

## 具有周期边值条件的 Caputo 型分数阶模糊时滞微分方程解的 Ulam-Hyers 稳定性

李 榕, 叶国菊, 刘 尉  
(河海大学数学学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 本文主要在粒度可微性下研究了一类带有周期边值条件的 Caputo 型分数阶模糊时滞微分方程. 通过 Banach 压缩映射原理, 我们证明了该方程解的存在唯一性, 进一步借助 Gronwall 不等式证明了解的 Ulam-Hyers 稳定性.

**关键词:** 分数阶模糊微分方程; 时滞; Ulam-Hyers 稳定性; 周期边值问题; 粒度可微性  
**MR(2010) 主题分类号:** 26A33; 03E72 **中图分类号:** O175.8  
**文献标识码:** A **文章编号:** 0255-7797(2025)05-0435-10

### 1 引言

1965 年 Zadeh [1] 首次提出模糊集定义后, 模糊微分方程 [2, 3] 得到广泛研究和应用. 近年来, 分数阶模糊微分方程 [4, 5] 由于其在模拟现实问题方面的优势而备受关注. 分数阶模糊微分方程具有分数阶导数的非局部性和记忆性的优点, 能更精确地描述系统的特性, 同时体现动态系统中的不确定性和模糊性, 描述问题更加贴切. 基于整数阶模糊导数定义 [6, 7], 分数阶模糊导数陆续被提出并且被加以应用, 如 Caputo 型 Hukuhara 模糊分数阶导数 [8]、Caputo 型广义 Hukuhara 模糊分数阶导数 [9]、Caputo 型强广义 Hukuhara 模糊分数阶导数 [10] 等等. 然而, 值得注意的是在使用上述导数时存在一些局限: (1) 模糊数之间的 Hukuhara 差和广义 Hukuhara 差并不总是存在, 这导致以上所提的导数并不总是存在; (2) 解的支撑集必须满足单调递增; (3) 建模中非自然行为的出现, 即以下四组方程的解不同:

$$\begin{cases} D^\nu u(t) = Au(t) + B, \\ u(0) = \lambda u(T), \end{cases} \quad \begin{cases} D^\nu u(t) - Au(t) = B, \\ u(0) = \lambda u(T), \end{cases}$$
$$\begin{cases} D^\nu u(t) - B = Au(t), \\ u(0) = \lambda u(T), \end{cases} \quad \begin{cases} D^\nu u(t) - Au(t) - B = 0, \\ u(0) = \lambda u(T), \end{cases}$$

其中,  $D^\nu$  代表上述 Caputo 型分数阶导数之一. 为弥补这些局限性, Mazandarani 等 [11] 在 2018 年首次提出粒度差的概念. 两个模糊数之间粒度差总是存在保证粒度导数的存在性.

\*收稿日期: 2025-01-09 接收日期: 2025-04-21  
基金项目: 江苏省研究生科研与实践创新计划项目 (KYCX23\_0668).  
作者简介: 李榕 (2001-), 女, 安徽六安, 研究生, 主要研究方向为模糊数学.

E-mail: lirong11280204@163.com.

通讯作者: 叶国菊 (1965-), 女, 教授, 主要研究方向: 泛函分析及广义微分方程、数学与交叉学科.

E-mail: Ygjhu@163.com.

通过使用粒度差, 解支撑集的单调性不再是必须条件, 也有效避免了建模中非自然行为的出现.

由于系统零件老化、信号传输延迟、化学反应缓慢等等因素, 时滞自然地出现在实际情况中. 用于描述未知变量的导数依赖于过去时刻函数值的微分方程被称作时滞微分方程, 时滞微分方程的使用范围非常广泛, 主要包括控制系统、种群模型、生态学以及其他多个科学和工程领域. Wang<sup>[12]</sup> 等人通过 Banach 不动点原理证明了一类分数阶模糊时滞微分方程初值问题解的存在唯一性和 Ulam-Hyers 稳定性; Yan<sup>[13]</sup> 等人通过逐次逼近法结合 Gronwall 不等式研究了一类 Caputo 分数阶模糊时滞微分系统解的存在唯一性和有限时间稳定性.

