Vol. 45 (2025)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

若干有限非交换群上交换图的完备码

霍丽君, 易光莉, 李明丹
(重庆理工大学理学院, 重庆 400054)

摘 要: 设 G 是一个有限非交换群, 群 G 上的交换图 $\Gamma(G)$ 具有顶点集 $G\backslash Z(G)$, 这里 $Z(G)$ 表示群 G 的中心, 两个顶点 a 和 b 相邻当且仅当 $ab=ba$. 一个图 Γ 的顶点集 $V(\Gamma)$ 的子集 C 是 Γ 的一个完备码, 如果 C 是 $V(\Gamma)$ 的一个独立集, 且 $V(\Gamma)\backslash C$ 的每个顶点恰好与 C 中的一个顶点相邻. 判断交换图上完备码存在性以及构造完备码的问题是一个重要的研究课题, 本文给出了一些有限非交换群上交换图的完备码.

关键词: 非交换群; 交换图; 完备码; 半二面体群
MR(2010) **主题分类号**: 05C25 ; 05C69 ; 94B25 **中图分类号**: O152.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2025)05-0429-06

1 引言

本文所涉及的群都是有限非交换群, 所考虑的图都是简单无向图. 设 Γ 是一个图, 其顶点集记为 $V(\Gamma)$. 图 Γ 的顶点集子集 C 是 Γ 的一个完备码, 如果 C 是 $V(\Gamma)$ 的一个独立集, 且 $V(\Gamma)\backslash C$ 的每个顶点恰好与 C 中的一个顶点相邻. 图中的完备码也称为有效控制集 [1] 或独立完美控制集 [2].

自 20 世纪 40 年代末编码理论兴起以来, 完备码一直是信息理论研究中的重要研究对象, 完备码是一种特殊的纠错码, 其主要目的是在数据传输过程中检测和纠正错误, 以确保信息的准确传输. 在古典的研究背景下, 人们关注的是 Hamming 或 Lee 距离的完备码, 如在 20 世纪 70 年代, 人们证明了在 Hamming 距离下, Hamming 码和 Golay 码是二元域上仅有的非平凡完备码. 2008 年, Heden O[3] 的文章揭示了完美码与数学中的其他结构如平铺、Steiner 三元系和 Mathieu 群等的紧密联系, 有关完备码的详细介绍可参看文献 [3, 4] 及其参考文献.

作为经典码论的推广, 1973 年, Norman Biggs[5] 首先将完备码引入到图论中, 他给出了距离传递图中一个完备码存在的判别准则. 随着完备码与图的结合, 一般图的完备码引起了人们的广泛关注. 利用代数结构来构造图, 并结合图论知识来研究代数结构的代数性质是近几十年来的一个热门研究课题. 如有限群的交换图、凯莱图, 以及环上的零因子图等都是较为经典的代数结构上的图, 这些图在研究代数系统的性质以及图上的完备码方面有着重要应用. 例如, 在文献 [9] 中作者研究了 Cayley 图中的完备码与全完备码问题，分析了子群作为 (全) 完备码的条件. 更多有关 Cayley 图上的完备码问题可参考文献 [6-8] 或 [12] 等.

---

*收稿日期: 2024-12-28 接收日期: 2025-03-03
基金项目: 重庆市自然科学基金项目 (CSTB2022NSCQ-MSX0831, cstc2021jcyj-msxmX0575); 重庆理工大学研究生教育高质量发展行动计划资助成果 (gzljg2022319, gzlcx20253353, gzlcx20253360); 重庆理工大学教育教学改革项目 (2023YB115, 2023YB132); 重庆理工大学高等教育研究项目 (2024YB08).
作者简介: 霍丽君 (1983 –), 女, 讲师, 主要研究方向: 代数学. E-mail: huolj@cqut.edu.cn.

群上的交换图是一种特殊的图结构, 其顶点集由非交换群的非中心元素构成, 而图中两个顶点 a 和 b 相邻当且仅当 $ab = ba$. 交换图上的完备码问题因与群论和图论和编码理论有着密切的联系, 近几年来成为热门研究课题. 2020 年, 在文献 [10] 中, 作者给出了一个有限群 G 的子群 H 成为 G 的完备码的充分必要条件. 具体来说, 一个子群 H 是 G 的完备码当且仅当 H 的 Sylow 2- 子群是 G 的完备码.

