R}_G - 决定的当且仅当

$$m_n^\infty \varepsilon_n^p \subset TR_G f. \quad (*)$$

证 当取 $G = SO(n)$ 时, $G = SO(n)$ 的切空间为 $\mathcal{SO}(n) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X^T = -X\}$, 因为 $V_{SO(n)}(\mathbf{R}^n) = \{A | A[x] \in \mathcal{SO}(n)\}$, 故 $tf(\mathcal{V}_{SO(n)}(\mathbf{R}^n)) = \{Df \cdot A[x] \cdot x | A[x]^T = -A[x], x \in (\mathbf{R}^n, 0)\}$ 设

$$A[x] = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}(x) & a_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ -a_{12}(x) & 0 & a_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{1n}(x) & -a_{2n}(x) & -a_{3n}(x) & \cdots & 0. \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{aligned} Df \cdot A[x] \cdot x &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \bullet \\ &\begin{bmatrix} a_{12}(x)x_2 + a_{13}(x)x_3 + \cdots + a_{1n}(x)x_n \\ -a_{12}(x)x_1 + a_{23}(x)x_3 + \cdots + a_{2n}(x)x_n \\ \vdots \\ -a_{1n}(x)x_1 - a_{2n}(x)x_2 - \cdots - a_{n-1n}(x)x_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= a_{12}(x)(x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}) + a_{13}(x)(x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}) + \cdots + a_{n-1n}(x)(x_n \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} - x_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_n}). \end{aligned}$$

所以 $tf(\mathcal{V}_{SO(n)}(\mathbf{R}^n))$ 是由 $\{(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i})\}_{1 \leq i < j \leq n}$ 生成的有限生成的 \mathcal{E}_n - 模. 满足定理 4.1 条件.

而对于 $G = SL(n, \mathbf{R}) \subset GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$ 的切空间为

$$\mathcal{SL}(n, \mathbf{R}) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid \text{trace} X = 0\}, V_{SL(n, \mathbf{R})}(\mathbf{R}^n) = \{A \mid A[x] \in \mathcal{SL}(n, \mathbf{R})\}.$$

故 $tf(\mathcal{SL}(n, \mathbf{R})) = \{Df \cdot A[x] \cdot x \mid \text{trace} A[x] = 0, x \in (\mathbf{R}^n, 0)\}$ 设

$A[x] = (a_{ij}(x))$ 且 $a_{nn}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}(x)$, 则

$$\begin{aligned} Df \cdot A[x] \cdot x &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right] \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} a_{11}(x)x_1 + a_{12}(x)x_2 + a_{13}(x)x_3 + \cdots + a_{1n}(x)x_n \\ a_{21}(x)x_1 + a_{22}(x)x_2 + a_{23}(x)x_3 + \cdots + a_{2n}(x)x_n \\ \vdots \\ -a_{n1}(x)x_1 + a_{n2}(x)x_2 + \cdots + a_{nn}(x)x_n \end{bmatrix} \\ &= a_{11}((x)_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}) + a_{n-1n-1}((x)_{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} - x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}) + \\ &\quad + \cdots + \sum_{i=2^n} a_{1i}(x)_i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \sum_{i=2^n} a_{ni}(x)x_i \frac{\partial f}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

所以 $tf(V_{SL(n)}(\mathbf{R}^n))$ 是由 $\{(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j})_{2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ 和 $((x)_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_n \frac{\partial f}{\partial x_n})_{1 \leq i \leq n-1}$ 生成的有限生成的 \mathcal{E}_n -模. 满足定理 4.1 条件.