但到目前为止, 对分数阶模糊时滞微分方程周期边值问题的研究还很少, 本文在粒度可微性下考虑以下一类带有周期边值条件的分数阶模糊时滞微分方程, 主要研究其解的存在唯一性和 Ulam-Hyers 稳定性,

$$\begin{cases} {}^{gr}D_{a^+}^\nu u(t) = f(t, u(t-\ell)), & t \in [0, T], \\ u(t) = \varphi(t), & t \in [-\ell, 0], \\ u(0) = \lambda u(T), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中,  ${}^{gr}D_{a^+}^\nu$  ( $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$ ) 代表  $\nu$  阶粒度 Caputo 分数阶导数.  $f: [0, T] \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  和  $\varphi: [-\ell, 0] \rightarrow \mathbb{E}$  是连续模糊函数,  $0 < \ell < T$  是时滞,  $u(0) = \lambda u(T)$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) 是周期边值条件.

## 2 预备知识

$\forall r \in (0, 1]$ , 称  $[u]^r = \{t \in \mathbb{R} | u(t) \geq r\} := [\underline{u}^r, \bar{u}^r]$  是模糊集  $u$  的  $r$ -水平截集,  $[u]^r$  的直径记为  $d([u]^r) = \bar{u}^r - \underline{u}^r$ .

若模糊集  $u$  满足以下四条:

- (i)  $u$  是正规的, 即  $\exists t_0 \in \mathbb{R}$  使得  $u(t_0) = 1$ ;
- (ii)  $u$  是模糊凸的, 即  $\forall x, y \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1$  有  $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ ;
- (iii)  $u$  是上半连续的;
- (iv)  $[u]^0$  是紧的.

则称  $u$  是一个模糊数, 全体一维模糊数的集合记作  $\mathbb{E}$ .

**定义 2.1** <sup>[11]</sup> 设  $u: [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . “ $gr$ ”代表粒度信息,  $r \in [0, 1]$  是隶属度,  $\lambda_u$  是相对距离测度变量, 记  $u$  的水平隶属度函数为

$$u^{gr}(r, \lambda_u) = \bar{u}^r + (\bar{u}^r - \underline{u}^r)\lambda_u, \quad (2.1)$$

为了方便起见, 将  $u^{gr}(r, \lambda_u)$  简记为  $\mathcal{H}(u)$ . 设  $u, v \in \mathbb{E}$ , 则  $u, v$  之间的距离为

$$D_{gr}(u, v) = \sup_r \max_{\lambda_u, \lambda_v} |u^{gr}(r, \lambda_u) - v^{gr}(r, \lambda_v)|, \quad (2.2)$$

其中  $D_{gr}$  表示粒度距离, 粒度度量空间  $(\mathbb{E}, D_{gr})$  具有完备性.

**注 1**  $u$  的  $r$ -水平截集可由下式计算得到:

$$[u]^r = \mathcal{H}^{-1}(u^{gr}(r, \lambda_u)) = \left[ \inf_{\beta \geq r} \min_{\lambda_u} u^{gr}(\beta, \lambda_u), \sup_{\beta \geq r} \max_{\lambda_u} u^{gr}(\beta, \lambda_u) \right]. \quad (2.3)$$

**定义 2.2** <sup>[15]</sup> 设  $u, v \in \mathbb{E}$ , 水平隶属度函数分别为  $\mathcal{H}(u), \mathcal{H}(v)$ . 基本的运算法则如下:

- (i)  $\mathcal{H}(u + v) = \mathcal{H}(u) + \mathcal{H}(v)$ ;
- (ii)  $\mathcal{H}(u -_{gr} v) = \mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(v)$ ;
- (iii)  $\mathcal{H}(u \times_{gr} v) = \mathcal{H}(u) \times \mathcal{H}(v)$ ;
- (iv)  $\mathcal{H}(u \div_{gr} v) = \mathcal{H}(u) \div \mathcal{H}(v), \mathcal{H}(v) \neq 0$ .

**注 2**  $\forall u, v \in \mathbb{E}, c \in \mathbb{R}$ , 有 (i)  $\mathcal{H}(u + v) = \mathcal{H}(u) + \mathcal{H}(v)$ , (ii)  $\mathcal{H}(cu) = c\mathcal{H}(u)$ , 故  $\mathcal{H}$  是线性映射.

