Vol. 45 (2025)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

五重积恒等式的一个新有限形式

朱军明 [1], 黄自谦 [2]
(1. 洛阳师范学院数学科学学院, 河南 洛阳 471934)
(2. 广西中医药大学药学院数理系, 广西 南宁 530200)

摘 要: 本文利用 Gasper 和 Rahman 的一个公式得到了五重积恒等式的一个新有限形式, 进而, 证明了五重积恒等式. 本文还得到一些组合恒等式.

关 键 词: 五重积恒等式; 有限形式; 组合恒等式; q- 级数
MR(2010) **主题分类号**: 33D15; 05A19 **中图分类号**: O173.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2025)05-0425-04

1 引言

著名的五重积恒等式可写成如下形式:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}} x^{3k}(1+xq^k)=\frac{(q,q/x^2,x^2;q)_\infty}{(x,q/x;q)_\infty},\quad x\neq 0. \tag{1.1}$$

为了方便, 我们限制 $|q|<1$. $q-$ 移位阶乘定义为

$$(a;q)_\infty=\prod_{l=0}^{\infty}(1-aq^l)\qquad \text{以及}\qquad (a;q)_n=\frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}.$$

本文采用如下缩写 $(a,b,\cdots,\ c;q)_k=(a;q)_k(b;q)_k\cdots(c;q)_k,\quad k\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$. 读者可以参考 [1] 或 [2, 3] 以获得更多 $q-$ 级数理论.

五重积恒等式 (1.1) 或者它的等价形式由 Fricke [4], Ramanujan [5] 和 Watson [6] 分别发现. 它在数论, 组合和特殊函数等方面都有重要的应用. 文章 [7] 中考证了这个等式的历史并收集整理了各种有趣的证明. 特别地, 文献 [8, 9] 分别给出了五重积恒等式的两个不同的有限形式. 受前文的启示, 本文利用 Gasper 和 Rahman 公式 [1, p. 98, Eq. (3.10.5)] 得到了五重积恒等式的一个新有限形式, 进而导出了五重积恒等式. 本文还得到一些组合恒等式.

为了方便, 下文中我们总是令 $m,n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.

定理 1.1 (五重积恒等式的一个新有限形式) 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}(1-x^4q^{4k+2})\begin{bmatrix} n\\ k\end{bmatrix}_q\frac{(x^4q^2;q^2)_k q^{\frac{k^2-3k}{2}}x^{-k}}{(-q,x^2q^{n+2};q)_k}=\frac{(1-x^4q^2)(1+xq^{n+1})(x^2q^2,-1/xq;q)_n}{(1+xq)(-q,xq;q)_n}. \tag{1.2}$$

*收稿日期: 2024-11-27 接收日期: 2025-02-17
基金项目: 广西中医药大学研究基金 (2017BS200), 河南省高校重点研究项目 (23A110013) 和国家自然科学基金 (11871258).
作者简介: 朱军明 (1973–), 男, 副教授, 主要研究方向: 特殊函数等. E-mail: junming_zhu@163.com
通讯作者: 黄自谦 (1972–), 男, 副教授, 主要研究方向: 特殊函数与偏微分方程等.
E-mail: huangziqian2004@163.com .

这里 $\begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_m}{(q;q)_l(q;q)_{m-l}}$, $l = 0, 1, 2, \cdots, m$.

推论 1.2 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}(2x+2k+1)\binom{n}{k}\frac{(2x+1)_k}{(2x+n+2)_k} = \frac{(2x+1)_{n+1}}{(x+1)_n}. \tag{1.3}$$

这里 $(x)_0 = 1$; 当 $k = 1, 2, \cdots$ 时, $(x)_k = x(x+1)\cdots(x+k-1)$.

在 (1.3) 中, 令 $x = 0$, 整理后得到

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\binom{2n+1}{n-k} = (n+1)\binom{2n+1}{n}.$$

在 (1.3) 中, 令 $x = \frac{1}{2}$, 整理后得到

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+k+2}{n+1}} = \frac{(2n+2)!!}{4 \bullet (2n+1)!!}.$$

在 (1.3) 中, 令 $x = 1$, 整理后得到

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+3)\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+k+3}{n+1}} = 1.$$

在 (1.3) 中, 令 $x = n$, 整理后得到

$$\sum_{k=0}^{n}(2n+2k+1)\frac{\binom{n}{k}\binom{5n+k+1}{2n}}{\binom{5n+k+1}{3n+1}} = (4n+1)\frac{\binom{4n}{2n}}{\binom{4n+1}{n}}.$$

读者可以参考 [10] 以获得更多组合恒等式.