近年来马儇龙研究了群 G 的子群 H 成为 G 的完备码的条件, 并定义了码完备群, 即每个真子群都是完备码的群. 2023 年, 马儇龙 [11] 等人解决了对称群和交错群上交换图的完备码问题, 并在对称群和交错群上交换图有完备码的情况下, 确定了这些交换图的所有完备码. 通过以上研究我们发现, 对有关（半）二面体群上以及四元数群的完备码问题, 仍有待进一步研究, 基于完备码的判定准则, 本文得到了如下半二面体群等有限非交换群上交换图的完备码:

$$D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = e, bab = a^{-1} \rangle;$$
$$SD_{8n} = \langle a, b : a^{4n} = b^2 = e, bab = a^{2n-1} \rangle;$$
$$Q_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = e, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle;$$
$$U_{(n,m)} = \langle a, b : a^{2n} = b^m = e, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle;$$
$$G = \langle a, b : a^{p^3} = b^p = 1, bab^{-1} = a^{p^2+1} \rangle;$$
$$V_{8n} = \langle a, b : a^{2n} = b^4 = e, aba = b^{-1}, ab^{-1}a = b \rangle.$$

2 预备知识

定义 2.1 [14] $Z(G)$ 表示群 G 的中心, 即 $Z(G) = \{x \in G : gx = xg, \forall g \in G\}$. 定义群 G 上的交换图 $\Gamma(G)$ 具有顶点集 $G \backslash Z(G)$, 对于顶点集不同的两个顶点 a, b 相邻, 记为 $a \sim b$, 当且仅当 $ab = ba$.

定义 2.2 [13] 假设 Γ 是一个图, $V(\Gamma)$ 记作 Γ 的顶点集, 如果 C 是 $V(\Gamma)$ 的一个独立集, 且 $V(\Gamma) \backslash C$ 的每个顶点恰好与 C 中的一个顶点相邻, 那么 $V(\Gamma)$ 的子集 C 是 Γ 的一个完备码.

定义 2.3 [11] 设 G 是一个群, 对于任意一子集 $G_1 \subseteq G$, 用 G_1^* 表示 $G_1 \backslash Z(G)$.

令 $C_G(x)$ 表示元素 x 在 G 中的中心化子, 即 $C_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}$. 在 $\Gamma(G)$ 中, 对任意 $x \in V(\Gamma(G))$, $C_G(x)^*$ 恰好是顶点 x 在图 $\Gamma(G)$ 中的闭领域, 即 $C_G(x)^* = \{v \in V(\Gamma(G)) : x \sim v\} \cup \{x\}$.

引理 2.4 [11,引理 2.1] 设 G 是一个群且 C 是 G^* 的一个子集, 则 C 是 $\Gamma(G)$ 的完备码的充分必要条件是 $\{C_G(x)^* : x \in C\}$ 是 G^* 的一个划分.

3 若干非交换群上交换图的完备码

定理 3.1 设二面体群 $D_{2n} = \langle a, b : a^n = b^2 = e,\ bab = a^{-1} \rangle$, $n \geq 3$, 则

(1) 当 $n = 2m$ 时, 其中 $m \geq 2$, D_{2n} 的交换图的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{m-1}b\}$;

(2) 当 $n = 2m+1$ 时, 其中 $m \geq 1$, D_{2n} 的交换图的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{2m}b\}$.

证 易验证对任意 $1 \leq i \leq n$, 有 $o(a^ib) = 2$, 并且 $D_{2n} = \langle a \rangle \cup \{b, ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\}$.

