

## 对褐点石斑鱼模型波串解问题的研究

吴亚运

(合肥师范学院数学与统计学院, 安徽 合肥 230601)

**摘要:** 本文研究了具有空间扩散项的年龄结构模型的周期波串解存在性问题. 利用积分半群、Hopf 分支理论及二阶半线性抽象微分方程扰动方法, 获得了褐点石斑鱼模型周期波串解存在性的结果, 推广了年龄结构模型的分支问题及周期波串解问题的结果.

**关键词:** 年龄结构; 扩散方程; 非稠定柯西问题; Hopf 分支; 周期波串解

MR(2010) 主题分类号: 34C23; 34K13; 37L10; 92D25

中图分类号: O193

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2025)04-0349-16

### 1 引言

褐点石斑鱼 (*Epinephelus fuscoguttatus*) 主要分布于红海、琉球群岛、澳大利亚、台湾岛以及南海诸岛等海域 [5]. 石斑鱼由于自身的繁殖特性, 例如成熟期相比多数鱼类较长, 产卵聚集, 对产卵环境有特定要求, 再加上近年来环境污染、远洋捕捞等原因, 其种群数量在自然海域中逐年递减. 为了满足商业捕捞需求以及避免对环境的破坏, 人工繁育已经必不可少.

褐点石斑鱼为雌雄同体, 具有性别转换特征. 首次性成熟时全为雌性, 作为雌鱼参与繁殖, 一段时间后, 雌鱼开始性逆转为雄性. 因此, 在自然水域中生活的鱼群, 雌雄性别比例相对稳定. 褐点石斑鱼成熟个体产卵分为三个周期: 前期, 中期和后期. 中期为产卵盛期, 所产卵数可以占总产卵数的一半以上. 雄鱼产生精子的数量与其对应的年龄阶段有关. 褐点石斑鱼属于体外受精鱼类. 在自然海域中, 鱼卵体外受精率对褐点石斑鱼繁殖率有着重要的影响.

鱼类在繁殖过程中, 育种竞争会通过多种机制体现, 包括获得最佳的繁殖场所以及雄性对雌性繁殖机会的竞争. 为了反映繁殖竞争现象对生物出生的影响, 多种出生函数模型已被提出, 例如, Ricker 出生函数, Beverton-Holt 出生函数以及 S-Beverton-Holt 出生函数 [12]. 对于体外受精鱼类, 繁殖率主要依赖于鱼卵的存活率. 本文假定自然环境中鱼卵的存活率是一定的, 主要考虑受精率对繁殖率的影响. 事实上, 在体外受精鱼类繁殖中, 受精成功与否取决于配子激活后卵的存活、精卵比、受精时间以及精子的质量 [8, 17]. 但是对于褐点石斑鱼而言精卵比一直以来都被认为是影响鱼类繁殖率的关键因素 [17]. 当卵子接触到精子的浓度高于最佳浓度时, 受精率不再随着精子浓度的增加而增加 (图 1). 当精卵比大于最佳的数值时, 受精率可能会受到抑制. 因为当精卵比高于最佳比值时, 受精中会发生多个精子进入同一个卵子的现象, 该卵子不会受精成功更不会正常发育 [7]. 因此精卵比对繁殖率有重要影响.

根据对褐点石斑鱼繁殖特性的分析以及实验数据结果 [8, 9, 17], 本文提出使用 Hill 函数来刻画褐点石斑鱼体外受精率. Hill 函数为:

$$H(x) = \frac{\gamma x^n}{r + x^n}, \quad (1.1)$$

\*收稿日期: 2024-10-20 接收日期: 2024-11-07

基金项目: 高层次人才项目基金资助 (2022rcjj24).

作者简介: 吴亚运 (1990-), 男, 讲师, 主要研究方向: 微分方程. E-mail: wuyfde@sina.com.

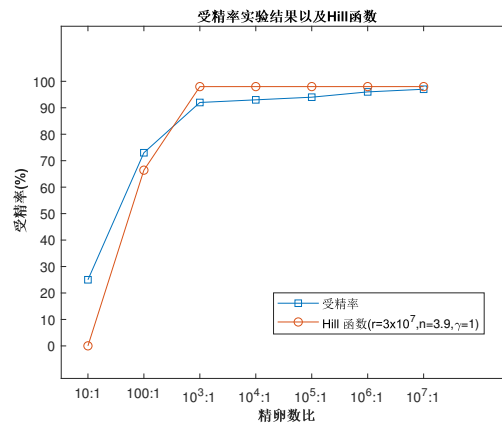


图 1 文献 [17] 中精卵比对受精率影响的实验数据结果以及 Hill 函数拟合.

其中  $x$  代表激活因子的数量或者浓度,  $n, r$  分别代表 Hill 系数和激活系数,  $\gamma$  表示最大产率. Hill 函数最开始由 Hill 在 1910 年提出, 成功的阐释了血红蛋白的氧气结合曲线是  $S$  型的实验现象 [3]. 结合文献 [8, 9, 17] 中的实验数据结果, 可以看出褐点石斑鱼受精过程在细胞层面上也近似符合这一规律.

