

平面上非局部曲线流及其应用

刘志帅, 杨紫秋, 郭顺滋

(云南师范大学数学学院, 云南 昆明 650500)

摘要: 本文研究欧式平面上一族非局部曲线流, 若当初始曲线是闭凸曲线, 则在演化过程中它会保持凸性以及 $\int_0^{2\pi} k d\theta$ 不变, 利用压缩映射原理, 得到解的唯一性, 本文将证明这个流的整体存在性, 且演化曲线周长和面积非增, 得到了演化曲线在极限状态下会收敛到一个有限圆. 作为这个流的应用, 我们将证明三个不等式, 其中第二个不等式推广了逆等周不等式.

关键词: 闭凸曲线流; 存在性; 收敛性; 曲率

MR(2010) 主题分类号: 53A04; 53C44

中图分类号: O186.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2025)05-0409-08

1 引言

几何流在过去几十年的时间里, 受到了广泛的关注, 其中最著名的工作是佩雷尔曼利用几何流证明庞加莱猜想. 其中曲线流是特殊的一种几何流, 因此曲线演化问题在过去几十年里也受到了广泛的关注. 其中, 最著名的就是 Gage^[1], Gage-Hamilton^[2] 和 Grayson^[3] 等人研究的平面曲线收缩流, 这个流有趣且重要, 因为它在流体力学、图像处理等方面有着诸多应用. 之后也有人研究保面积流^[4,5] 和保长度流^[6,7]. 在文献 [8] 中, Gao-Wang 研究了一种新型曲线流

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(u, t) = \left(P - \frac{\int_0^L k^2 ds}{\int_0^L k^3 ds} \right) N(u, t) \\ X(u, 0) = X_0(u) \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, k 是曲线的相对曲率, $P = -\langle X, N \rangle$ 是支撑函数, $X(u, t) : S^1 \times [0, \infty) \rightarrow R^2$ 是一族平面光滑闭凸曲线, N 是单位内法向量.

本文将研究一种新的非局部曲线流, 设 $X(u, t) : S^1 \times [0, T) \rightarrow R^2$ 是平面上一族光滑闭凸曲线, $X(u, 0) = X_0(u)$ 是一条简单闭曲线满足演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(u, t) = \left(P \frac{\int_0^L k^3 ds}{\int_0^L k^2 ds} - 1 \right) N(u, t) \\ X(u, 0) = X_0(u) \end{cases} \quad (1.2)$$

*收稿日期: 2024-10-13 接收日期: 2024-11-27

基金项目: 国家自然科学基金项目资助 (12261105); 云南省教育厅科学研究基金项目资助 (2024Y154); 云南师范大学 2024 年年度研究生科研创新基金资助 (YJSJJ23-B68).

作者简介: 刘志帅 (2000-), 男, 河南新乡, 硕士研究生, 研究方向: 微分几何.

E-mail: 115516532690@163.com.

通讯作者: 郭顺滋. E-mail: guoshunzi@yeah.net

本文的主要定理如下.

定理 1: 若闭凸曲线按照 (1.2) 式演化, 则在演化过程中, 它始终会保持凸性, 且曲线的长度和面积单调递减, 最终随着时间趋于无穷, 演化曲线光滑的收敛到半径为 $\frac{2\pi}{E_2(0)}$ 的圆.

本文的结构如下, 在第二节我们将证明曲线的最终状态, 第三节将证明曲线的 C^∞ 收敛性, 第四节将利用曲线流的性质证明几何不等式.

