

四阶伪抛物型方程解的爆破现象

杨春晓, 段晨琰

(西安建筑科技大学理学院, 陕西 西安 710055)

摘要: 本文研究了四阶伪抛物型方程 $u_t + \Delta^2 u + \alpha \Delta u - \omega \Delta u_t = |u|^{q-1}u$ 初边值问题解的存在性. 利用势阱方法, 在低初始能量 $J(u_0) < d$ 时, 给出该问题解的全局存在和爆破的阈值条件. 同时, 估计了爆破解的爆破时间上界.

关键词: 伪抛物型方程; 全局存在; 爆破; 爆破时间

MR(2010) 主题分类号: 35A01; 35K25

中图分类号: O175.4

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2025)05-0400-09

1 引言

本文研究如下四阶伪抛物型方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_t + \Delta^2 u + \alpha \Delta u - \omega \Delta u_t = |u|^{p-1}u, & (x, t) \in \Omega \times (0, T], \\ u = \Delta u = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 Ω 是 \mathbb{R}^n ($n > 2$) 上具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 参数 α, ω 和 p 满足如下条件:

(i) $\alpha < \lambda_1, \omega > 0$, 这里 $\lambda_1 > 0$ 是 $-\Delta$ 在 Dirichlet 边界条件下的第一特征值;

(ii) $1 < p < +\infty$ ($N = 1, 2$) 或 $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ ($N \geq 3$).

伪抛物方程具有非常丰富的物理背景, 四阶抛物型方程可以应用于物理学的许多分支. 如在弹塑性板或梁的理论中, $\alpha \Delta u$ 表示线性应变, $\omega \Delta u_t$ 表示阻尼或强阻尼, 它们对能量的扩散起着重要的作用. 由于阻尼来自于系统与外界的相互作用或自身原因导致的系统能量的逐渐耗散, 在实际问题中往往不可避免, 因此高阶伪抛物方程的研究备受数学家的关注, 具体可参考 [1–7].

在处理初边值问题解的存在性问题时, Payne 和 Sattinger 等人在文 [8] 中提出了势阱方法. 在文 [9, 10] 中, 他们考虑了经典的伪抛物问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \Delta u = u^p, & (x, t) \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

通过构造一组势阱, 得到了解的全局存在和爆破的条件, 并得到整体解的渐近行为. 后来, Luo^[11] 在适当的假设下估计了爆破解的爆破时间的下界和上界. 随后 Xu 和 Zhou^[12] 进一步研究了问题 (1.2), 提出了一个新的爆破条件, 并估计了爆破时间的上界.

*收稿日期: 2024-12-17

接收日期: 2025-03-24

基金项目: 国家自然科学基金资助 (12101482), 陕西省自然科学基金资助 (2021JQ-495).

作者简介: 杨春晓 (1983–), 女, 河北沧州, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程.

E-mail: cxyang@xauat.edu.cn.

对于四阶波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u + \alpha \Delta u - \omega \Delta u_t + \beta u_t = |u|^{p-2} u \log |u|, & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \Delta u(x, t) = 0, & (x, t) \in \Omega \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, t \geq 0, \end{cases}$$

Li 和 Fang^[13] 建立了低初始能量 $J(0) \leq d$ 和高初始能量 $J(0) > d$ 下解的渐近行为.

本文考虑四阶伪抛物型问题 (1.1), 给出了低初始能量 $J(u_0) \leq d$ 下解的整体存在与爆破的条件, 并估计爆破时间的上界.

2 准备工作

本节给出文中涉及到的一些记号和引理.

2.1 范数的定义

用 $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) 表示 $L^p(\Omega)$ 范数, 用 $\|\cdot\|_{H_0^1}$ 表示具有齐次 Dirichlet 边值的 H_0^1 范数, 用 (u, v) 表示 $L^2(\Omega)$ 内积 $\int_{\Omega} uv$. 记 $(u, v)_* = (u, v) + \omega(\nabla u, \nabla v)$, 相应地, $\|u\|_* = (u, u)_*^{\frac{1}{2}} = (\|u\|_2^2 + \omega\|\nabla u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$. 显然, 当 $\omega > 0$ 时, $\|\cdot\|_*$ 等价 $\|\cdot\|_{H_0^1}$.