在褐点石斑鱼的受精过程中, 雄鱼精子产生的数量要远大于卵子产生的数量, 所以我们用精子产生的数量来近似代替精卵比的数值. 由于鱼类的性别转换是稳定的, 故鱼群中雌雄比例是稳定的, 且鱼群产生卵的数量和整体数量存在一定的比例关系. 鱼群中雌性性别转换为雄鱼有一个大致的平均时间, 一般转变时期为三龄鱼期 [10]. 综上分析, 我们建立具有空间扩散的褐点石斑鱼的年龄结构模型:

$$\begin{cases} (\partial_t + \partial_a - \Delta_z)u(t, a, z) = -\mu u(t, a, z), & t \in \mathbb{R}, a > 0, z \in \mathbb{R}^3, \\ u(t, 0, z) = \frac{\alpha \int_0^\infty u(t, a, z) da (\int_0^\infty \beta(a) u(t, a, z) da)^n}{r + (\int_0^\infty \beta(a) u(t, a, z) da)^n}, & n > 1, r > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中  $u(t, a, z)$  表示在时间  $t$  年龄为  $a$  及空间位置  $z$  的褐点石斑鱼的个体密度函数,  $\tau$  表示褐点石斑鱼从出生到转变为雄鱼的平均时间,  $\beta(a)$  为描述年龄为  $a$  的雄性褐点石斑鱼产生精子数量的函数 [15], 满足假设 1. 拉普拉斯算子  $\Delta_z$  表示对空间变量  $z \in \mathbb{R}^3$  的局部扩散.

**假设 1** 设  $\beta(a)$  是具有时滞的  $\Gamma$ - 分布函数,

$$\beta(a) := \begin{cases} \delta(a - \tau) e^{-\zeta(a - \tau)}, & \text{如果 } a \geq \tau, \\ 0, & \text{如果 } a \in (0, \tau), \end{cases}$$

其中  $\tau > 0, \zeta > 0$  是常参数,  $\int_0^\infty \beta(a) e^{-\mu a} da = R$ , 其中  $R \in (0, \infty), \delta = (\mu + \zeta)^2 R e^{\mu\tau} > 0$ .

本文主要考虑系统 (1.2) 的波串解问题. 首先, 设波速为  $c \in \mathbb{R}$  的波串剖面函数为  $(c, U(x, a))$ .  $U(x, a)$  关于变量  $x$  是周期的, 即存在周期  $T > 0$ , 使得  $U(x + T, \cdot) = U(x, \cdot)$ . 对于  $e \in \mathbb{S}^2$ , 函数  $u(t, a, z) := U(z \cdot e + ct, a)$  是系统 (1.2) 的整体解. 则易得  $U(x, a)$  满足如下

方程:

$$\begin{cases} \partial_x^2 U(x, a) - c\partial_x U(x, a) - \partial_a U(x, a) - \mu U(x, a) = 0, & x \in \mathbb{R}, a > 0, \\ U(x, 0) = \frac{\alpha \int_0^\infty U(x, a) da (\int_0^{+\infty} \beta(a) U(x, a) da)^n}{r + \left(\int_0^{+\infty} \beta(a) U(x, a) da\right)^n}. \end{cases} \quad (1.3)$$

把系统 (1.3) 转换为二阶抽象的半线性系统 (具体方法见第 3 节)

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} - \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) + G(v(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

其中  $\varepsilon$  是由波速决定的参数, 当  $\varepsilon$  足够小时, 系统 (1.4) 可以看作是如下方程的扰动系统

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + G(u(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

若能证明系统 (1.5) 在正平衡态附近由 Hopf 分支产生周期解, 且系统 (1.5) 在正平衡态附近产生的 Hopf 现象对系统 (1.4) 是保持的, 则系统 (1.2) 存在周期波串解. 存在周期波串解意味着生物种群数量可以在自然界中的稳定波动变化.

本文安排如下: 第 2 节是对无扩散项年龄结构模型的 Hopf 分支进行研究; 第 3 节是对系统 (1.2) 的波串解进行分析; 第 4 节是数值模拟验证; 最后进行总结.

## 2 无扩散项的年龄结构模型的 Hopf 分支

### 2.1 无扩散项年龄结构方程的非稠定抽象 Cauchy 问题的转化

本节主要研究如下无扩散项的年龄结构方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} = -\mu u(t, a), & t \in \mathbb{R}, a > 0, \\ u(t, 0) = \frac{\alpha \int_0^\infty u(t, a) da (\int_0^{+\infty} \beta(a) u(t, a) da)^n}{r + \left(\int_0^{+\infty} \beta(a) u(t, a) da\right)^n}, \\ u(0, \cdot) = u_0 \in L_+^1((0, +\infty), \mathbb{R}), \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $u(t, a)$  表示在时间  $t$  年龄为  $a$  的个体密度函数. 介于年龄  $a_1$  和  $a_2$  之间的个体数量为:  $\int_{a_1}^{a_2} u(t, a) da$ , 在  $t$  时, 种群数量总和为:  $U(t) = \int_0^\infty u(t, a) da$ . 为了获得系统对参数的连续依赖性, 对系统 (2.1) 进行无量纲处理. 用时间变换  $\hat{t} = t/\tau$ , 年龄变换  $\hat{a} = a/\tau$  来规范化处理系统 (2.1) 中参数  $\tau$ , 并且令  $\hat{u}(\hat{t}, \hat{a}) = \tau u(\tau \hat{t}, \tau \hat{a})$  和  $\hat{\beta}(\hat{a}) = \beta(\tau \hat{a})$ . 经过规范化处理, 为了简化表示, 省去符号的  $\hat{\cdot}$  表示, 则可以获得如下系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, a)}{\partial a} = -\mu \tau u(t, a), & t \in \mathbb{R}, a > 0, \\ u(t, 0) = \frac{\alpha \tau \int_0^\infty u(t, a) da (\int_0^{+\infty} \beta(a) u(t, a) da)^n}{r + \left(\int_0^{+\infty} \beta(a) u(t, a) da\right)^n}, \\ u(0, \cdot) = u_0 \in L_+^1((0, +\infty), \mathbb{R}), \end{cases} \quad (2.2)$$