2 曲线的最终状态

令 $g(u, t) = |X_u| = (x_u^2 + y_u^2)^{\frac{1}{2}}$ 是曲线的度量, 则根据弧长的定义可得: $ds = g(u, t)du$. 此外, 曲线的切向量 T 、法向量 N 、方向角 θ 、曲率 k 、周长 L 和面积 A 的定义分别如下

$$T = \frac{\partial X}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad N = \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{kg} \frac{\partial T}{\partial u}, \quad \theta = \angle(T, x),$$

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{1}{g} \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad L(t) = \oint ds, \quad A(t) = -\frac{1}{2} \oint \langle X, N \rangle ds.$$

在文献 [9, 10] 中, 证明了加上切向分量并不会对曲线的演化行为产生影响. 因此为了简便计算, 我们考虑与 (1.2) 式等价的演化方程

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(u, t) = \alpha T + \left(P \frac{\int_0^L k^3 ds}{\int_0^L k^2 ds} - 1 \right) N(u, t) \\ X(u, 0) = X_0(u) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 T 是单位切向量, 加上切向量仅仅影响参数表示, 但不影响最终的形状. 同文献 [11] 中的计算方法一样, 可以得到下面的演化公式

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial u} - kg \left(P \frac{\int_0^L k^3 ds}{\int_0^L k^2 ds} - 1 \right), \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(P \frac{\int_0^L k^3 ds}{\int_0^L k^2 ds} - 1 \right) + \alpha k \right) N$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(P \frac{\int_0^L k^3 ds}{\int_0^L k^2 ds} - 1 \right) + \alpha k \right] T, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha k + \frac{\partial}{\partial s} \left(P \frac{\int_0^L k^3 ds}{\int_0^L k^2 ds} - 1 \right)$$

在方程 (2.1) 下, 选取 $\alpha = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial s} \left(P \frac{\int_0^L k^3 ds}{\int_0^L k^2 ds} - 1 \right)$ 为切向分量. 此时方向角 θ 、 T 、 N 与时间 t 无关. 为方便起见, 记 $E_n = \int_0^L k^n ds$.

引理 2.1 设曲线 X_0 是一条光滑闭凸曲线, 在流 (2.1) 下, 曲率的演化方程为

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \left(\frac{1}{k} \frac{E_3}{E_2} - 1 \right), \quad k(\theta, 0) = k_0(\theta)$$

证 直接计算可得

$$\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} \frac{E_3}{E_2} + p \frac{E_3}{E_2} - 1 \right) = k^2 \left(\frac{1}{k} \frac{E_3}{E_2} - 1 \right). \quad (2.2)$$

下面讨论方程 (2.2) 的存在性, 因为方程 (2.2) 是一个积分 - 微分系统, 所以利用压缩映像原理可得引理 2.2.

引理 2.2 柯西方程 (2.2) 整个时间区间 $[0, \omega)$ 上有唯一正解, 其中 ω 表示流在整个演化过程中存在的最大时间.

证 首先设 $m = \min \{k_0(\theta) \mid \theta \in S^1\}$, $M = \max \{k_0(\theta) \mid \theta \in S^1\}$ 并记 $\tilde{m} = \frac{1}{\lambda}m$, $\tilde{M} = \lambda M$, $Q_\omega = S^1 \times [0, \omega)$, 其中 λ 是大于 1 的常数. 考虑满足初始条件 $u(\theta, 0) = k_0(\theta)$ 的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\theta, t) = V(\theta, t) \frac{\int_0^{2\pi} V^2(\theta, t) d\theta}{\int_0^{2\pi} V(\theta, t) d\theta} - V^2(\theta, t), \tag{2.3}$$

其中 $\tilde{m} \leq V \leq \tilde{M}$, $V \in C(\bar{Q}_\omega)$. 选取时间 $\omega = \min \left\{ \frac{(1-\frac{1}{\lambda})m}{\lambda^2 M^2}, \frac{m(\lambda-1)}{\lambda^4 M^3}, \frac{m}{4\lambda M(4\pi\lambda^3+m)} \right\}$.