记 λ_k ($k = 1, 2, \dots$) 和 Φ_k ($k = 1, 2, \dots$) 分别表示问题

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

的特征值和对应的特征函数. 众所周知, λ_k 满足 $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow \infty$), 且

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \quad (2.1)$$

因

$$\Delta^2 u + \alpha \Delta u = \Delta(\Delta u + \alpha u) = (\alpha - \lambda) \Delta u = \lambda(\lambda - \alpha)u, \quad (2.2)$$

从而特征值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \alpha \Delta u = \mu u, & x \in \Omega, \\ u = \Delta u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

有无穷多个特征值 μ_k 且 $\mu_k = \lambda_k(\lambda_k - \alpha)$. 记 $\mathcal{H} = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) | \Delta u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, 赋予内积

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = (\Delta u, \Delta v) - \alpha(\nabla u, \nabla v),$$

构成一 Hilbert 空间. 相应地, 空间 \mathcal{H} 上的范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ 为

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = (u, u)_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} = (\|\Delta u\|_2^2 - \alpha\|\nabla u\|_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

在式 (2.2) 两边同乘 u 并在 Ω 上积分, 有

$$\|u\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\Delta u\|_2^2 - \alpha\|\nabla u\|_2^2 \geq (\lambda_1 - \alpha)\|\nabla u\|_2^2. \quad (2.3)$$

由此结合 (2.1), 可以知道

$$\mu_1 := \inf_{u \in H(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{\mathcal{H}}^2}{\|u\|_2^2}. \quad (2.4)$$

文中, 用 C 和 $C_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 表示正常数, 它们可能在不同的位置表示不同的数值.

引理 2.1 对 $u \in \mathcal{H}$, $1 < r < \frac{2N}{N-2} (N > 2)$, 存在常数 C_0 , 使得

$$\|u\|_r \leq C_0 \|u\|_{\mathcal{H}}.$$

证 利用 Sobolev 嵌入定理 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, 并结合 (2.3) 和 (2.4) 可得

$$\|u\|_r^2 \leq C \|u\|_{H_0^1}^2 = C \|u\|_2^2 + C \|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{C}{\mu_1} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\lambda_1 - \alpha} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_0^2 \|u\|_{\mathcal{H}}^2,$$

其中 $C_0^2 = \left(\frac{C}{\mu_1} + \frac{C}{\lambda_1 - \alpha} \right)$.

2.2 弱解的定义

定义 1 (弱解) 设 $u_0(x) \in \mathcal{H}$. 若函数 $u \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$ 且 $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ 满足

$$(u_t, v)_* + (u, v)_{\mathcal{H}} = (|u|^{p-1}u, v), \quad \forall v \in \mathcal{H}, t \in (0, T), \quad (2.5)$$

且 $u(x, 0) = u_0(x)$, 则称 u 为问题 (1.1) 的弱解. 特别地, 如果弱解 u 对于任意 $T > 0$ 都成立, 则称 $u(x, t)$ 是问题 (1.1) 的全局 (弱) 解.

命题 2.1 (解的局部存在性) 设 $u_0(x) \in \mathcal{H}$, 则存在一个 T_0 使得问题 (1.1) 存在唯一的弱解 $u \in L^\infty(0, T_0; \mathcal{H})$ 且 $u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

解的局部存在性和唯一性可通过 Galerkin 逼近法得到, 参见 [13]. 具体证明过程在此略去.