(1) 若 $2 \mid n$, 可设 $n = 2m$, 易知 $Z(D_{2n}) = \{e, a^m\}$. 此外, 对于 $1 \leq i \leq n-1$, 且 $i \neq m$, 以及 $0 \leq j \leq m-1$, 容易验证

$$C_{D_{2n}}(a^i)^* = \langle a\rangle \setminus \{e, a^m\},\ C_{D_{2n}}(a^jb)^* = \{a^jb, a^{m+j}b\}.$$

由于在一个完备码内不能存在相邻的顶点, 而对任意的 $1 \le i_1,\ i_2 \le n-1$, 及 $1 \le j \le m-1$, 有 $a^{i_1} \sim a^{i_2}$, $a^jb \sim a^{m+j}b$, 从而根据引理 2.4 可得 $\Gamma(D_{2n})$ 的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{m-1}b\}$.

(2) 若 $2 \nmid n$, 可设 $n = 2m+1$, 可知 $Z(D_{2n}) = \{e\}$, 故对于任意的 i, j 满足 $1 \le i \le n-1$, $0 \le j \le 2m-1$, 有 $C_{D_{2n}}(a^i)^* = \langle a\rangle \setminus \{e\}$, $C_{D_{2n}}(a^jb)^* = \{a^jb\}$.

类似地, 由于完备码内不能存在相邻的顶点, 而对 $1 \le i_1,\ i_2 \le n-1$, 显然有 $a^{i_1} \sim a^{i_2}$, 根据引理 2.4 可得 $\Gamma(D_{2n})$ 的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{2m}b\}$.

注: 当 $n = 2m$ 时, 对 $1 \le i_1,\ i_2 \le n-1$, $1 \le j \le m-1$, 有 a^{i_1} 和 a^{i_2} 是相邻的, a^jb 和 $a^{m+j}b$ 也是相邻的, 故 $\Gamma(D_{2n})$ 的完备码 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{m-1}b\}$ 中的 a 可由 a^i 替换, a^jb 也可由 $a^{m+j}b$ 替换; 同理, 当 $n = 2m+1$ 时, $\Gamma(D_{2n})$ 的完备码 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{2m}b\}$ 中的 a 也可由 a^i 替换. 显然, 有限群上交换图的完备码不唯一.

定理 3.2 设半二面体群 $SD_{(8n)} = \langle a, b : a^{4n} = b^2 = e, bab = a^{2n-1}\rangle$, 则

(1) 当 $2 \mid n$ 时, SD_{8n} 的交换图的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{2n-1}b\}$;

(2) 当 $2 \nmid n$ 时, SD_{8n} 的交换图的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\}$.

证 由半二面体群的定义关系可知 $bab = a^{2n-1}$, $ba^2b = (bab)(bab) = a^{2(2n-1)}$. 设 i 是一个整数, 由数学归纳法可得 $ba^ib = a^{i(2n-1)}$.

当 $2 \mid i$ 时, 设 $i = 2k$, 其中 k 为整数, 则 $ba^ib = a^{2k(2n-1)} = a^{-2k} = a^{-i}$. 特别地, 当 $i = 2n$ 时, 有 $ba^{2n}b = a^{2n}$, 即 $a^{2n} \in Z(SD_{8n})$. 当 $2 \nmid i$ 时, 设 $i = 2k+1$, 其中 k 为整数, 则 $ba^ib = a^{(2k+1)(2n-1)} = a^{2n-(2k+1)} = a^{2n-i}$.

从而当 $i = n$ 时, 有 $a^nb = ba^n$, 当 $i = 3n$ 时, 有 $a^{3n}b = ba^{-n} = ba^{3n}$, 故 $a^n, a^{3n} \in Z(SD_{8n})$. 于是

$$Z(SD_{8n}) = \begin{cases} \{e, a^{2n}\},\ 2 \mid n, \\ \{e, a^n, a^{2n}, a^{3n}\},\ 2 \nmid n. \end{cases}$$

由以上分析可得:

(1) 当 $2 \mid n$ 时, 由于 $Z(SD_{8n}) = \{e, a^{2n}\}$, 可知 $C_{SD_{8n}}(a^i)^* = \langle a\rangle\setminus\{e, a^{2n}\}$, 并且 $C_{SD_{8n}}(a^jb)^* = \{a^jb, a^{2n+j}b\}$, 其中 $1 \le i \le 4n-1$, $0 \le j \le 2n-1$.