由方程 (2.3) 可知

$$u(\lambda, t) \leq k_0(\lambda) + \tilde{M} \frac{\tilde{M}^2}{\tilde{m}} t \leq M + \frac{\lambda^4 M^4}{m} t \leq \tilde{M},$$

$$u(\theta, t) \geq k_0(\theta) + \left(\tilde{m} \frac{\tilde{m}^2}{\tilde{M}} - \tilde{M}^2 \right) t \geq m + \left(\frac{m^3}{\lambda^4 M} - \lambda^2 M^2 \right) t \geq m - \lambda^2 M^2 t \geq \frac{m}{\lambda} = \tilde{m}.$$

因此有 $\tilde{m} \leq u \leq \tilde{M}$. $u \in C(\bar{Q}_\omega)$ 现在引入如下集合

$$V = \{f \in C(\bar{Q}_\omega) \mid \tilde{m} \leq f(\theta, t) \leq \tilde{M}\}$$

以及定义 f 的范数为

$$\|f\|_{C(\bar{Q}_\omega)} = \max\{|f(\theta, t)| \mid (\theta, t) \in \bar{Q}_\omega\}.$$

因此方程 (2.3) 的解构成了自身到自身的算子 τ . 接下来证明算子 τ 是压缩映射. 令 $v_1, v_2 \in V$. 并且定义 $\tau v_i = v_i, i = 1, 2$. 由 (2.3) 可得

$$u = \int_0^t v dt \frac{\int_0^{2\pi} v^2(\theta, t) d\theta}{\int_0^{2\pi} v(\theta, t) d\theta} - \int_0^{2\pi} v^2(\theta, t) dt + k_0(\theta),$$

则有

$$u_1 - u_2 = \int_0^t (v_2^2 - v_1^2) dt + \frac{\int_0^t v_1 dt \int_0^{2\pi} v_1^2 d\theta \int_0^{2\pi} v_2 d\theta - \int_0^t v_2 dt \int_0^{2\pi} v_2^2 d\theta \int_0^{2\pi} v_1 d\theta}{\int_0^{2\pi} v_1 d\theta \int_0^{2\pi} v_2 d\theta},$$

其中

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t v_1 dt \int_0^{2\pi} v_1^2 d\theta \int_0^{2\pi} v_2 d\theta - \int_0^t v_2 dt \int_0^{2\pi} v_2^2 d\theta \int_0^{2\pi} v_1 d\theta \right| \\ &= \int_0^t (v_1 - v_2) dt \int_0^{2\pi} v_1^2 d\theta \int_0^{2\pi} v_2 d\theta + \left(\int_0^{2\pi} v_1^2 d\theta \int_0^{2\pi} v_2 d\theta - \int_0^{2\pi} v_2^2 d\theta \int_0^{2\pi} v_1 d\theta \right) \int_0^t v_1 dt \\ &\leq 4\pi^2 \tilde{M}^3 \int_0^t |v_1 - v_2| dt + \left(\int_0^{2\pi} v_1^2 d\theta \int_0^{2\pi} (v_2 - v_1) d\theta - \int_0^{2\pi} (v_1^2 - v_2^2) d\theta \int_0^{2\pi} v_1 d\theta \right) \int_0^t v_1 dt \\ &\leq 4\pi^2 \tilde{M}^3 \|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q}_\omega)} + [4\pi^2 \tilde{M}^2 \|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q}_\omega)} + 8\pi^2 \tilde{M} \|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q}_\omega)}] \tilde{M} t \\ &= 16\pi^2 \tilde{M}^3 \|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q}_\omega)} t, \end{aligned}$$

则可得

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\bar{Q}_\omega)} \leq \left(\frac{8\pi\tilde{M}^3}{\tilde{m}} + 2\tilde{M}\right) \|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q}_\omega)} t \leq \frac{1}{2} \|v_1 - v_2\|_{C(\bar{Q}_\omega)}.$$

因此, τ 是自身到自身的压缩算子, 由 Banach 压缩映射原理可知, τ 存在唯一一个不动点. 于是有 $k \in C(\bar{Q}_\omega)$ 使得 $\tilde{m} \leq k \leq \tilde{M}$ 且 $\tau(k) = k$ 成立, 从而说明了流在整个时间区间 $[0, \omega)$ 上有唯一正解.