**引理 2.3** <sup>[16]</sup> 设  $u, v, e \in \mathbb{E}$ , 则以下等式成立:

- (i)  $D_{gr}(u + z, v + z) = D_{gr}(u, v)$ ;
- (ii)  $D_{gr}(u -_{gr} v, \hat{0}) = D_{gr}(u, v)$ ;
- (iii)  $D_{gr}(\eta u, \eta v) = |\eta| D_{gr}(u, v), \eta \in \mathbb{R}$ .

**引理 2.4** <sup>[16]</sup> 设  $u_i, v_i \in \mathbb{E}, i = 1, 2, \dots, p$ , 有以下不等式成立:

$$D_{gr}^2(\oplus_i u_i, \oplus_i v_i) := D_{gr}^2(u_1 + u_2 + \dots + u_p, v_1 + v_2 + \dots + v_p) \leq p \sum_{i=1}^p D_{gr}^2(u_i, v_i), \quad (2.4)$$

其中,  $\oplus$  代表模糊意义下的和运算符号.

**定义 2.5** <sup>[16]</sup> 设  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}$  是一个模糊值函数,  $f(t)$  的水平隶属度函数为  $\mathcal{H}(f(t)) = f(t; \mathcal{H}(u))$ .

如果存在  $\frac{d^{gr} f(q_0)}{dq} \in \mathbb{E}$  使得极限  $\frac{d^{gr} f(q_0)}{dq} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{f(q_0 + \Delta q) -_{gr} f(q_0)}{\Delta q}$ . 当  $\Delta q \rightarrow 0$  时成立, 则称模糊值函数  $f$  在  $q_0 \in (a, b)$  处是粒度可导的. 记  $f'_{gr}(q_0) = \frac{d^{gr} f(q_0)}{dq}$  是  $f$  在  $q_0$  处的粒度导数. 如果导数  $f'_{gr}(q_0)$  对所有的  $q_0 \in (a, b)$  都存在, 那么称  $f$  在区间  $(a, b)$  上是粒度可导的. 记区间  $(a, b)$  上所有连续且粒度可导的模糊值函数  $f$  的集合为  $\mathbb{C}([a, b], \mathbb{E})$ , 定义度量  $\mathcal{M}$  为

$$\mathcal{M}(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} D_{gr}^2(f(t), g(t)), \forall f, g \in \mathbb{C}([a, b], \mathbb{E}), \quad (2.5)$$

度量空间  $(\mathbb{C}([a, b], \mathbb{E}), \mathcal{M})$  是完备的.

**定义 2.6** <sup>[17]</sup> 设  $f \in \mathbb{C}([a, b], \mathbb{E})$ .  $f$  的  $\nu$  阶 ( $\nu \in (0, 1)$ ) 粒度模糊分数阶积分定义为

$${}^{gr}I_{a+}^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \oint_a^b (t-s)^{\nu-1} f(s) ds, \quad (2.6)$$

其中,  $\Gamma(\cdot)$  代表 Gamma 函数.

**定义 2.7** <sup>[17]</sup> 设  $f \in \mathbb{C}([a, b], \mathbb{E})$ .  $f$  的  $\nu$  阶 ( $\nu \in (0, 1)$ ) 粒度 Caputo 分数阶导数定义为

$${}^{gr}D_{a+}^{\nu} f(t) := {}^{gr}I_{a+}^{1-\nu}(f'_{gr}(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \oint_a^b (t-s)^{-\nu} f'_{gr}(s) ds. \quad (2.7)$$

**注 3** 令  $D_{a+}^{\nu}$  表示经典意义下的分数阶 Caputo 导数.  ${}^{gr}D_{a+}^{\nu} f(t)$  的水平隶属度函数如下表示:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}({}^{gr}D_{a+}^{\nu} f(t)) &= \mathcal{H}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \oint_a^t (t-s)^{-\nu} f'_{gr}(s) ds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_a^t (t-s)^{-\nu} \mathcal{H}(f'_{gr}(s)) ds \\ &:= D_{a+}^{\nu} \mathcal{H}(f(t)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