注意到 $a^{i_1} \sim a^{i_2}$, $i_1 \ne i_2$, 且 $a^jb \sim a^{2n+j}b$, 从而由引理 2.4 可得 $\Gamma(SD_{8n})$ 的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{2n-1}b\}$.

(2) 当 $2 \nmid n$ 时, 由于 $Z(SD_{8n}) = \{e, a^n, a^{2n}, a^{3n}\}$, 于是对 $1 \le i \le 4n-1$, $0 \le j \le n-1$, 可以得到

$$C_{SD_{8n}}(a^i)^* = \langle a\rangle\setminus\{e, a^n, a^{2n}, a^{3n}\},\ C_{SD_{8n}}(a^jb)^* = \{a^jb, a^{n+j}b, a^{2n+j}b, a^{3n+j}b\}.$$

注意到 $a^{i_1} \sim a^{i_2}$, $i_1 \ne i_2$, 且 a^jb, $a^{n+j}b$, $a^{2n+j}b$, $a^{3n+j}b$ 是两两相邻的, 由引理 2.4, $\Gamma(SD_{8n})$ 存在完备码 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\}$.

广义四元数群 Q_{4n} 是四元数群的推广, 下面给出广义四元数群上交换图的一个完备码.

定理 3.3 设广义四元数群 $Q_{4n} = \langle a, b : a^{2n} = e, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$, $n \ge 2$, 则 Q_{4n} 的交换图的一个完备码为 $\{a, b, ab, a^2b, ..., a^{n-1}b\}$.

证 由 $b^{-1}ab=a^{-1}$, 显然 $b^{-1}a^2b=(b^{-1}ab)(b^{-1}ab)=a^{-2}$, 从而对任意的 $1\le i\le 2n$, 由归纳可得 $b^{-1}a^ib=a^{-i}$, 且只有当 $i=n$ 时, 有 $a^ib=ba^i$. 进而容易看出 $Z(Q_{4n})=\{e,a^n\}$.

易知 $Q_{4n}=\langle a\rangle\cup\{b,ab,a^2b,...,a^{2n-1}b\}$, 其子集 $\{b,ab,a^2b,...,a^{n-1}b\}$ 是一个独立集, 而 $a^jb\sim a^{n+j}b, 1\le j\le n$. 对于任意 $1\le i,\ j\le n$, 有 $C_{Q_{4n}}(a^i)^*=\langle a\rangle\setminus\{e,a^n\},\ C_{Q_{4n}}(a^jb)^*=\{a^jb,a^{n+j}b\}$. 故由引理 2.4 可得 $\Gamma(Q_{4n})$ 的一个完备码为 $\{a,b,ab,a^2b,...,a^{n-1}b\}$.

定理 3.4 设群 $U_{(n,m)}=\langle a,b:a^{2n}=b^m=e,a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$, 则

(1) 当 $2\mid m$ 时, $U_{(n,m)}$ 的交换图的一个完备码为 $\{a,b,ab,ab^2,...,ab^{\frac{m}{2}-1}\}$;

(2) 当 $2\nmid m$ 时, $U_{(n,m)}$ 的交换图的一个完备码为 $\{a,b,ab,ab^2,...,ab^{m-1}\}$.

证 由群定义可知 $a^n=a^{-n}$, $ba=ab^{-1}$, $ba^{-1}=a^{-1}b^{-1}$, $b^{-1}a=ab$, 故 $ba^2=baa=ab^{-1}a=aab=a^2b$, 且对任意 i_1, i_2 满足 $1\le i_1,\ i_2\le 2n$, a^{i_1} 和 a^{i_2} 是可交换的, 故 $\langle a^2\rangle\subseteq Z(U_{(n,m)})$.

而对 $1\le j\le m$, 有 $b^ja=b^{j-1}ba=b^{j-1}ab^{-1}=b^{j-2}ab^{-1}b^{-1}=b^{j-2}ab^{-2}=...=ab^{-j}$. 同理 $b^ja^2=b^jaa=ab^{-j}a=ab^{-j+1}b^{-1}a=ab^{-j+1}ab=...=a^2b^j$.