推论 2.3 在流 (2.1) 下, 在整个时间区间 $[0, \omega)$ 有唯一正解.

引理 2.4 (保闭性) 如果 $k_0(\theta) = k(\theta, 0) > 0$ 满足 $\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{k_0(\theta)} d\theta = 0$, 则对任意的 $t > 0$, (2.2) 式的解 $k(\theta, t)$ 都满足 $\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{k(\theta, t)} d\theta = 0$.

证 由 (2.2) 式我们可知

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{k(\theta, t)} d\theta = -\frac{E_3}{E_2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{k(\theta, t)} d\theta$$

积分可得

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{k(\theta, t)} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{k(\theta, 0)} d\theta \cdot e^{-\frac{E_3}{E_2} t} = 0,$$

即曲线在演化过程中始终保持闭. 证毕.

引理 2.5 在流 (2.1) 下, 演化曲线的长度 $L(t)$ 和围成面积 $A(t)$ 是单调递减的. 并且 $E_2(t) = \int_0^{2\pi} k(\theta, t) d\theta$ 是不变的.

证

$$\frac{dL}{dt} = -\oint k \left(P \frac{E_3}{E_2} - 1 \right) ds \leq 2\pi - \frac{E_3}{E_2} L \leq 2\pi - \frac{L^2}{2A} \leq 0,$$

故演化曲线的长度随时间递减.

$$\frac{dA}{dt} = -\oint \left(\frac{E_3}{E_2} P - 1 \right) ds = L - \frac{E_3}{E_2} \oint P ds = L - 2A \frac{E_3}{E_2} \leq 0,$$

故演化曲线所围成的面积随时间递减.

$$\frac{dE_2}{dt} = \int_0^{2\pi} k_t d\theta = \int_0^{2\pi} \left(k \frac{E_3}{E_2} - k^2 \right) d\theta = 0,$$

即 $E_2(t) = E_2(0)$. 结合 Gage 不等式可知 $E_2(0) = \int_0^{2\pi} k d\theta \geq \frac{4\pi^2}{L(t)}$, 因此可得周长和面积的一致上下界

$$\frac{4\pi^2}{E_2(0)} \leq L(t) \leq L(0), \quad \frac{4\pi^3}{E_2^2(0)} \leq A(t) \leq A(0).$$

由曲率的演化方程 (2.2) 式可得 $\frac{\partial k}{\partial t} = k^2 \left(\frac{1}{k} \frac{E_3}{E_2} - 1 \right) \geq -k^2$, 积分可得 $k(\theta, t) \geq \frac{1}{\frac{1}{k(\theta, 0)} + t} > 0$. 显然演化曲线一直保持凸性.

引理 2.6 (曲率一致有界性) 流 (2.1) 下的曲率 $k(\theta, t)$ 对于任意的 $(\theta, t) \in S^1 \times [0, \omega)$ 上, 都有 $k_{\min}(0) < k(\theta, t) < \frac{E_2(0)}{2\pi} e^c$.

证 考虑函数 $\log(k_{\min})$ 的单调性. 结合 Lin-Tsai 不等式可得

$$\frac{\partial \log k}{\partial t} = \frac{k_t}{k} = \frac{E_3}{E_2} - k \geq \frac{L}{2A} - k.$$

又因为 $k_{\min} \leq \frac{2\pi}{L}$, 所以 $\frac{\partial \log(k_{\min})}{\partial t} \geq \frac{L}{2A} - \frac{2\pi}{L} \geq 0$ 故 $k_{\min}(t) \geq k_{\min}(0) > 0$. 从而可说明曲率 k 有一致下界. 再考虑 k 有一致的正上界. 在某个区间上有 $(\frac{\partial k}{\partial \theta})^2 \geq 0$ 成立. 则

$$\frac{\partial \log(\frac{\partial k}{\partial \theta})^2}{\partial t} = 2\frac{E_3}{E_2} - 4k.$$