**命题 2.8** <sup>[18]</sup> 设  $\nu \in (0, 1)$ ,  ${}^{gr}I_{a+}^{\nu}$ ,  ${}^{gr}D_{a+}^{\nu}$  都是经典意义下的运算符号, 有下式成立:

$$I_{a+}^{\nu} D_{a+}^{\nu} f(t) = f(t) - f(a). \quad (2.9)$$

**引理 2.9** <sup>[14]</sup> 设  $f, g$  粒度可积,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 那么下述结论成立.

- (i)  $D_{gr}(f, g)$  是可积的;  
 (ii)  $D_{gr}(\oint_a^b f(t)dt, \oint_a^b g(t)dt) \leq \int_a^b D_{gr}(f(t), g(t))dt.$

### 3 主要结论

本节考虑一类带有周期边值条件的 Caputo 分数阶模糊时滞微分方程 (1.1), 主要证明解的存在唯一性和 Ulam-Hyers 稳定性.

**命题 3.1** 设  $u(t) \in \mathbb{C}([-l, T], \mathbb{E})$ ,  $f: [0, T] \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  是连续函数, 那么  $u(t)$  是系统 (1.1) 的解当且仅当  $u(t)$  满足以下等式:

$$u(t) = \begin{cases} \oint_0^T H(t, s) f(s, u(s - \ell)) ds, & t \in [0, T], \\ \varphi(t), & t \in [-l, 0], \end{cases} \quad (3.1)$$

其中

$$H(t, s) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \begin{cases} \frac{\lambda}{1-\lambda}(T-s)^{\nu-1} + (t-s)^{\nu-1}, & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{\lambda}{1-\lambda}(T-s)^{\nu-1}, & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (3.2)$$

**证** 当  $t \in [0, T]$  时, 由注 3, 有  $\mathcal{H}({}^{gr}D_{a+}^{\nu} u(t)) = \mathcal{H}(f(t, u(t - \ell))) \Rightarrow D_{a+}^{\nu} \mathcal{H}(u(t)) = f(t, \mathcal{H}(u(t - \ell)))$ , 接着在等式两边同时作  $\nu$  阶 ( $\nu \in (\frac{1}{2}, 1)$ ) 的积分, 有

$$I_{a+}^{\nu} D_{a+}^{\nu} \mathcal{H}(u(t)) = I_{a+}^{\nu} f(t, \mathcal{H}(u(t - \ell))),$$

由命题 2.8 有

$$\mathcal{H}(u(t)) = \mathcal{H}(u(0)) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, \mathcal{H}(u(s - \ell))) ds,$$

由公式 (2.3) 可得

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \oint_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s - \ell)) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.3)$$

另外, 由于满足周期边值条件  $u(0) = \lambda u(T)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 方程 (3.3) 必须满足

$$u_0 = \lambda u(T) = \lambda(u_0 + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \oint_0^T (T-s)^{\nu-1} f(s, u(s - \ell)) ds), \quad (3.4)$$

由方程 (3.4) 解得

$$u_0 = \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \oint_0^T (T-s)^{\nu-1} f(s, u(s - \ell)) ds, \quad (3.5)$$

将方程 (3.5) 带入方程 (3.3) 中, 有

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \oint_0^T (T-s)^{\nu-1} f(s, u(s-\ell)) ds + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \oint_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s-\ell)) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left( \frac{\lambda}{1-\lambda} \oint_0^T (T-s)^{\nu-1} f(s, u(s-\ell)) ds + \oint_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s-\ell)) ds \right). \end{aligned}$$

定义函数  $H(t, s)$  为

$$H(t, s) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \begin{cases} \frac{\lambda}{1-\lambda} (T-s)^{\nu-1} + (t-s)^{\nu-1}, & 0 \leq s \leq t \leq T, \\ \frac{\lambda}{1-\lambda} (T-s)^{\nu-1}, & 0 \leq t \leq s \leq T. \end{cases} \quad (3.6)$$

当  $t \in [-\ell, 0]$  时, 显然有  $u(t) = \varphi(t)$ . 因此,  $u(t)$  满足等式 (3.1). 证毕.