定义 2 (解的最大存在时间) 设 $u(t)$ 是方程 (1.1) 的一个弱解. $u(t)$ 的最大存在时间 T 定义如下,

- (i) 若 $0 \leq t < \infty$ 时, $u(t)$ 都存在, 则 $T = +\infty$;
- (ii) 若存在 $t_0 \in [0, \infty)$, 使得 $u(t)$ 在 $0 \leq t < t_0$ 存在, 但在 $t = t_0$ 处不存在, 则 $T = t_0$.

定义 3 (有限时刻爆破) 设 $u(t)$ 是方程 (1.1) 的一个弱解, 如果最大存在时间 $T < +\infty$ 且 $\lim_{t \rightarrow T^-} (\int_0^t \|u\|_*^2 d\tau) = +\infty$, 我们称 $u(x, t)$ 有限时刻 T 发生爆破.

2.3 势阱的定义及性质

定义能量泛函

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1}, \quad (2.6)$$

$$I(u) = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \|u\|_{p+1}^{p+1}. \quad (2.7)$$

相应地 Nehari 流形 $\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{H} \setminus \{0\} | I(u) = 0\}$, 势阱深度 $d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u)$. 显然

$$J(u) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{p+1} I(u). \quad (2.8)$$

此外, 定义集合

$$\begin{aligned} W &= \{u \in \mathcal{H} | I(u) > 0, J(u) < d\} \cup \{0\}, \\ V &= \{u \in \mathcal{H} | I(u) < 0, J(u) < d\}. \end{aligned}$$

在 (1.1) 方程两边同乘 u_t 并在 Ω 上积分, 有 $\frac{d}{dt} J(u) = -\|u_t\|_*^2 \leq 0$. 再关于 t 积分,

$$\int_0^t \|u_\tau\|_*^2 d\tau + J(u) = J(u_0). \quad (2.9)$$

引理 2.2 设 $u \in \mathcal{H}$ 且 $\|u\|_2 \neq 0$, 则下列结论成立,

- (i) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} J(\lambda u) = 0, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} J(\lambda u) = -\infty$;
- (ii) 存在唯一 $\lambda^* = \lambda^*(u) > 0$ 使得 $\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u)|_{\lambda=\lambda^*} = 0$, 且 $J(\lambda u)$ 在 $0 < \lambda < \lambda^*$ 上严格单调递增, 在 $\lambda^* < \lambda < +\infty$ 上严格单调递减, 且当 $\lambda = \lambda^*$ 时达到最大;
- (iii) 当 $0 < \lambda < \lambda^*$ 时 $I(\lambda u) > 0$, 当 $\lambda^* < \lambda < +\infty$ 时 $I(\lambda u) < 0$ 且 $I(\lambda^* u) = 0$.

证 (i) 根据 (2.6) 中 $J(u)$ 的定义,

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{\lambda^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1}.$$

对于 $p > 1$ 结论显然成立.

(ii) 经计算

$$\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) = \lambda \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \lambda^p \|u\|_{p+1}^{p+1} = \lambda (\|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \lambda^{p-1} \|u\|_{p+1}^{p+1}).$$

令

$$\lambda^* = \left(\frac{\|u\|_{\mathcal{H}}^2}{\|u\|_{p+1}^{p+1}} \right)^{\frac{1}{p-1}} > 0,$$

结论显然成立.

(iii) 因

$$I(\lambda u) = \lambda^2 \|u\|_{\mathcal{H}}^2 - \lambda^{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} = \lambda \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u),$$

由 (ii) 可得相应结论.

引理 2.3 设 $u(x, t)$ 是问题 (1.1) 的弱解, 且 $u_0(x) \in \mathcal{H}$.

- (i) 如果 $u_0 \in W$, 则 $u(t) \in W$, 且对于 $t \in [0, T)$, $\frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 < d$
- (ii) 如果 $u_0 \in V$, 则 $u(t) \in V$, 且对于 $t \in [0, T)$, $\frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 > d$.