那么有

$$\frac{\partial(\log(\frac{\partial k}{\partial \theta})^2 - \log k^2)}{\partial t} = 2\frac{E_3}{E_2} - 4k - 2\frac{E_3}{E_2} + 2k = -2k \leq 0.$$

则可得

$$\left(\frac{\partial k}{\partial \theta}\right)^2 \leq \left(\frac{\partial k_0}{\partial \theta}\right)^2 \frac{k^2}{k_0^2}.$$

于是有 Harnack 型估计

$$\begin{aligned} \log k_{\max}(t) - \log k_{\min}(t) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{k(\theta, t)} \frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta, t) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta, t)} \frac{\partial k}{\partial \theta}(\theta, t) d\theta \\ &\leq \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{k^2(\theta, t)} \left|\frac{\partial k}{\partial \theta}\right|^2(\theta, t)} d\theta \leq \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{1}{k^2(\theta, 0)} \left|\frac{\partial k}{\partial \theta}\right|^2(\theta, 0)} d\theta \\ &= c. \end{aligned}$$

其中 c 为常数, 从而可得曲率的一致上界

$$k_{\max}(t) \leq k_{\min}(t)e^c \leq \frac{2\pi}{L(t)} e^c \leq \frac{E_2(0)}{2\pi} e^c.$$

因此对任意的 $(\theta, t) \in S^1 \times [0, \omega)$, 曲率 $k(\theta, t)$ 有一致上下界.

定理 2.7 在流 (2.1) 下, 演化曲线的等周差随着时间趋于无穷会收敛到零, 即曲线最终会收敛到一个圆.

证 直接计算可得

$$\frac{d(L^2 - 4\pi A)}{dt} = 2L\left(2\pi - \frac{E_3}{E_2}L\right) - 4\pi\left(L - 2A\frac{E_3}{E_2}\right) = -2\frac{E_3}{E_2}(L^2 - 4\pi A) \leq 0.$$

积分可得

$$L^2 - 4\pi A = (L_0^2 - 4\pi A_0)e^{-2\frac{E_3}{E_2}t}.$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, $L^2 - 4\pi A$ 收敛到零, 即演化曲线收敛为圆.

定理 2.8 在演化过程中, 若曲线不发生奇点, 则在 Hausdorff 度量下, 当时间趋于无穷时曲线收敛为一个有限圆.

证 由 Gage 不等式可知 $E_2(0) = \int_0^{2\pi} k d\theta \geq \frac{4\pi^2}{L(t)}$. 结合引理 2.7 可得极限圆的半径为 $\frac{2\pi}{E_2(0)}$.

3 曲线 C^∞ 收敛

第二节证明了曲线流的全局存在性. 在本节, 将给出演化曲线曲率的 C^∞ 收敛性.

定理 3.1 在流 (2.1) 下, 演化曲线的曲率半径收敛到常数 $\frac{L_\infty}{2\pi}$, 曲率半径 $\rho(\theta, t)$ 关于 θ 的任意阶导数 $\frac{\partial^i \rho}{\partial \theta^i}$ 收敛到 0, 其中 i 的取值为所有正整数.

证 直接计算可得 $\frac{\partial \rho}{\partial t}(\theta, t) = 1 - \rho \frac{E_3}{E_2}$. 所以

$$\frac{d}{dt}(\rho(\theta, t) - \frac{L(t)}{2\pi}) = -\frac{E_3}{E_2}(\rho(\theta, t) - \frac{L(t)}{2\pi}).$$

积分可得

$$(\rho(\theta, t) - \frac{L(t)}{2\pi}) = (\rho(\theta, 0) - \frac{L(0)}{2\pi})e^{-\frac{E_3}{E_2}t}. \quad (3.1)$$

所以当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(\theta, t) = \frac{L_\infty}{2\pi}$. 对 (3.1) 求导可得

$$\frac{\partial^i \rho}{\partial \theta^i}(\theta, t) = \frac{\partial^i \rho}{\partial \theta^i}(\theta, 0)e^{-\frac{E_3}{E_2}t}.$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\partial^i \rho}{\partial \theta^i}(\theta, t)$ 收敛到 0.