其中生育函数  $\beta(a)$  为

$$\beta(a) := \begin{cases} \delta\tau(a-1)e^{-\zeta\tau(a-1)}, & \text{如果 } a \geq 1, \\ 0, & \text{如果 } a \in (0, 1). \end{cases}$$

接下来考虑 Banach 空间  $X := \mathbb{R} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R})$ , 范数定义为  $\left\| \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \right\| = |\psi| + \|\varphi\|_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R})}$ ,  $\forall \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \in X$ . 定义线性算子  $A_\tau : D(A_\tau) \subset X \rightarrow X$

$$A_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ -\varphi' - \mu\tau\varphi \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

定义域为:  $D(A_\tau) = \{0\} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R})$ . 定义算子  $F : \overline{D(A_\tau)} \rightarrow X$  为

$$F \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} B(\varphi) \\ 0_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R})} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

其中

$$B(\varphi) = \frac{\alpha \int_0^\infty \varphi(a) da (\int_0^{+\infty} \beta(a) \varphi(a) da)^n}{r + \left( \int_0^{+\infty} \beta(a) \varphi(a) da \right)^n}.$$

接着令  $w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(t, \cdot) \end{pmatrix}$ , 则系统 (2.2) 可以改写为如下非稠定的抽象 Cauchy 问题:

$$\begin{cases} \frac{dw(t)}{dt} = A_\tau w(t) + \tau F(w(t)), & t \geq 0, \\ w_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 \end{pmatrix} \in \overline{D(A_\tau)}. \end{cases} \quad (2.5)$$

关于上述系统解的存在性和唯一性问题可参考文献 [11, 13, 14].

## 2.2 系统的平衡态及线性化方程

接下来, 求系统 (2.5) 的平衡态及线性化方程. 事实上, 假设  $\bar{w}(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u}(a) \end{pmatrix} \in X_0$  为系统 (2.5) 的平衡态, 则有

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u}(a) \end{pmatrix} \in D(A_\tau) \quad \text{和} \quad A_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u}(a) \end{pmatrix} + \tau F \left( \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u}(a) \end{pmatrix} \right) = 0,$$

上述结果等同于如下方程组:

$$\begin{cases} -\bar{u}(0) + \tau B(\bar{u}(a)) = 0, \\ -\bar{u}'(a) - \tau \mu \bar{u}(a) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

求解上述方程, 有

$$\bar{u}(a) = \frac{\tau\alpha \int_0^\infty \bar{u}(a)da (\int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{u}(a)da)^n}{r + \left(\int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{u}(a)da\right)^n} e^{-\mu\tau a}.$$

对  $\bar{u}(a)$  两边在  $[0, +\infty)$  积分以及对 (2.6) 中第一个方程计算, 得到

$$\int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{u}(a)da = \sqrt[n]{\frac{\mu r}{\alpha - \mu}} \quad \text{和} \quad \int_0^{+\infty} \bar{u}(a)da = \frac{(\mu + \zeta)^2 e^{\mu\tau}}{\mu\delta} \sqrt[n]{\frac{\mu r}{\alpha - \mu}}.$$

综合以上计算结果, 可以得到以下结论.

**引理 2.1** 系统 (2.5) 存在边界平衡态  $\bar{w}_0(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R})} \end{pmatrix}$ . 此外存在唯一的正平衡态

$$\bar{w}_\tau(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{u}_\tau(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\tau e^{-\mu\tau a}}{R} \sqrt[n]{\frac{\mu r}{\alpha - \mu}} \end{pmatrix},$$

当且仅当  $\alpha - \mu > 0$ . 相应的, 系统 (2.1) 存在唯一的正平衡态  $\bar{u}_\tau(a) = \frac{\tau e^{-\mu\tau a}}{R} \sqrt[n]{\frac{\mu r}{\alpha - \mu}}$ , 当且仅当  $\alpha - \mu > 0$ .

在接下来的讨论中, 始终假设有如下条件成立.