故对 $1\le i\le 2n$, 若 i 为奇数, 对任意的 j, 有 $b^ja^i=a^ib^{-j}$. 若 i 为偶数, 对任意的 j, 有 $b^ja^i=a^ib^j$, 因此 $b^ja^i=\begin{cases}a^ib^j,\ 2\mid i,\\ a^ib^{-j},\ 2\nmid i.\end{cases}$

若 m 为偶数, $b^{\frac{m}{2}}=b^{-\frac{m}{2}}, b^{\frac{m}{2}}a^i=a^ib^{-\frac{m}{2}}=a^ib^{\frac{m}{2}}$, 故 $\langle b^{\frac{m}{2}}\rangle\subseteq Z(U_{(n,m)})$.

综上所述, $Z(U_{(n,m)})=\begin{cases}\langle a^2\rangle\times\langle b^{\frac{m}{2}}\rangle,\ 2\mid m,\\ \langle a^2\rangle,\ 2\nmid m.\end{cases}$

(1) 当 $2\mid m$ 时, 由于 $Z(U_{(n,m)})=\langle a^2\rangle\times\langle b^{\frac{m}{2}}\rangle$, 于是对任意 i,j,k 满足 $1\le i\le 2n-1$, $0\le j\le 2n, 1\le k\le\frac{m}{2}-1$, 容易验证

$$C_{U_{(n,m)}}(a^i)^*=\langle a\rangle\setminus\langle a^2\rangle,\ C_{U_{(n,m)}}(a^jb^k)^*=\{a^jb^k,a^jb^{k+\frac{m}{2}},\langle a^2\rangle a^jb^k,\langle a^2\rangle a^jb^{k+\frac{m}{2}}\}.$$

从而 $\Gamma(U_{(n,m)})$ 存在一个完备码为 $\{a,b,ab,ab^2,...,ab^{\frac{m}{2}-1}\}$.

(2) 当 $2\nmid m$ 时, 由于 $Z(U_{(n,m)})=\langle a^2\rangle$, 可以得到

$$C_{U_{(n,m)}}(a^i)^*=\langle a\rangle\backslash\langle a^2\rangle,\ C_{U_{(n,m)}}(a^jb^k)^*=\{a^jb^k,\langle a^2\rangle a^jb^k\},$$

其中 $1\le i\le 2n-1$, $0\le j\le 2n$, $1\le k\le m$, 故 $\Gamma(U_{(n,m)})$ 存在一个完备码为 $\{a,b,ab,ab^2,...,ab^{m-1}\}$.

阶为素数 p 的方幂的有限群称为有限 p 群, 简称为 p 群. 下面给出一个 p 群的例子, 并求其交换图上的完备码.

定理 3.5 设群 $G=\langle a,b:a^{p^3}=b^p=e,bab^{-1}=a^{p^2+1}\rangle$, p 是奇素数, 则群 G 的交换图 $\Gamma(G)$ 的一个完备码为 $\{a,b,ab,a^2b,...,a^{p-1}b,ab^2,a^2b^2,...,a^{p-1}b^2,...,ab^{p-1},a^2b^{p-1},...,a^{p-1}b^{p-1}\}$.

证 由定义关系可得 $ba=a^{p^2+1}b$, 显然 $ba^2b^{-1}=baab^{-1}=bab^{-1}bab^{-1}=a^{2(p^2+1)}$. 于是对任意的整数 m,n, 其中 $0\le m\le p^3-1, 0\le n\le p-1$, 由归纳可得 $ba^m=a^{m(1+p^2)}b$. 显然该群 G 的任意元素可以表示为 a^mb^n, 设 a^mb^n 和 $a^{m_1}b^{n_1}$ 是 G 的任意两个可交换的元素, 下面求 $Z(G)$. 由

$$a^mb^na^{m_1}b^{n_1}=a^mb^{n-1}a^{m_1(1+p^2)}bb^{n_1}=\cdots=a^ma^{m_1(1+p^2)^n}b^nb^{n_1}=a^{m+m_1(1+p^2)^n}b^{n+n_1},$$

$$a^{m_1}b^{n_1}a^mb^n=a^{m_1}b^{n_1-1}a^{m(1+p^2)}bb^n=\cdots=a^{m_1}a^{m(1+p^2)^{n_1}}b^{n_1}b^n=a^{m_1+m(1+p^2)^{n_1}}b^{n_1+n},$$