**注 4** 当  $s$  递增时,  $(T-s)^{\nu-1}$  和  $(t-s)^{\nu-1}$  都递增, 因为  $t-s \leq T-s$ , 所以  $(T-s)^{\nu-1} \leq (t-s)^{\nu-1}$ , 故有

$$H^2(t, s) \leq \left[ \frac{1}{\Gamma(\nu)(1-\lambda)} (t-s)^{\nu-1} \right]^2,$$

通过计算, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^T H^2(t, s) ds &\leq \int_0^T \frac{1}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2} (t-s)^{2\nu-2} ds \\ &= \frac{1}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2} \int_0^T (t-s)^{2\nu-2} ds \\ &= -\frac{1}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2} \int_0^T (t-s)^{2\nu-2} d(t-s) \\ &= -\frac{1}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2 (2\nu-1)} \left[ (t-s)^{2\nu-1} \right]_0^T \\ &\leq \frac{1}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2 (2\nu-1)} \cdot T^{2\nu-1} := K. \end{aligned}$$

本文假设对  $\forall u, v \in \mathbb{E}, t \in [-\ell, T], f : [0, T] \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , 下列条件成立:

( $H_1$ )  $f$  是指数有界函数, 即存在正数  $M$  和  $b$  使得

$$D_{gr}^2(f(t, \hat{0}), \hat{0}) \leq M e^{bt}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.7)$$

( $H_2$ ) 模糊值函数  $f$  关于第二个变量满足 Lipschitz 条件, 即  $\exists L > 0$ , 使得

$$D_{gr}(f(t, u(t)), f(t, v(t))) \leq L D_{gr}(u(t), v(t)).$$

### 3.1 存在唯一性

**定义 3.2** 假设条件 ( $H_1$ ), ( $H_2$ ) 成立, 且满足  $\frac{T^{2\nu} L^2}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2 (2\nu-1)} \leq 1$ , 则周期边值问题 (1.1) 存在唯一解.

证 由命题 3.1 可知, 只需要考虑积分问题 (3.1), 定义算子  $\mathcal{A} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ , 具体如下

$$(\mathcal{A}u)(t) = \begin{cases} \int_0^T H(t, s)f(s, u(s-\ell))ds, & t \in [0, T], \\ \varphi(t), & t \in [-\ell, 0]. \end{cases}$$

设  $\mathbb{F}([-\ell, T], \mathbb{E})$  是所有  $u \in \mathbb{C}([-\ell, T], \mathbb{E})$  使得在  $[-\ell, T]$  上  $u(t) = \varphi(t)$ , 在  $[0, T]$  上存在  $\rho > 0$  使得  $\sup_{t \in [0, T]} D_{gr}^2(u(t), \hat{0}) < \rho e^{at}$  的集合.

分为以下两个步骤完成该定理的证明.

步骤 1. 算子  $\mathcal{A}$  映射到自身. 设  $u \in \mathbb{F}([-\ell, T], \mathbb{E})$ , 对任意的  $t \in [0, T]$ , 通过引理 2.9 中的条件 (ii) 结合 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned} D_{gr}^2((\mathcal{A}u)(t), \hat{0}) &= D_{gr}^2\left(\int_0^T H(t, s)f(s, u(s-\ell))ds, \hat{0}\right) \\ &\leq \left[\int_0^T H(t, s)D_{gr}(f(s, u(s-\ell)), \hat{0})ds\right]^2 \\ &\leq \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \int_0^T D_{gr}^2(f(s, u(s-\ell)), \hat{0})ds \\ &\leq \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \int_0^T D_{gr}^2(f(s, u(s-\ell)) + f(s, \hat{0}), f(s, \hat{0}) + \hat{0})ds, \end{aligned}$$

通过引理 2.4 以及条件  $(H_1), (H_2)$  有

$$\begin{aligned} D_{gr}^2((\mathcal{A}u)(t), \hat{0}) &\leq \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \left[2 \int_0^T D_{gr}^2(f(s, u(s-\ell)), f(s, \hat{0}))ds + 2 \int_0^T D_{gr}^2(f(s, \hat{0}), \hat{0})ds\right] \\ &\leq \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \left[2L^2 \int_0^T D_{gr}^2(u(s-\ell), \hat{0})ds + 2 \int_0^T Me^{bs}ds\right] \\ &= \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \left[2L^2 \int_{-\ell}^{T-\ell} D_{gr}^2(u(s), \hat{0})ds + 2\frac{M}{b}(e^{bT} - 1)\right], \end{aligned}$$