**假设 2** 设参数  $\mu, \alpha$  取值始终满足  $\alpha > \mu > 0$ .

求出系统 (2.5) 线性化方程. 通过变量替换  $y(t) := w(t) - \bar{w}_\tau(a)$ , 有如下新的方程

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = A_\tau y(t) + \tau F(y(t) + \bar{w}_\tau) - \tau F(\bar{w}_\tau), & t \geq 0, \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_0 - \bar{u}_\tau(a) \end{pmatrix} =: y_0 \in \overline{D(A_\tau)}. \end{cases} \quad (2.7)$$

因此可以写出系统 (2.7) 在平衡态处的线性化方程

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_\tau y(t) + \tau DF(\bar{w}_\tau)y(t), \quad t \geq 0, \quad y(t) \in X_0, \quad (2.8)$$

其中

$$\tau DF(\bar{w}_\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau DB(\bar{u}_\tau)(\varphi) \\ 0_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R})} \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(A_\tau),$$

其中  $DB(\bar{u}_\tau)(\varphi)$  具体为

$$DB(\bar{u}_\tau)(\varphi) = \alpha \left\{ \int_0^\infty \varphi(a)da - r \frac{\int_0^\infty \varphi(a)da [r + (\int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da)^n] - n \int_0^\infty \bar{u}(a)da (\int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da)^{n-1} \int_0^\infty \beta(a)\varphi(a)da}{[r + (\int_0^\infty \beta(a)\bar{u}(a)da)^n]^2} \right\}.$$

然后系统 (2.7) 可以改写为

$$\frac{dy(t)}{dt} = B_\tau y(t) + H(y(t)), \quad t \geq 0, \quad (2.9)$$

其中线性算子  $B_\tau := A_\tau + \tau DF(\bar{w}_\tau)$ . 另外

$$H(y(t)) = \tau F(y(t) + \bar{w}_\tau) - \tau F(\bar{w}_\tau) - \tau DF(\bar{w}_\tau)y(t), \quad (2.10)$$

并且  $H(y(t))$  满足  $H(0) = 0$  和  $DH(0) = 0$ .

### 2.3 特征方程

在这一节中将要求出系统 (2.5) 在平衡态  $\bar{w}_\tau(a)$  处的特征方程. 记  $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > -\mu\tau\}$ . 仿照文献 [18] 中的证明方法, 可以得到如下引理.

**引理 2.2** 对于任意的  $\lambda \in \Omega$  且  $\lambda \in \rho(A_\tau)$ , 有

$$(\lambda I - A_\tau)^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \varphi(a) = e^{-\int_0^a (\lambda + \mu\tau) dt} \eta + \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \mu\tau) dt} \psi(s) ds, \quad (2.11)$$

其中  $\begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix} \in X$  和  $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(A_\tau)$ . 而且  $A_\tau$  是一个 Hille-Yosida 算子并且满足

$$\|(\lambda I - A_\tau)^{-m}\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}(\lambda) + \mu\tau)^m}, \quad \forall \lambda \in \Omega, \quad \forall m \geq 1. \quad (2.12)$$

定义算子  $A_0$  是  $A_\tau$  在  $\overline{D(A_\tau)}$  中的部分, 即  $A_0 : D(A_0) \subset X \rightarrow X$ , 满足  $A_0 x = A_\tau x$ . 对于  $x \in D(A_0) = \{x \in D(A_\tau) : A_\tau x \in \overline{D(A_\tau)}\}$ . 对于任意的  $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(A_0)$ , 有

$$A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{A}_0(\varphi) \end{pmatrix},$$

其中  $\hat{A}_0(\varphi) = -\varphi' - \mu\tau\varphi$ , 定义域为  $D(\hat{A}_0) = \{\varphi \in W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\}$ . 通过以上讨论, 可以得到如下结论.

**引理 2.3** 有界线性算子  $A_0$  是定义在  $\overline{D(A_\tau)}$  上, 是强连续半群  $\{T_{A_0}(t)\}_{t \geq 0}$  的无穷小生成元, 对任意的  $t \geq 0$ , 线性算子  $T_{A_0}(t)$  定义如下

$$T_{A_0}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{T}_{A_0}(t)\varphi \end{pmatrix},$$

其中

$$\hat{T}_{A_0}(t)(\varphi)(a) = \begin{cases} e^{-\mu\tau t} \varphi(a-t), & \text{如果 } a \geq t, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

考虑由  $A_0$  产生的强连续半群的本性增长界. 注意到  $DF(\bar{v}_\tau) : D(A_\tau) \subset X \rightarrow X$  是一个有界紧的线性算子. 则由 (2.12) 式, 可以得到  $\|T_{A_0}(t)\| \leq e^{-\mu\tau t}$ ,  $\forall t \geq 0$ . 又由本性增长界的定义 [1], 则有  $\omega_{0,ess}(A_0) \leq \omega_0(A_0) \leq -\mu\tau$ . 结合文献 [2, 16] 中关于算子扰动的方法, 则可以推出如下结论  $\omega_{0,ess}((A_\tau + \tau DF(\bar{w}_\tau))_0) \leq -\mu\tau < 0$ . 综合上述分析, 得如下结论.

**引理 2.4** 由线性算子  $B_\tau$  在  $\overline{D(B_\tau)}$  中的部分  $(B_\tau)_0$  产生的强连续半群的本性增长界是严格负值的, 即  $\omega_{0,ess}((B_\tau)_0) \leq -\mu\tau < 0$ .