可得 $a^{m+m_1(1+p^2)^n}=a^{m_1+m(1+p^2)^{n_1}}$. 注意到 $|\,a\,|=p^3$, 且 $(p^2+1)^n=\sum_{r=0}^nC_n^r(p^2)^{n-r}$, 从而

$a^{m_1np^2+m_1+m}=a^{mn_1p^2+m+m_1}$. 显然有 $m_1np^2\equiv mn_1p^2(\bmod p^3)$, 即 $m_1n\equiv mn_1(\bmod p)$. 于是 $Z(G)=\{e,a^p,a^{2p},...,a^{kp},...,a^{p(p^2-1)}\}$. 进而对于 $1\le i<p^3, 1\le j\le p, 1\le k\le p-1$, 有

$$C_G(a^i)^*=\langle a\rangle\backslash Z(G),\ C_G(a^jb^k)^*=\{a^jb^k,a^{j+p}b^k,a^{j+2p}b^k,...,a^ja^{p(p^2-1)}b^k\}.$$

根据引理 2.4 可得 $\Gamma(G)$ 的一个完备码为

$$\{a,b,ab,a^2b,...,a^{p-1}b,ab^2,a^2b^2,...,a^{p-1}b^2,...,ab^{p-1},a^2b^{p-1},...,a^{p-1}b^{p-1}\}.$$

定理 3.6 设群 $V_{8n}=\langle a,b:a^{2n}=b^4=e,aba=b^{-1},ab^{-1}a=b\rangle$, 则

(1) 当 $2\mid n$ 时, V_{8n} 的交换图的一个完备码为 $\{a,b,ab,a^2b,...,a^{n-1}b\}$;

(2) 当 $2\nmid n$ 时, V_{8n} 的交换图的一个完备码为 $\{a,b,ab,a^2b,...,a^{2n-1}b\}$.

证 由群的定义关系可得 $ab=b^{-1}a^{-1},\ ab^{-1}=ba^{-1},\ a^{-1}b=b^{-1}a,\ b^2=b^{-2},\ a^n=a^{-n}$.

设 i 是一个整数, 当 $2\mid i$ 时, 有 $a^ib=a^{i-1}b^{-1}a^{-1}=\cdots=ba^{-i}$, 即 $a^ib=ba^{-i}$, 进而等式两边取逆有 $b^{-1}a^{-i}=a^ib^{-1}$，于是 $a^{-i}b=ba^i$, 故 $a^ib^jb^2=ba^{-i}b^{j-1}b^2=bba^ib^{j-2}b^2=b^2a^ib^j$.

当 $2\nmid i$ 时, 有 $a^ib=a^{i-1}b^{-1}a^{-1}=a^{i-2}ba^{-1}a^{-1}=\cdots=b^{-1}a^{-i}$, 且易得 $a^{-i}b=ba^ib^2=b^{-1}b^2a^ib^2=b^{-1}a^i,\ a^ib^jb^2=b^{-1}a^{-i}b^{j-1}b^2=b^{-2}a^ib^{j-2}b^2=b^2a^ib^j$. 故 $a^ib=\begin{cases}ba^{-i},\ 2|i,\\ b^{-1}a^{-i},\ 2\nmid i.\end{cases}$

当 $i=n$ 时, 即 $2\mid n$, 有 $a^nb=ba^{-n}=ba^n$, 于是 $a^n\in Z(V_{8n})$. 对于任意 $a^ib^j\in V_{8n}$, 由于 $a^ib^jb^2=b^2a^ib^j$, 即 $b^2\in Z(V_{8n})$. 综上所述, $Z(V_{8n})=\begin{cases}\{e,b^2,a^n,a^nb^2\},\ 2|n,\\ \{e,b^2\},\ 2\nmid n.\end{cases}$

(1) 当 $2\mid n$ 时, 由于 $Z(V_{8n})=\{e,b^2,a^n,a^nb^2\}$, 对任意 i,j,k 满足 $1\le i\le 2n-1, i\ne n$, $0\le j\le n-1, 1\le k<2$, 可以得到

$$C_{V_{8n}}(a^i)^*=\langle a\rangle\setminus\{e,a^n\},\ C_{V_{8n}}(a^jb^k)^*=\{a^jb^k,a^jb^{k+2},a^{j+n}b^k,a^{j+n}b^{k+2}\}.$$

故 V_{8n} 的交换图的一个完备码为 $\{a,b,ab,a^2b,...,a^{n-1}b\}$.