4 曲线的应用

本节将利用流 (2.1) 的性质, 给出以下几何不等式的证明.

定理 4.1 令 $X_0(\theta)$ 是平面上光滑且严格凸曲线, 令 θ 是曲线的切向角, 记 $P_0(\theta) = -\langle X_0(\theta), N(\theta) \rangle$ 为曲线 X_0 的支撑函数, 对于曲线 X_0 有下面不等式成立

$$\int_0^{2\pi} P_0^2 \geq \frac{8\pi^3}{E_2^2} + \frac{1}{2\pi} (L_0^2 - 4\pi A_0),$$

$$L^2 - 4\pi A \leq \frac{8\pi^3}{E_2^2} \left(L_0 - \frac{4\pi^2}{E_2} \right),$$

$$\int_0^{2\pi} \log(k \sqrt{\frac{A(t)}{\pi}}) d\theta \geq 0,$$

其中 $L(t), A(t)$ 分别是曲线 $X(t)$ 的长度和所围区域的面积, L_0, A_0 分别是曲线 X_0 的长度和所围区域的面积. 等号成立时当且仅当演化曲线为圆.

证 支撑函数的演化方程为 $\frac{\partial P}{\partial t}(\theta, t) = 1 - P \frac{E_3}{E_2}$. 则

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} P^2 d\theta \leq -\frac{2\pi}{A_0 E_2} (L^2 - 4\pi A) \leq \frac{2\pi}{E_2 L} \frac{d}{dt} (L^2 - 4\pi A) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (L^2 - 4\pi A).$$

积分可得

$$\int_0^{2\pi} P^2 d\theta - \int_0^{2\pi} P_0^2 d\theta \leq \frac{1}{2\pi} [(L^2 - 4\pi A) - (L_0^2 - 4\pi A_0)].$$

又因为 $\lim_{t \rightarrow \infty} P(\theta, t) = \frac{L_\infty}{2\pi} = \frac{2\pi}{E_2}$, 所以

$$\int_0^{2\pi} P_0^2 d\theta \geq \frac{8\pi^3}{E_2^2} + \frac{1}{2\pi}(L_0^2 - 4\pi A).$$

当 X_0 为圆时, 等式显然成立; 由柯西施瓦兹不等式和 Gage 不等式可知

$$\frac{L_0^2}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} P_0^2 d\theta \leq \frac{8\pi A_0^2}{L_0^2} + \frac{1}{2\pi}(L_0^2 - 4\pi A_0).$$

由此可得

$$\frac{4\pi A_0}{L_0^2} - 1 \geq 0,$$

结合经典的等周不等式有

$$L_0^2 - 4\pi A_0 = 0.$$

所以有

$$\int_0^{2\pi} P_0^2 d\theta = \frac{8\pi^3}{E_2^2}.$$

又因为 $\frac{L_0^2}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} P_0^2 d\theta$, $\frac{L_0^2}{2\pi} \geq \frac{8\pi^3}{E_2^2}$ 由柯西施瓦兹不等式可知 P 是常数, 即曲线是圆. 得证第一个不等式

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} P d\theta \leq 2\pi - \frac{L^2}{2A} \leq \frac{1}{2L} \frac{d}{dt} (L^2 - 4\pi A) \leq \frac{E_2}{8\pi^3} \frac{d}{dt} (L^2 - 4\pi A).$$

由此可得

$$\int_0^{2\pi} P d\theta - \int_0^{2\pi} P_0 d\theta \leq \frac{E_2}{8\pi^3} [(L^2 - 4\pi A) - (L_0^2 - 4\pi A_0)].$$

又因为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P = \frac{L_\infty}{2\pi} = \frac{2\pi}{E_2}.$$