如果又取 $G = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid X \cdot N \cdot X^T = N\}$ 时, 其切空间为 $\mathbf{LG} = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \mid X \cdot N + \cdot X^T = O\}$, 同时 $V_G(\mathbf{R}^n) = \{A \mid A[x] \in \mathcal{G} \text{ 及 } tf(\mathcal{G}) = \{Df \cdot A[x] \cdot x \mid A[x] \cdot N + \cdot A[x]^T = O, x \in (\mathbf{R}^n, 0)\}$. 使用上面类似方法可证 $tf(V_G(\mathbf{R}^n))$ 是有限生成的 \mathcal{E}_n -模, 满足定理 4.1 条件. 则有文 [4] 的定理 4.1.

参 考 文 献

- [1] Wilson L C. Infinitely determined map-germs[J]. Can. J. Math., 1981, 33(3): 671–684.
- [2] Wilson L C. Map-germs infinitely determined with respect to right-left equivalence[J]. Pacific J. Math., 1982, 102(1): 235–245.
- [3] Changmei Shi, Donghe Pei. Relative infinite determinacy for map-germs [J]. J. of Function Space and Applications, 2013.
- [4] 苏丹, 刘恒兴. 光滑映射芽的 \mathcal{R}_N -轨道切空间及 \mathcal{R}_N -无限决定性 [J]. 数学杂志, 2017, 37(3): 467–473.
- [5] Mather J N. Stability of C^∞ mappings iii: Finitely determined map-germ[J]. Publ. Math. IHES., 1969, 35: 127–156.
- [6] Broderesen H. On finite and infinite $C^k - A$ -determinacy [J]. Proceed. London Math. Soc., 1997, 75(2): 369–435.
- [7] Zhang Guobin, Liu Hengxing. The infinite determinacy of function germs with parameters[J]. J. Math., 2005(3): 275–277.
- [8] Sun B H, Wilson L C. Determinacy of smooth germs with real isolated line singularities[J]. Proceed. Amer. Math. Soc., 2001, 129(9): 2789–2797.

- [9] Thilliez V. Infinite determinacy on a closed set for smooth germs with non-isolated singularities[J]. *Proceed. Amer. Math. Soc.*, 2006, 134(5): 1527–1536.
- [10] 熊剑飞. 关于映射芽在 \mathcal{A} 和 \mathcal{K} 的一些子群下的有限决定性 [J]. *数学研究与评论*, 1999, 19(2): 437–444.
- [11] Liu Hengxing. Finite indeterminacy of homogeneous polynomial germs under some subgroups \mathcal{R}_{I_r} of $\mathcal{R}[J]$. *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.*, 2005, 10(5): 803–807.
- [12] John D D, Charles N F. *Product integration with application to differential equation*[M]. Boston: Addison Wesley Publ. Comp., 1979.
- [13] 李养成. *光滑映射的奇点理论* [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [14] Baker A. *Matrix group: an introduction to Lie group theory*[M]. Springer Undergraduate Mathematics Series ISSN 1615-2085, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg.
- [15] 黄宣国. *李群基础* [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2007.
- [16] Dimca A. *Topics on real and complex singularities*[M]. Braunschweig, Wiesbaden: Friedr. Vieweg Sohn, Adv. Lect. Math. Vieweg, 1987.

THE \mathcal{R}_G -INFINITE DETERMINACY FOR SMOOTH FUNCTION-GERMS

LIU Su-hui¹, LIU Heng-xing²

(1. *Department of Mathematics and Big Data, School of Artificial Intelligence, Jiangnan University
Wuhan 430056, China*)

(2. *School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

Abstract: In this paper, the \mathcal{R}_G -infinite determinacy of smooth function-germs is being discussed, where G represents linear Lie groups and the \mathcal{R}_G represents some subgroups of right equivalent group \mathcal{R} for smooth function-germs. By techniques of the product integral theory, the necessary and sufficient condition for the \mathcal{R}_G -infinite determinacy of smooth function-germs is obtained. Some results of [1–4] are generalized.

Keywords: smooth function-germs; subgroups \mathcal{R}_G ; \mathcal{R}_G equivalence; infinite determinacy; tangent space

2010 MR Subject Classification: 58K40