证 (i) 当 $u_0 \in W$ 时, 由 (2.9) 可知 $J(u) < d$. 下面只需证明 $I(u) > 0$. 利用反证法, 假设结论不成立, 则存在 $t_0 \in (0, T)$ 使得 $I(u(t_0)) = 0$ 且当 $t \in [0, t_0)$ 时, $I(u) > 0$. 从而

$u(t_0) \in \mathcal{N}$. 根据 d 的定义 $J(u(t_0)) \geq d$, 与 $J(u) < d$ 矛盾. 因此, 当 $t \in [0, T)$ 时, $u(t) \in W$. 即 $J(u) < d, I(u) > 0$. 因此由 (2.8) 可知

$$\frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 < \frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{p} I(u) = J(u) < d.$$

(ii) 类似可得当 $u_0 \in V$ 时, $u(t) \in V$. 根据 2.2 (iii), 当 $I(u) < 0$ 时, 存在 $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, 使得 $I(\bar{\lambda}u) = 0$, 即 $\bar{\lambda}u \in \mathcal{N}$. 由 (2.8), 可得

$$\frac{p-1}{2(p+1)} \|u\|_{\mathcal{H}}^2 > \frac{p-1}{2(p+1)} \|\bar{\lambda}u\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{p} I(\bar{\lambda}u) = J(\bar{\lambda}u) \geq d.$$

引理 2.4 ^[14] 对于 $\theta > 0$, 若函数 $\varphi(t)$ 二次可微且满足不等式

$$\varphi''(t)\varphi(t) - (1+\theta)(\varphi'(t))^2 \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

且 $\varphi(0) > 0, \varphi'(0) > 0$, 则 $\varphi(t)$ 在 T 时刻爆破, 且 $T \leq \frac{\varphi(0)}{\theta\varphi'(0)} < +\infty$.

3 解的全局存在性

定理 1 设 $u_0 \in \mathcal{H}$, 且 $u_0 \in W$, 则问题 (1.1) 有唯一全局弱解 $u \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{H}), u_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$.

证 首先用 Galerkin 逼近法证明弱解 u 的全局存在性. 选择空间 $H_0^2(\Omega)$ 上的一组正规正交基 $\omega_j(x)$. 构造问题 (1.1) 的近似解

$$u^m(x, t) = \sum_{j=1}^m g_j^m(t) \omega_j(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

满足

$$(u_t^m, \omega_j)_* + (u^m, \omega_j)_{\mathcal{H}} = (|u^m|^{p-1} u^m, \omega_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.1)$$

和

$$u^m(x, 0) = \sum_{j=1}^m b_j^m \omega_j \rightarrow u_0(x), \quad \text{于 } \mathcal{H}(\Omega). \quad (3.2)$$

问题 (3.1), (3.2) 局部解的存在性可由 Peano 定理得到. 在 (3.1) 两边乘以 $\frac{d}{dt} g_j^m(t)$, 并对 $j = 1, 2, \dots, m$ 求和, 且关于 t 积分, 可得

$$\int_0^t \|u_\tau^m\|_*^2 d\tau + J(u^m) = J(u^m(0)), \quad 0 \leq t < \infty.$$

在 $\mathcal{H}(\Omega)$ 中, $u^m(x, 0) \rightarrow u_0(x) (m \rightarrow \infty)$, 且 $u_0 \in W$, 因此 $m \rightarrow \infty$ 时

$$J(u^m(x, 0)) \rightarrow J(u_0(x)) < d, \quad I(u^m(x, 0)) \rightarrow I(u_0(x)) > 0.$$

所以, 对足够大的 m ,

$$\int_0^t \|u_\tau^m\|_*^2 d\tau + J(u^m) = J(u^m(x, 0)) < d, \quad I(u^m(x, 0)) > 0, \quad (3.3)$$

从而 $u^m(x, 0) \in W$. 根据引理 2.3(i), $u^m(x, t) \in W$. 故 $I(u^m(x, t)) > 0$,

$$J(u^m) = \frac{p-1}{2(p+1)} \|u^m\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{p+1} I(u^m) > \frac{p-1}{2(p+1)} \|u^m\|_{\mathcal{H}}^2.$$