又由于  $u \in \mathbb{F}([-\ell, T], \mathbb{E})$ , 有  $D_{gr}^2(u(t), \hat{0}) \leq \rho e^{at}$ , 所以有

$$\begin{aligned} D_{gr}^2((\mathcal{A}u)(t), \hat{0}) &\leq \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \left[2L^2 \int_{-\ell}^{T-\ell} \rho e^{as}ds + 2\frac{M}{b}(e^{bT} - 1)\right] \\ &= \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \left[2L^2 \frac{\rho}{a}(e^{a(T-\ell)} - e^{a(-\ell)}) + 2\frac{M}{b}(e^{bT} - 1)\right] \\ &\leq K \cdot \left(2L^2 \frac{\rho}{a}e^{a(T-\ell)} + 2\frac{M}{b}e^{bT}\right), \end{aligned}$$

在不等式两边同时除以  $e^{at}$  并且取上确界, 有

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} D_{gr}^2((\mathcal{A}u)(t), \hat{0})e^{-at} &\leq \sup_{t \in [0, T]} \left(K \cdot e^{-at} \left(2L^2 \frac{\rho}{a}e^{a(T-\ell)} + 2\frac{M}{b}e^{bT}\right)\right) \\ &\leq 2KL^2 \frac{\rho}{a}e^{a(T-\ell)} + 2K \frac{M}{b}e^{bT} < \infty. \end{aligned} \quad (3.8)$$

因此, 可知  $\mathcal{A}u \in \mathbb{F}([-l, T], \mathbb{E})$ .

**步骤 2.**  $\mathcal{A}$  是一个压缩算子. 设  $u, v \in \mathbb{C}([-l, T], \mathbb{E}), t \in [0, T]$ , 有以下估计

$$\begin{aligned} D_{gr}^2((\mathcal{A}u)(t), (\mathcal{A}v)(t)) &= D_{gr}^2\left(\int_0^T H(t, s)f(s, u(s-l))ds, \int_0^T H(t, s)f(s, v(s-l))ds\right) \\ &\leq \left[\int_0^T H(t, s)D_{gr}(f(s, u(s-l)), f(s, v(s-l)))\right]^2 \\ &\leq \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot \int_0^T D_{gr}^2(f(s, u(s-l)), f(s, v(s-l)))ds \\ &\leq \int_0^T H^2(t, s)ds \cdot L^2 \cdot \int_0^T D_{gr}^2(u(s-l), v(s-l))ds, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int_0^T D_{gr}^2(u(s-l), v(s-l))ds &= \int_0^\ell D_{gr}^2(u(s-l), v(s-l))ds + \int_\ell^T D_{gr}^2(u(s-l), v(s-l))ds \\ &= \int_{-l}^0 D_{gr}^2(u(s), v(s))ds + \int_0^{T-\ell} D_{gr}^2(u(s), v(s))ds \\ &= \int_{-l}^0 D_{gr}^2(\varphi(s), \varphi(s))ds + \int_0^{T-\ell} D_{gr}^2(u(s), v(s))ds \\ &\leq \int_0^T D_{gr}^2(u(s), v(s))ds, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} D_{gr}^2((\mathcal{A}u)(t), (\mathcal{A}v)(t)) &\leq \frac{T^{2\nu-1}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot L^2 \cdot \int_0^T D_{gr}^2(u(s), v(s))ds \\ &\leq \frac{T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot L^2 \cdot \sup_{t \in [0, T]} D_{gr}^2(u(t), v(t)) \\ &= \frac{T^{2\nu}L^2}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot \mathcal{M}(u, v). \end{aligned}$$

所以,  $\mathcal{A}$  是压缩算子.

综合以上步骤, 由 Banach 压缩映像原理可知周期边值问题 (1.1) 存在唯一的不动点.

### 3.2 Ulam-Hyers 稳定性

设  $\varepsilon > 0, u \in \mathbb{C}([-l, T], \mathbb{E})$ , 假设

$$\begin{cases} D_{gr}^2(u(t), \int_0^T H(t, s)f(s, u(s-l))ds) \leq \varepsilon, & t \in [0, T], \\ u(t) = \varphi(t), & t \in [-l, 0]. \end{cases} \quad (3.9)$$

**定义 3.3** <sup>[19]</sup> 如果存在实数  $\delta > 0$ , 使得每一个满足 (3.9) 式的  $u$ , 都存在一个  $v \in \mathbb{C}([-l, T], \mathbb{E})$  满足

$$D_{gr}^2(u(t), v(t)) \leq \delta\varepsilon, \quad (3.10)$$

则称周期边值问题 (1.1) 的解是 Ulam-Hyers 稳定的.