令  $\lambda \in \Omega$ , 由于  $(\lambda I - A_\tau)$  是可逆的, 故  $\lambda I - B_\tau$  是可逆的当且仅当  $I - \tau DF(\overline{w}_\tau)(\lambda I - A_\tau)^{-1}$  是可逆的. 事实上

$$\begin{aligned} (\lambda I - B_\tau)^{-1} &= (\lambda I - (A_\tau + \tau DF(\overline{w}_\tau)))^{-1} \\ &= (\lambda I - A_\tau)^{-1} (I - \tau DF(\overline{w}_\tau)(\lambda I - A_\tau)^{-1})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

考虑方程

$$(I - \tau DF(\overline{w}_\tau)(\lambda I - A_\tau)^{-1}) \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \psi \end{pmatrix}.$$

可以推出

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} - \tau DF(\overline{w}_\tau)(\lambda I - A_\tau)^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \psi \end{pmatrix}.$$

由引理 2.2 的结论, 可以推出

$$\begin{cases} \eta - \tau DB(\overline{u}_\tau) \left( e^{-\int_0^a (\lambda + \mu\tau) dl} \eta + \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \mu\tau) dl} \varphi(s) ds \right) = \gamma, \\ \varphi = \psi, \end{cases}$$

等价于

$$\begin{cases} \eta - \tau DB(\overline{u}_\tau) \left( e^{-\int_0^a (\lambda + \mu\tau) dl} \eta \right) = \gamma + \tau DB(\overline{u}_\tau) \left( \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \mu\tau) dl} \varphi(s) ds \right), \\ \varphi = \psi. \end{cases}$$

把  $DB(\overline{u}_\tau)$  的表达式带入上式进行运算, 获得

$$\begin{cases} \Delta(\lambda)\eta = \gamma + K(\lambda, \psi), \\ \varphi = \psi, \end{cases}$$

其中

$$\Delta(\lambda) = 1 - \tau DB(\overline{u}_\tau) \left( e^{-\int_0^a (\lambda + \mu\tau) dl} \right), \quad (2.14)$$

和

$$K(\lambda, \psi) = \tau DB(\overline{u}_\tau) \left( \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \mu\tau) dl} \psi(s) ds \right). \quad (2.15)$$

当  $\Delta(\lambda)$  满足可逆条件时, 则有  $\eta = (\Delta(\lambda))^{-1}(\gamma + K(\lambda, \psi))$ . 由以上讨论以及结合 [19] 中引理 3.5 的证明结论, 可获得以下结果.

**引理 2.5** 有如下结果成立:

$$(i) \sigma(B_\tau) \cap \Omega = \sigma_p(B_\tau) \cap \Omega = \{\lambda \in \Omega : \det(\Delta(\lambda)) = 0\};$$

(ii) 如果  $\lambda \in \rho(B_\tau) \cap \Omega$ , 可以有预解式

$$(\lambda I - B_\tau)^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

其中

$$\psi(a) = e^{-\int_0^a (\lambda + \mu\tau) dl} (\Delta(\lambda))^{-1} [\gamma + K(\lambda, \varphi)] + \int_0^a e^{-\int_s^a (\lambda + \mu\tau) dl} \varphi(s) ds,$$

这里  $\Delta(\lambda)$  和  $K(\lambda, \varphi)$  由 (2.14) 式和 (2.15) 式分别给出.

利用上述结论求特征方程. 由假设 1 可知

$$\int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-\int_0^a (\lambda + \mu\tau) dl} da = \frac{\delta\tau e^{-(\lambda + \mu\tau)}}{(\zeta\tau + \lambda + \mu\tau)^2}. \quad (2.17)$$

由 (2.14) 和 (2.17) 式, 可以得到在平衡态  $\bar{\omega}_\tau(a)$  处的特征方程:

$$\det(\Delta(\lambda)) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu\tau} - \frac{n(\alpha - \mu)}{\alpha} \frac{e^{-\lambda\tau^2}(\zeta + \mu)^2}{(\zeta\tau + \lambda + \mu\tau)^2} := \frac{\tilde{f}(\lambda)}{\tilde{g}(\lambda)} \quad (2.18)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda) &= \lambda(\zeta\tau + \lambda + \mu\tau)^2 - \frac{n(\alpha - \mu)}{\alpha} e^{-\lambda\tau^2}(\zeta + \mu)^2(\lambda + \mu\tau), \\ \tilde{g}(\lambda) &= (\lambda + \mu\tau)(\zeta\tau + \lambda + \mu\tau)^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

令  $\lambda = \tau z$ , 可以获得

$$\tilde{f}(\lambda) = \tilde{f}(\tau z) := \tau^3 f(z) = \tau^3 [z^3 + pz^2 + qz - k(z + h)e^{-z\tau}], \quad (2.20)$$

其中  $f(z) := z^3 + pz^2 + qz - k(z + h)e^{-\tau z}$  以及

$$\begin{aligned} p &= 2(\mu + \zeta), \quad q = (\mu + \zeta)^2, \\ k &= \frac{n(\alpha - \mu)}{\alpha} (\mu + \zeta)^2, \quad h = \mu. \end{aligned} \quad (2.21)$$

综合以上的论述得到:  $\{\lambda \in \Omega : \det(\Delta(\lambda)) = 0\} = \{\lambda = \tau z \in \Omega : f(z) = 0\}$ .