结合 (3.3), 有

$$\int_0^t \|u_\tau^m\|_*^2 d\tau + \frac{p-1}{2(p+1)} \|u^m\|_{\mathcal{H}}^2 < d.$$

因此,

$$\|u^m\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{2d(p+1)}{p-1}, \quad \text{且} \quad \int_0^t \|u_\tau^m\|_*^2 d\tau < d, \quad 0 \leq t < \infty.$$

根据引理 2.1, 和引理 2.3(i),

$$\| |u^m|^{p-1} u^m \|_{\frac{p+1}{p}} = \|u^m\|_{p+1}^p \leq C_0^p \left(\frac{2(p+1)}{p-1} d \right)^{\frac{p}{2}}, \quad 0 \leq t < \infty.$$

因此, 存在子序列 $\{u^m\}$ 和函数 $u \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{H})$ 且 $u_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H_0^1(\Omega))$ 使得当 $m \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{cases} u^m \rightarrow u & \text{弱收敛于 } L^\infty(0, \infty; \mathcal{H}(\Omega)), \\ u_t^m \rightarrow u_t & \text{弱收敛于 } L^2(0, \infty; L^*(\Omega)), \\ |u^m|^{p-1} u^m \rightarrow |u|^{p-1} u & \text{收敛于 } L^{\frac{p+1}{p}}(\Omega \times (0, \infty)). \end{cases}$$

对任意 j , 令 $m \rightarrow \infty$, 由 (3.1) 可得,

$$(u_t, \omega_j)_* + (u, \omega_j)_{\mathcal{H}} = (|u|^{p-1} u, \omega_j).$$

因此, 对任意 $l_j(t) \in C^1([0, T])$, 令

$$v(x, t) = \sum_{j=1}^m l_j(t) \omega_j(x) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}(\Omega)), \quad (3.4)$$

有 $(u_t, v)_* + (u, v)_{\mathcal{H}} = (|u|^{p-1} u, v)$. 由于 (3.4) 中的函数 v 在 $L^2(0, T; \mathcal{H}(\Omega))$ 是稠密的, 从而极限函数 u 是问题 (1.1) 的弱解.

接下来, 证明有界解的唯一性. 假设 u 和 v 都是问题 (1.1) 的有界弱解, 则对任意 $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$,

$$(u_t, \varphi)_* + (u, \varphi)_{\mathcal{H}} = (|u|^{p-1} u, \varphi),$$

和

$$(v_t, \varphi)_* + (v, \varphi)_{\mathcal{H}} = (|v|^{p-1} v, \varphi).$$

令 $\varphi = u - v \in \mathcal{H}(\Omega)$, 上两式相减, 且 t 从 $(0, t)$ 积分, 则有

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{d\tau} \|\varphi\|_*^2 d\tau + \int_0^t \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} (|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v)(u - v) dx d\tau. \quad (3.5)$$

由中值定理, 存在 $\theta \in (0, 1)$, $\xi = \theta u + (1 - \theta)v$, 使得 $|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v = p\xi^{p-1}(u - v) \leq C(u - v)$. 由 (3.5) 可得

$$\|\varphi(x, t)\|_2^2 \leq \|\varphi(x, t)\|_*^2 \leq C \int_0^t \|\varphi(x, t)\|_2^2 dt,$$

又 $\varphi(x, 0) = 0$, 由 Gronwall's 不等式,

$$\|\varphi(x, t)\|_2^2 = 0,$$

这意味着, 在 $\Omega \times (0, \infty)$ 中, $\varphi = 0$ 几乎处处成立. 从而证得有界解的唯一性.