2 证明

定理 1.1 的证明 我们从公式 [1, p. 98, Eq. (3.10.5)]:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(a^2, aq^2, -aq^2; q^2)_k(-aq/w, q^{-n}; q)_k}{(q^2, a, -a; q^2)_k(w, -aq^{n+1}; q)_k}\left(\frac{wq^{n-1}}{a}\right)^k = \frac{(1-aq^{n+1}/w)(-aq, w/aq; q)_n}{(1-aq/w)(-q, w; q)_n}$$

开始. 作替换 $(a, w) \to (-x^2q, xq)$, 在所得到的等式两边同乘以 $1 - x^4q^2$, 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(1-x^4q^{4k+2})(x^4q^2; q^2)_k(q^{-n}; q)_k}{(q^2; q^2)_k(x^2q^{n+2}; q)_k}\left(-\frac{q^{n-1}}{x}\right)^k = \frac{(1-x^4q^2)(1+xq^{n+1})(x^2q^2, -1/xq; q)_n}{(1+xq)(-q, xq; q)_n},$$

这就是 (1.2). 定理 1.1 证毕.

下面, 我们利用定理 1.1 推导五重积恒等式 (1.1).

在定理 1.1 中, 作替换 $n\to m+n$, $k\to k+m$, $x\to xq^{-m}$, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-m}^{n}(1-x^4q^{4k+2})\begin{bmatrix}m+n\\k+m\end{bmatrix}_q\frac{(x^4q^{2-4m};q^2)_{k+m}q^{\frac{(k+m)^2-3(k+m)}{2}}(xq^{-m})^{-k-m}}{(-q,x^2q^{n-m+2};q)_{k+m}}\\&=\frac{(1-x^4q^{2-4m})(1+xq^{n+1})(x^2q^{2-2m},-q^{m-1}/x;q)_{m+n}}{(1+xq^{1-m})(-q,xq^{1-m};q)_{m+n}},\end{aligned}$$

或写做

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-m}^{n}(1-x^4q^{4k+2})\begin{bmatrix}m+n\\k+m\end{bmatrix}_q\frac{(x^4q^{2-2m};q^2)_kq^{\frac{k^2-3k}{2}+2km}x^{-k}}{(-q^{m+1},x^2q^{n+2};q)_k}\\&=\frac{(1-x^4q^{2-4m})(1+xq^{n+1})}{1+xq^{1-m}}q^{\frac{-3m^2+3m}{2}}x^m\\&\quad\times\frac{(-q;q)_m(x^2q^{n-m+2};q)_m}{(x^4q^{2-4m};q^2)_m}\frac{(x^2q^{2-2m};q)_{m+n}(-q^{m-1}/x;q)_{m+n}}{(-q;q)_{m+n}(xq^{1-m};q)_{m+n}}\\&=\frac{(1-x^4q^{2-4m})(1+xq^{n+1})}{1+xq^{1-m}}q^{\frac{-3m^2+3m}{2}}x^m\quad\times\frac{(x^2q^{2-2m};q)_{2m+n}}{(x^4q^{2-4m};q^2)_m}\frac{(-q^{m-1}/x;q)_{m+n}}{(-q^{m+1};q)_n(xq^{1-m};q)_{m+n}}\\&=\frac{(1-x^4q^{2-4m})(1+xq^{n+1})}{1+xq^{1-m}}q^{\frac{-3m^2+3m}{2}}x^m\quad\times\frac{(x^2q^{2-2m};q)_{2m}}{(x^4q^{2-4m};q^2)_m}\frac{(x^2q^2;q)_n(-q^{m-1}/x;q)_{m+n}}{(-q^{m+1};q)_n(xq^{1-m};q)_m(xq;q)_n}.\end{aligned}$$