## 2.4 关于 Hopf 分支的结果

选择褐点石斑鱼雌鱼转变为雄鱼的时间  $\tau$  作为分支参数, 来讨论系统 (2.5) 的 Hopf 分支的存在性问题. 由 (2.20) 式, 我们有

$$f(z) = z^3 + pz^2 + qz - k(z + h)e^{-z\tau}, \quad (2.22)$$

其中  $p, q, k, h$  由 (2.21) 式给出. 显然  $z = 0$  不是 (2.22) 的根. 令  $z = i\omega$ ,  $\omega > 0$  是方程  $f(z) = 0$  的一个纯虚根, 推出  $-i\omega^3 - p\omega^2 + iq\omega - k(i\omega + h)e^{-i\omega\tau} = 0$ . 分离实部和虚部, 可以得到

$$\begin{cases} q\omega - \omega^3 = k[\omega \cos(\omega\tau) - h \sin(\omega\tau)], \\ -p\omega^2 = k[h \cos(\omega\tau) + \omega \sin(\omega\tau)]. \end{cases} \quad (2.23)$$

进而有

$$\omega^6 + (p^2 - 2q)\omega^4 + (q^2 - k^2)\omega^2 - k^2h^2 = 0. \quad (2.24)$$

接下来降低方程的次幂. 由于方程中关于  $\omega$  均为偶次幂, 故令  $\sigma = \omega^2$ , 则方程 (2.24) 变为

$$\sigma^3 + (p^2 - 2q)\sigma^2 + (q^2 - k^2)\sigma - k^2h^2 = 0. \quad (2.25)$$

令  $\sigma_1, \sigma_2$  和  $\sigma_3$  为方程 (2.25) 的三个根, 则有如下结论:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -(p^2 - 2q) = -2(\mu + \zeta)^2 < 0, \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = k^2h^2 > 0. \quad (2.26)$$

则由 (2.26) 的结果, 我们可知方程 (2.25) 有且只有一个正实根. 记此正实根为  $\sigma_+$ , 则系统 (2.24) 有唯一的正根  $\omega_+ = \sqrt{\sigma_+}$ . 进一步由 (2.23) 式, 可以知道, 当  $\tau = \tau_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , 方程  $f(z) = 0$  有一对纯虚根, 其中

$$\tau_m = \begin{cases} \frac{1}{\omega_+} \left[ \arccos \frac{-\omega_+^4 + (q - ph)\omega_+^2}{k(\omega_+^2 + h^2)} + 2m\pi \right], & \frac{-p\omega_+^4 + h\omega_+ - hq\omega_+}{k(\omega_+^2 + h^2)} \geq 0, \\ \frac{1}{\omega_+} \left[ 2\pi - \arccos \frac{-\omega_+^4 + (q - ph)\omega_+^2}{k(\omega_+^2 + h^2)} + 2m\pi \right], & \frac{-p\omega_+^4 + h\omega_+ - hq\omega_+}{k(\omega_+^2 + h^2)} < 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

接下来, 我们证明横截条件.

**引理 2.6** 令假设 1 和假设 2 成立, 并且设  $\mu < \zeta$  和

$$\left( \frac{\pi\mu}{\mu + \zeta} \right)^2 \left( \frac{n(\alpha - \mu)}{\alpha} \right)^2 \left[ \frac{n(\alpha - \mu)}{\alpha} - \frac{\zeta^2}{(\mu + \zeta)^2} \right] > 1, \quad (2.28)$$

成立, 则有  $\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=i\omega_+} \neq 0$ . 即  $z = i\omega_+$  是 (2.22) 的单根.

**证** 由 (2.22) 式, 有如下式子

$$\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=i\omega_+} = [3z^2 + 2pz + q - k(1 - \tau_m z - \tau_m h)e^{-z\tau_m}] \Big|_{z=i\omega_+}.$$

利用反证法证明. 假定  $\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=i\omega_+} = 0$ , 然后分离实部和虚部, 结合 (2.23) 式, 可得方程组

$$\begin{cases} 3\omega_+^2 - q + \tau_m p\omega_+^2 = -k \cos(\omega_+ \tau_m), \\ 2p\omega_+ + \tau_m(q\omega_+ - \omega_+^3) = -k \sin(\omega_+ \tau_m). \end{cases} \quad (2.29)$$

两式相除有

$$\tan(\omega_+ \tau_m) = \frac{2p\omega_+ + \tau_m(q\omega_+ - \omega_+^3)}{3\omega_+^2 - q + \tau_m p\omega_+^2}.$$

又由 (2.23) 式, 可得

$$\tan(\omega_+ \tau_m) = \frac{-p\omega_+^3 - h(q\omega_+ - \omega_+^3)}{\omega_+(q\omega_+ - \omega_+^3) - hp\omega_+^2} = \frac{2p\omega_+ + \tau_m(q\omega_+ - \omega_+^3)}{3\omega_+^2 - q + \tau_m p\omega_+^2},$$