4 有限时刻爆破

定理 2 设 u 是问题 (1.1) 在 $u_0(x) \in \mathcal{H}(\Omega)$ 时的弱解. 如果 $u_0 \in V$, 则存在有限时间 T 使得 u 在时刻 T 发生爆破, 且

$$T \leq \frac{4\|u_0\|_*^2}{(p-1)^2(d - J(u_0))}.$$

证 利用 Levine 的凹性理论. 对足够大的 $\tilde{T} > 0$, 令

$$M(t) = \int_0^t \|u\|_*^2 d\tau + (\tilde{T} - t)\|u_0\|_*^2 + a(t + b)^2, \quad 0 < t < \tilde{T},$$

这里的参数 $a, b > 0$ 在下面被确定. 经计算 $M'(t) = \|u\|_*^2 - \|u_0\|_*^2 + 2a(t + b) = \int_0^t \frac{d}{d\tau} \|u\|_*^2 d\tau + 2a(t + b)$. 在式 (2.5) 中取 $v = u$, 则 $\frac{d}{dt} \|u\|_*^2 = 2\|u\|_{p+1}^{p+1} - 2\|u\|_{\mathcal{H}}^2$. 由 (2.7), (2.8), (2.9), 并根据引理 2.3(ii), 可得

$$\begin{aligned} M''(t) &= \frac{d}{dt} \|u\|_*^2 + 2a = 2\|u\|_{p+1}^{p+1} - 2\|u\|_{\mathcal{H}}^2 + 2a = -2I(u) + 2a \\ &= (p-1)\|u\|_{\mathcal{H}}^2 - 2(p+1)J(u) + 2a \\ &> 2(p+1)d + 2(p+1) \left(\int_0^t \|u_{\tau}\|_*^2 d\tau - J(u_0) \right) + 2a \\ &= 2(p+1)(d - J(u_0)) + 2(p+1) \int_0^t \|u_{\tau}\|_*^2 d\tau + 2a \\ &> 2(p+1)(d - J(u_0)) + 2(p+1) \int_0^t \|u_{\tau}\|_*^2 d\tau. \end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式可得,

$$\int_0^t \frac{d}{dt} \|u\|_*^2 dt = 2 \int_0^t (u, u_{\tau})_* d\tau \leq 2 \int_0^t \|u\|_* \|u_{\tau}\|_* d\tau \leq 2 \left(\int_0^t \|u\|_*^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u_{\tau}\|_*^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此,

$$\begin{aligned} (M'(t))^2 &= 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{dt} \|u\|_*^2 dt + a(t+b) \right)^2 \\ &\leq 4 \left(\int_0^t \|u\|_*^2 d\tau + a(t+b)^2 \right) \left(\int_0^t \|u_\tau\|_*^2 d\tau + a \right) \\ &= 4 (M(t) - (\tilde{T} - t) \|u_0\|_*^2) \left(\int_0^t \|u_\tau\|_*^2 d\tau + a \right) \\ &\leq 4M(t) \left(\int_0^t \|u_\tau\|_*^2 d\tau + a \right). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &M''(t)M(t) - \frac{p+1}{2}(M'(t))^2 \\ &> M(t) \left(2(p+1)(d - J(u_0)) + 2(p+1) \int_0^t \|u_\tau\|_*^2 d\tau \right) \\ &\quad - M(t) \left(2(p+1) \int_0^t \|u_\tau\|_*^2 d\tau + 2a(p+1) \right) \\ &= 2(p+1)M(t)(d - J(u_0) - a). \end{aligned}$$

选取 $a \in (0, d - J(u_0))$, $M''(t)M(t) - \frac{p+1}{2}(M'(t))^2 > 0$. 又 $M(0) = T\|u_0\|_*^2 + ab^2 > 0$, $M'(0) = 2ab > 0$, 故由引理 2.4 可知 $M(t)$ 在有限时刻 T 爆破, 且

$$T \leq \frac{2M(0)}{(p-1)M'(0)} = \frac{b}{p-1} + \frac{\|u_0\|_*^2}{(p-1)ab} \tilde{T}.$$