**注 5** 如果  $u \in \mathbb{C}([-l, T], \mathbb{E})$ , 则存在  $g \in \mathbb{C}([-l, T], \mathbb{E})$  使得

$$(1) D_{gr}^2 \left( \int_0^T g(s) ds, \hat{0} \right) \leq \varepsilon,$$

$$(2) u(t) = \oint_0^T H(t, s) f(s, u(s-l)) ds + \oint_0^T H(t, s) g(s) ds.$$

**定理 3.4** 假设条件  $(H_2)$  成立, 则周期边值问题 (1.1) 的解是 Ulam-Hyers 稳定的.

**证** 设  $u, v \in \mathbb{C}([-l, T], \mathbb{E})$ , 由方程 (1.1) 和注 5 中的式 (2) 有以下推断:

$$\begin{aligned} & D_{gr}^2(u(t), v(t)) \\ &= D_{gr}^2 \left( \oint_0^T H(t, s) f(s, u(s-l)) ds + \oint_0^T H(t, s) g(s) ds, \oint_0^T H(t, s) f(s, v(s-l)) ds + \hat{0} \right) \\ &\leq 2D_{gr}^2 \left( \oint_0^T H(t, s) f(s, u(s-l)) ds, \oint_0^T H(t, s) f(s, v(s-l)) ds \right) + 2D_{gr}^2 \left( \oint_0^T H(t, s) g(s) ds, \hat{0} \right) \\ &\leq 2 \left( \int_0^T H(t, s) D_{gr}(f(s, u(s-l)), f(s, v(s-l))) ds \right)^2 + 2 \left( \int_0^T H(t, s) D_{gr}(g(s), \hat{0}) ds \right)^2 \\ &\leq 2 \int_0^T H^2(t, s) ds \cdot \int_0^T D_{gr}^2(f(s, u(s-l)), f(s, v(s-l))) ds + 2 \int_0^T H^2(t, s) ds \cdot \int_0^T D_{gr}^2(g(s), \hat{0}) ds \\ &\leq 2 \int_0^T H^2(t, s) ds \cdot L^2 \cdot \int_0^T D_{gr}^2(u(s-l), v(s-l)) ds + 2 \int_0^T H(t, s) ds \cdot \varepsilon T \\ &\leq \frac{2L^2 T^{2\nu-1}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot \int_{-l}^{T-l} D_{gr}^2(u(\vartheta), v(\vartheta)) d\vartheta + \frac{2T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot \varepsilon \\ &\leq \frac{2L^2 T^{2\nu-1}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot \left( \int_{-l}^0 D_{gr}^2(u(\vartheta), v(\vartheta)) d\vartheta + \int_0^{T-l} D_{gr}^2(u(\vartheta), v(\vartheta)) d\vartheta \right) \\ &\quad + \frac{2T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot \varepsilon \\ &\leq \frac{2L^2 T^{2\nu-1}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot \left( 0 + \int_0^T D_{gr}^2(u(\vartheta), v(\vartheta)) d\vartheta \right) + \frac{2T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式<sup>[20]</sup> 有

$$\begin{aligned} D_{gr}^2(u(t), v(t)) &\leq \frac{2T^{2\nu} \varepsilon}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \exp \left( \int_0^T \frac{2L^2 T^{2\nu-1}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} dt \right) \\ &= \frac{2T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \exp \left( \frac{2L^2 T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \right) \varepsilon := \delta \varepsilon, \end{aligned}$$

其中  $\delta = \frac{2T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \exp \left( \frac{2L^2 T^{2\nu}}{[\Gamma(\nu)(1-\lambda)]^2(2\nu-1)} \right)$ , 即有

$$D_{gr}^2(u(t), v(t)) \leq \delta \varepsilon.$$

故根据定义 3.3, 周期边值问题 (1.1) 的解是 Ulam-Hyers 稳定的.