因此可得

$$\int_0^{2\pi} P_0 d\theta \geq \frac{4\pi^2}{E_2} + \frac{E_2}{8\pi^3} (L_0^2 - 4\pi A_0).$$

于是

$$L_0^2 - 4\pi A_0 \leq \frac{8\pi^3}{E_2} \left(L_0 - \frac{4\pi^2}{E_2} \right).$$

当曲线为圆时, 等式自然成立; 与等一个不等式证明类似, 可得

$$\int_0^{2\pi} P_0 d\theta = \frac{4\pi^2}{E_2}, \quad E_2 = \frac{4\pi^2}{L_0} \geq \frac{\pi L_0}{A_0}.$$

因此曲线是圆. 得证第二个不等式. 设 $\psi(t) = \oint k \log(k \sqrt{\frac{A(t)}{\pi}} ds) = \int_0^{2\pi} \log(k \sqrt{\frac{A(t)}{\pi}}) d\theta$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{2\pi} \log(k \sqrt{\frac{A(t)}{\pi}}) d\theta \right) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{k_t}{k} + \frac{A_t}{2A} \right) d\theta \leq 0.$$

又因为 $\psi(0) \geq 0$. 结合上述不等式可知 $\forall t \in [0, \omega)$, 都有 $\psi(t) \geq 0$. 下面说明等号成立. 充分性显然成立, 下证必要性. 当 $\psi(t) = 0$ 时, $\frac{d}{dt}(\psi(t)) = 0$, 此时有 $\oint k^2 ds = \frac{\pi L}{A}$, 结合 Gage 不等式取等条件可知此时 X 为圆. 得证.

参 考 文 献

- [1] Gage M E. Curve shortening on surfaces[J]. In Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure, 1990, 23(2): 229–256.
- [2] Gage M, Hamilton R S. The heat equation shrinking convex plane curves[J]. Journal of Differential Geometry, 1986, 23(1): 69–96.
- [3] Grayson M A. Shortening embedded curves[J]. Annals of Mathematics, 1989, 129(1): 71–111.
- [4] Gage M. On an area-preserving evolution equation for plane curves[J]. Nonlinear problems in geometry, 1986, 51: 51–62.
- [5] Ma L, Cheng L. A non-local area preserving curve flow[J]. Geometriae Dedicata, 2014, 171(1): 231–47.
- [6] Ma L, Zhu A. On a length preserving curve flow[J]. Monatshefte für Mathematik, 2012, 165(1): 57–78.
- [7] 孟庆贤. 平面上一种保长度曲线流 [D]. 上海: 华东师范大学, 2010.
- [8] Gao L, Wang Y. Deforming convex curves with fixed elastic energy[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 427(2): 817–29.
- [9] Chou K S, Zhu X P. The curve shortening problem[M]. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [10] Green M, Osher S. Steiner polynomials, Wulff flows, and some new isoperimetric inequalities for convex plane curves[J]. Asian Journal of Mathematics, 1999, 3(3): 659–76.
- [11] Gage M, Hamilton R S. The heat equation shrinking convex plane curves[J]. Journal of Differential Geometry, 1986, 23(1): 69–96.

NON-LOCAL CURVE FLOW IN THE PLANE AND ITS APPLICATION

LIU Zhi-shuai, YANG Zi-qiu, GUO Shun-zi

(Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China)

Abstract: In this paper, we study a family of non-local curve flows in the Euclidean plane, which remain convex and $\int_0^{2\pi} k d\theta$ invariant during evolution if and when the initial curve is a closed convex curve. Using the principle of compressed mapping, we obtain the uniqueness of the solution. In this paper, we will prove the global existence of this flow and that the length and area of the evolution curve are non-increasing. We will also show that the evolution curve converges to a finite circle in the limit state. As an application of this flow, we will prove three inequalities, with the second inequality extending the inverse isoperimetric inequality.

Keywords: closed convex curve flow; existence; Convergence; curvature

2010 MR Subject Classification: 53A04; 53C44