取 $\tilde{T} = T$, $b \in \left(\frac{\|u_0\|_*^2}{(p-1)a}, +\infty \right)$, 则 $T \leq \frac{ab^2}{(p-1)ab - \|u_0\|_*^2}$. 令

$$c := ab \in \left(\frac{\|u_0\|_*^2}{(p-1)a}, (d - J(u_0))b \right),$$

上式可写为

$$T \leq \frac{bc}{(p-1)c - \|u_0\|_*^2} =: g_1(b, c). \quad (4.1)$$

因为函数 $g_1(b, c)$ 关于 c 连续单调递减, 因此

$$\inf_c g_1(b, c) = g_1(b, (d - J(u_0))b) = \frac{(d - J(u_0))b^2}{(p-1)(d - J(u_0))b - \|u_0\|_*^2} =: g_2(b).$$

函数 $g_2(b)$ 在 $b^* = \frac{2\|u_0\|_*^2}{(p-1)(d - J(u_0))}$ 时取到最小值, 由 (4.1) 可知

$$T \leq g_2(b^*) = \frac{4\|u_0\|_*^2}{(p-1)^2(d - J(u_0))}.$$

参 考 文 献

- [1] J. Barrow, P. Parsons. Inflationary models with logarithmic potentials[J]. Phys. Rev. D, 1995, 52: 5576–5587.
- [2] K. Enqvist, J. McDonald. Q-balls and baryogenesis in the MSSM[J]. Phys. Lett. B, 1998, 425: 309–321.
- [3] L.J. An. Loss of hyperbolicity in elastic-plastic material at finite strains[J]. SIAM J. APPL. Math. 1993, 53(3): 621–654.
- [4] L. J. An, A. Peirce. A weakly nonlinear analysis of elasto-plastic-microstructure model[J]. SIAM J. Appl. Math, 1995, 55: 136–155.
- [5] 杜玉阁, 田书英. 一类带粘性项的抛物方程解的存在性和爆破性 [J]. 数学杂志, 2022, 42(01): 73–83.
- [6] 容跃堂, 樊彩虹. 一类带有非局部源的退化反应扩散方程组解的整体存在与爆破 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(01): 39–46.
- [7] 包爱国, 吴国荣. 一类拟线性抛物型方程解的爆破时间的下界 (英文)[J]. 数学杂志, 2021, 41(02): 109–114.
- [8] Payne L E, Sattinger D H. Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations[J]. Israel Journal of Mathematics, 1975, 22(3): 273–303.
- [9] Liu W, Yu J. A note on blow-up of solution for a class of semilinear pseudo-parabolic equations[J]. Journal of Functional Analysis, 2018, 274(5): 1276–1283.
- [10] Xu R, Su J. Global existence and finite time blow-up for a class of semilinear pseudo-parabolic equations[J]. Journal of Functional Analysis, 2013, 264(12): 2732–2763.
- [11] Luo P. Blow up phenomena for a pseudo-parabolic equation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(12): 2636–2641.
- [12] Xu G, Zhou J. Lifespan for a semilinear pseudo-parabolic equation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(2): 705–713.
- [13] Xiatong Li, Zhong Bo Fang. Blow-up phenomena for a damped plate equation with logarithmic nonlinearity[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume, 2023, 71: 1468–1218.
- [14] H. A. Levine. Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_t = -AU + F(u)$ [J]. Trans. Amer. Math. Soc, 1974, 192: 1–21.

BLOW-UP PHENOMENA FOR FOURTH ORDER PESUDO-PARABOLIC EQUATION

YANG Chun-xiao, DUAN Chen-yan

(School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: This paper considers a initial-boundary value problem for four-order pseudo-parabolic equation $u_t + \Delta^2 u + \alpha \Delta u - \omega \Delta u_t = |u|^{q-1}u$. By applying potential well argument, we obtain the global existence and blow-up of solutions for the low initial energy $J(u_0) < d$. Meanwhile, the upper bound of blow-up time is estimated.

Keywords: pseudo-parabolic equation; global existence; blow-up; blow-up time

2010 MR Subject Classification: 35A01; 35K25