#### 4 结论

本文在粒度可微意义下, 研究了一类带有周期边值条件的分数阶模糊时滞微分方程. 利用 Banach 压缩映像原理证明了周期边值问题 (1.1) 解的存在唯一性, 结合 Gronwall 不等式证明了问题 (1.1) 的解是 Ulam-Hyers 稳定的. 本文所用的方法基于粒度 Caputo 分数阶导数, 是对 Caputo 分数阶广义 Hukuhara 可微意义下证明方法的推广. 在后续的研究中, 可以考虑其他类型的周期边值问题和分数阶模糊微分系统解的相关性质.

### 参 考 文 献

- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[M]. New York: Wiley, 1965.
- [2] Van Hoa N, Van Tri P, Dao T T, Zelinka I. Some global existence results and stability theorem for fuzzy functional differential equations[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2015, 28(1): 393–409.
- [3] Nieto J J, Khastan A, Ivaz K. Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2009, 3(4): 700–707.
- [4] Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications[M]. Elsevier, 1998.
- [5] Kilbas A A, Srivastava H M, Trujillo J J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Elsevier, 2006.
- [6] Puri M L, Ralescu D A. Differentials of fuzzy functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983, 91(2): 552–558.
- [7] Stefanini L. A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2010, 161(11): 1564–1584.
- [8] Salahshour S, Allahviranloo T, Abbasbandy S. Solving fuzzy fractional differential equations by fuzzy Laplace transforms[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(3): 1372–1381.
- [9] Salahshour S, Allahviranloo T, Abbasbandy S, et al. Existence and uniqueness results for fractional differential equations with uncertainty[J]. Advances in Difference Equations, 2012, 2012: 1–12.
- [10] Allahviranloo T, Armand A, Gouyandeh Z. Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 26(3): 1481–1490.
- [11] Mazandarani M, Pariz N, Kamyad A V. Granular differentiability of fuzzy-number-valued functions[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 26(1): 310–323.
- [12] Wang Xue, Luo Danfeng, Zhu Quanxin. Ulam-Hyers stability of caputo type fuzzy fractional differential equations with time-delays[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2022, 156: 111822.
- [13] Yan Feixiang, Luo Danfeng. Finite-time stability of Caputo fractional fuzzy differential equations with delay in granular sense[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2024, 134: 108022.
- [14] Son N T K, Long H V, Dong N P. Fuzzy delay differential equations under granular differentiability with applications[J]. Computational and Applied Mathematics, 2019, 38(3): 107.
- [15] An T V, Van Hoa N. The stability of the controlled problem of fuzzy dynamic systems involving the random-order Caputo fractional derivative[J]. Information Sciences, 2022, 612: 427–452.
- [16] Dong N P, Long H V, Khastan A. Optimal control of a fractional order model for granular SEIR epidemic with uncertainty[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 88: 105312.

- [17] Najariyan M, Zhao Yi. Fuzzy fractional quadratic regulator problem under granular fuzzy fractional derivatives[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2017, 26(4): 2273–2288.
- [18] Zhou Yong. Basic theory of fractional differential equations[M]. World Scientific, 2023.
- [19] Vu H, Van Hoa N. Hyers-Ulam stability of fuzzy fractional Volterra integral equations with the kernel  $\psi$ - function via successive approximation method[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2021, 419: 67–98.
- [20] Ye Haiping, Gao Jianming, Ding Yongsheng. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 328(2): 1075–1081.

## ULAM-HYERS STABILITY OF SOLUTIONS TO CAPUTO FRACTIONAL FUZZY DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

LI Rong, YE Guo-ju, LIU Wei

(*School of Mathematics, Hohai University, Jiangsu Nanjing 210098, China*)

**Abstract:** This paper mainly studies a class of Caputo fractional fuzzy delay differential equations with periodic boundary conditions under granular differentiability. Through the Banach compression mapping principle, we have proven the existence and uniqueness of the solution to the equation, and further proved the Ulam-Hyers stability of the solution by using Gronwall inequality.

**Keywords:** fractional fuzzy differential equation; delay; Ulam-Hyers stability; boundary value problem; granular differentiability

**2010 MR Subject Classification:** 26A33; 03E72