(2) 当 $2\nmid n$ 时, 则 $Z(V_{8n})=\{e,b^2\}$, 此外对任意 i,j,k 满足 $1\le i\le 2n-1, 0\le j\le 2n-1$, $1\le k<2$, 有 $C_{V_{8n}}(a^i)^*=\langle a\rangle\setminus\{e\},\ C_{V_{8n}}(a^jb^k)^*=\{a^jb^k,a^jb^{k+2}\}$. 故 V_{8n} 的交换图的一个完备码为 $\{a,b,ab,a^2b,...,a^{2n-1}b\}$.

参 考 文 献

[1] Dejter I J, Serra O. Efficient dominating sets in Cayley graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2012, 129(2–3): 319–328.

[2] Deng Y P. Efficient dominating sets in circulant graphs with domination number prime[J]. Information Processing Letters, 2014, 114(12): 700–702.

[3] Heden O. A survey of perfect codes[J]. Advances in Mathematics of Communications, 2008, 2(2): 223–247.

[4] Van Lint J H. A survey of perfect codes[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1975, 5: 199–224.

[5] Biggs N. Perfect codes in graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 1973, 92(2): 72–81.

[6] Mart í nez C, Beivide R, Gabidulin M E. Perfect codes from Cayley graphs over Lipschitz integers[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(8): 3552–3562.

[7] Herzog M, Longobardi P, Maj M. On a commuting graph on conjugacy classes of groups[J]. Communications in Algebra, 2009, 37(10): 3369–3387.

[8] 黄雪毅. 凯莱图的谱, 同构及相关问题 [D]. 新疆大学, 2018.

[9] Huang H, Xia B, Zhou S. Perfect codes in Cayley graphs[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2018, 32(1): 548–559.

[10] Chen J, Wang Y, Xia B. Characterization of subgroup perfect codes in Cayley graphs[J]. Discrete Mathematics, 2020, 343(5): 111813.

[11] 马偎龙, 钟国, 王恺顺. 对称群上交换图的完备码 [J]. 数学学报, 2023, 66(03): 475–484.

[12] 张星, 王燕, 曲海鹏. 子群完备码 [J]. 烟台大学学报, 2020, 33(02): 127–130+211.

[13] Salahshour M A, Ashrafi A R. Commuting conjugacy class graph of finite CA-groups[J]. Khayyam Journal of Mathematics, 2020, 6(1): 108–118.

[14] Mohammadian A, Erfanian A, Mohammad F D G, et al. Triangle-free commuting conjugacy class graphs[J]. Journal of Group Theory, 2016, 19(6): 1049–1061.

PERFECT CODES IN COMMUTING GRAPHS ON SEVERAL FINITE NON-ABELIAN GROUPS

HUO Li-jun, YI Guang-li, LI Ming-dan

(*College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China*)

Abstract: Let G be a finite non-abelian group. The commuting graph $\Gamma(G)$ on group G has vertex set $G\backslash Z(G)$, and two vertices a and b are adjacent if and only if $ab = ba$, where $Z(G)$ denotes the center of the group G. A subset C of the vertex set $V(\Gamma)$ in graph Γ is a perfect code if C is an independent set of $V(\Gamma)$ and each vertex in $V(\Gamma)\backslash C$ is adjacent to exactly one vertex in C. The problem of determining the existence of perfect codes and constructing such codes on commuting graphs is an important research topic. This paper presents some perfect codes of commuting graphs on some non-abelian groups.

Keywords: non-abelian group; commuting graph; perfect code; semidihedral group

2010 MR Subject Classification: 05C25; 05C69; 94B25