整理得

$$\tau_m \omega_+^6 + (p - 3h + \tau_m p^2 - 2q\tau_m)\omega_+^4 + (pq - 2p^2h + \tau_m q^2 + 4qh)\omega_+^2 - hq^2 = 0.$$

结合 (2.24) 式消去  $\tau_m \omega_+^6$  项, 则有

$$(p - 3h)\omega_+^4 + (pq - 2p^2h + 4qh + \tau_m k^2)\omega_+^2 - hq^2 + \tau_m k^2 h^2 = 0. \quad (2.30)$$

接下来找出矛盾. 事实上, 考察上述方程的系数. 由 (2.21) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} p - 3h &= 2\zeta - \mu, \\ pq - 2p^2h + 4qh &= 2(\mu + \zeta)^2(\zeta - \mu), \\ -hq^2 + \tau_m k^2 h^2 &= \mu(\mu + \zeta)^4 \left[ \tau_m \frac{\mu n^2 (\alpha - \mu)^2}{\alpha^2} - 1 \right]. \end{aligned}$$

利用假设条件以及  $\tau_m > 0$ , 可以得到  $p - 3h > 0$ ,  $pq - 2p^2h + 4qh + \tau_m k^2 > 0$ . 又由 (2.27), 可以推知  $\tau_m > \tau_0$ . 事实上, 由已知当  $x \in [0, 1)$  时, 有  $\arcsin(x) \leq \pi x/2$  成立. 则由 (2.23) 式当  $\cos(\omega_+ \tau) = \frac{-\omega_+^4 + (q-ph)\omega_+^2}{k(\omega_+^2 + h^2)} \in [0, 1)$  时, 利用假设条件 (2.28) 式和条件  $\omega_+ > 0$ , 则有

$$\begin{aligned} \tau_m \frac{\mu n^2 (\alpha - \mu)^2}{\alpha^2} - 1 &> \tau_0 \frac{\mu n^2 (\alpha - \mu)^2}{\alpha^2} - 1 \\ &= \frac{\mu n^2 (\alpha - \mu)^2}{\omega_+ \alpha^2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( \frac{\alpha \omega_+^2 (\zeta^2 - \mu^2 - \omega_+^2)}{n(\alpha - \mu)(\mu + \zeta)^2 (\omega_+^2 + \mu^2)} \right) \right) - 1 \\ &> \frac{\mu n^2 (\alpha - \mu)^2}{\omega_+ \alpha^2} \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\alpha \omega_+^2 (\zeta^2 - \mu^2 - \omega_+^2)}{n(\alpha - \mu)(\mu + \zeta)^2 (\omega_+^2 + \mu^2)} \right) - 1 \\ &> \frac{\mu n^2 (\alpha - \mu)^2}{\omega_+ \alpha^2} \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\alpha (\zeta^2 - \omega_+^2)}{n(\alpha - \mu)(\mu + \zeta)^2} \right) - 1 \\ &= \frac{1}{\omega_+} \left( \frac{\pi \mu n (\alpha - \mu)}{2\alpha} \frac{\omega_+^2}{(\mu + \zeta)^2} - \omega_+ - \frac{\pi \mu n (\alpha - \mu)}{2\alpha} \left( \frac{\zeta^2}{(\mu + \zeta)^2} - \frac{n(\alpha - \mu)}{\alpha} \right) \right) > 0. \end{aligned}$$

当  $\frac{-\omega_+^4 + (q-ph)\omega_+^2}{k(\omega_+^2 + h^2)} \in (-1, 0]$  时, 利用结论:  $\arcsin(x) \leq x, x \in (-1, 0]$  及假设条件 (2.28) 式, 仍然可以得到  $\tau_m \frac{\mu n^2 (\alpha - \mu)^2}{\alpha^2} - 1 > 0$ . 综合上述关于系数的结论以及  $\omega_+ > 0$ , 我们得到结论

$$(p - 3h)\omega_+^4 + (pq - 2p^2h + 4qh + \tau_m k^2)\omega_+^2 - hq^2 + \tau_m k^2 h^2 > 0,$$

这个结果与 (2.30) 式产生矛盾, 即假设不成立, 则  $\left. \frac{df(z)}{dz} \right|_{z=i\omega_+} \neq 0$  成立. 证毕.

**引理 2.7** 令假设 1 和假设 2 成立, 并且假设  $n(1 - \mu/\alpha) < 1$  也成立. 记  $z(\tau) = \gamma(\tau) + i\omega(\tau)$  是  $f(z) = 0$  的根且满足  $\gamma(\tau_m) = 0$  和  $\omega(\tau_m) = \omega_+$ , 其中  $\tau_m$  由 (2.27) 式给出. 则有

$$\gamma'(\tau_m) = \left. \frac{d\operatorname{Re}(z)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_m} > 0.$$

**证** 由于  $\frac{d\tau}{dz}$  的实部和  $\frac{dz}{d\tau}$  的实部符号是一致的, 接下来考察  $\frac{d\tau}{dz}$  的实部. 由  $f(z) = z^3 + pz^2 + qz - k(z+h)e^{-\tau z} = 0$ , 可以得到

$$\frac{d\tau}{dz} = \frac{3z^2 + 2pz + q - k(1 - \tau z - \tau h)e^{-\tau z}}{-k(z+h)ze^{-\tau z}},$$