上式中利用 $(aq^{-m};q)_n=(-a)^nq^{-mn+\frac{n^2-n}{2}}(q^{m+1-n}/a;q)_n$ 得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-m}^{n}(-1)^k(1-x^4q^{4k+2})\begin{bmatrix}m+n\\k+m\end{bmatrix}_q\frac{(q^{2m-2k}/x^4;q^2)_kq^{k(3k-1)/2}x^{3k}}{(-q^{m+1},x^2q^{n+2};q)_k}\\&=\frac{(q^{4m}-x^4q^2)(1+xq^{n+1})(1/x^2q;q)_{2m}(x^2q^2;q)_n(-q^{m-1}/x;q)_{m+n}}{(q^m+xq)(q^{2m}/x^4;q^2)_m(-q^{m+1};q)_n(1/x;q)_m(xq;q)_n},\end{aligned}\tag{2.1}$$

再令 $m=n\to\infty$, 上式变为

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\frac{k(3k-1)}{2}}x^{3k}(1-x^4q^{4k+2})=-x^3q\frac{(q,1/x^2q,x^2q^2;q)_\infty}{(xq,1/x;q)_\infty}.\tag{2.2}$$

此式左端等于

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\frac{3k^2-k}{2}}x^{3k}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+1}q^{\frac{3k^2+7k+4}{2}}x^{3k+4}\\=&\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\frac{3k^2-k}{2}}x^{3k}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\frac{3k^2+k}{2}}x^{3k+1}\\=&\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\frac{k(3k-1)}{2}}x^{3k}(1+xq^k).\end{aligned}$$

把上式与 (2.2) 联合, 我们得到 (1.1).

推论 1.2 的证明 在公式 (1.1) 中, 把 x 替换为 q^x, 在所得到的等式两端同除以 $1-q^2$, 我们有

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1-q^{4x+4k+2}}{1-q^2}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q\frac{(-q^{2x+1},q^{2x+1};q)_k q^{\frac{k^2-3k}{2}-kx}}{(-q,q^{2x+n+2};q)_k}$$
$$=\frac{(1-q^{4x+2})(1+q^{x+n+1})(-q^{-x-1},q^{2x+2};q)_n}{(1-q^2)(1+q^{x+1})(-q,q^{x+1};q)_n}.$$

令 $q\to 1$ 得到 $\sum\limits_{k=0}^{n}(2x+2k+1)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{2^k(2x+1)_k}{2^k(2x+n+2)_k}=(2x+1)\cdot\frac{2^n(2x+2)_n}{2^n(x+1)_n}$. 化简得到 (1.3). 推论 1.2 证毕.

参 考 文 献

[1] Gasper G, Rahman M. Basic hypergeometric series(2nd ed)[M]. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.

[2] 张之正. q- 级数理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社出版, 2021.

[3] 张之正. 多变量基本超几何级数理论 [M]. 现代数学基础丛书 205. 北京: 科学出版社出版, 2024.

[4] Fricke R. Die elliptischen funktionen und ihre anwendungen[M]. Leipzig: Erste Teil, Teubner, 1916.

[5] Ramanujan S. The lost notebook and other unpublished papers[M]. New Delhi: Narosa, 1988.

[6] Watson G N. Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on continued fractions [J]. J. London Math. Soc., 1929, 4: 39–48.

[7] Cooper S. The quintuple product identity [J]. Int. J. Number Theory, 2006, 2(1): 115–161.

[8] Chen William Y C, Chu Wenchang, Gu Nancy S S. Finite form of the quintuple product identity [J]. J. Combin. Theory, Ser. A, 2006, 113: 185–187.

[9] Guo Victor J W, Zeng Jiang. Short proofs of summation and transformation formulas for basic hypergeometric series [J]. J. Math. Anal. Appl., 2007, 327(1): 310–325.

[10] Gould H W. Combinatorial identities [M]. Singapore: World Scientific, 1972.

A NEW FINITE FORM OF THE QUINTUPLE PRODUCT IDENTITY

ZHU Jun-ming[1], HUANG Zi-qian[2]

(*1. Department of Mathematics, Luoyang Normal University, Henan 471934, China*)

(*2. Faculty of Pharmacy, Guangxi University of Chinese Medicine, Guangxi 530200, China*)

Abstract: A finite form of the quintuple product identity is obtained from an identity of Gasper and Rahman. Some combinatorial identities are also given.

Keywords: the quintuple product identity; finite form; combinatorial identity; q-series

2010 MR Subject Classification: 33D15; 05A19