令  $z = i\omega_+$ , 则有

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{dz} \Big|_{z=i\omega_+} &= \frac{3z^2 + 2pz + q}{-k(z+h)ze^{-\tau z}} + \frac{k(1-\tau z - \tau h)e^{-\tau z}}{k(z+h)e^{-\tau z}} \\ &= \frac{[-2p\omega_+ + i(q - 3\omega_+^2)][-p\omega_+^2 - i(q\omega_+ - \omega_+^3)]}{\omega_+[(p\omega_+^2)^2 + (q\omega_+ - \omega_+^3)^2]} - \frac{\omega_+ + ih}{\omega_+(\omega_+^2 + h^2)} + \frac{i\tau}{\omega_+} \\ &= \frac{2p^2\omega_+^3 + (q - 3\omega_+^2)(q\omega_+ - \omega_+^3)}{\omega_+[(p\omega_+^2)^2 + (q\omega_+ - \omega_+^3)^2]} - \frac{1}{\omega_+^2 + h^2} \\ &\quad + \frac{i[-p\omega_+^2(q - 3\omega_+^2) + 2p\omega_+(q\omega_+ - \omega_+^3)]}{\omega_+[(p\omega_+^2)^2 + (q\omega_+ - \omega_+^3)^2]} - \frac{ih}{\omega_+(\omega_+^2 + h^2)} + \frac{i\tau}{\omega_+}. \end{aligned}$$

根据 (2.24) 式, 可知  $(p\omega_+^2)^2 + (q\omega_+ - \omega_+^3)^2 = k^2(\omega_+^2 + h^2)$ . 则有

$$\operatorname{Re} \left( \frac{d\tau}{dz} \Big|_{z=i\omega_+} \right) = \frac{3\omega_+^4 + 2(p^2 - 2q)\omega_+^2 + q^2 - k^2}{k^2(\omega_+^2 + h^2)}.$$

又考虑到 (2.21) 式, 则推出

$$p^2 - 2q = 2(\mu + \zeta)^2 > 0, \quad q^2 - k^2 = (\mu + \zeta)^4 \left[ 1 - \frac{n^2(\alpha - \mu)^2}{\alpha^2} \right] > 0.$$

因此得到

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \left( \frac{d\operatorname{Re}(z)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_m} \right) &= \operatorname{sign} \left( \operatorname{Re} \left( \frac{d\tau}{dz} \Big|_{z=i\omega_+} \right) \right) \\ &= \operatorname{sign} \left( \frac{3\omega_+^4 + 2(p^2 - 2q)\omega_+^2 + q^2 - k^2}{k^2(\omega_+^2 + h^2)} \right) > 0. \end{aligned}$$

证毕.

综合以上结果以及 [18] 中关于非稠定抽象方程 Hopf 分支的结论, 得到如下定理.

**定理 2.8** 令假设 1 和假设 2 成立, 及引理 2.6 和引理 2.7 中的假设条件满足, 则存在由 (2.27) 式给出的  $\tau_m > 0$ , 使得

- (i) 当  $\tau \in [0, \tau_0)$  时,  $f(z) = 0$  的所有根的实部均为负值, 系统 (2.1) 的正平衡态  $\bar{u}(\cdot)$  是局部渐近稳定的;
- (ii) 当  $\tau$  在  $\tau_0$  右侧附近取值时,  $f(z) = 0$  的至少有一个根的实部为正值, 系统 (2.1) 的正平衡态  $\bar{u}(\cdot)$  是不稳定的;
- (iii) 当  $\tau = \tau_m$  时,  $f(z) = 0$  的有一对纯虚根  $\pm i\omega_+$ , 系统 (2.1) 在正平衡态  $\bar{u}(\cdot)$  附近出现 Hopf 分支现象.

### 3 扩散项对模型波串解存在性的影响

本节中, 考虑系统 (1.2) 的周期波串解的存在性. 首先对系统 (1.3) 进行改写. 考虑 Banach 空间:  $X = \mathbb{R} \times L^1(0, \infty)$  及  $X_0 = \{0\} \times L^1(0, +\infty)$ , 定义线性算子  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  如下

$$D(A) = \{0\} \times W^{1,1}(0, \infty) \text{ 和 } A \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ -\varphi' - \mu\varphi \end{pmatrix}.$$

注意到  $X_0 = \overline{D(A)} \neq X$ , 故  $A$  是非稠定算子. 定义如下的非线性算子映射  $G: X_0 \rightarrow X$

$$G \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha \int_0^\infty \varphi(a) da (\int_0^\infty \beta(a) \varphi(a) da)^n}{r + (\int_0^\infty \beta(a) \varphi(a) da)^n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

接着令  $v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ U(x, \cdot) \end{pmatrix}$ , 则系统 (1.3) 变为

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} - c \frac{dv}{dx} + Av(x) + G(v(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

令  $c = \varepsilon^{-1}$ ,  $t = \varepsilon x$  和  $v(x) = \tilde{v}(\varepsilon x)$  带入上式, 为了简便, 这里仍然用  $v$  表示  $\tilde{v}$ , 则 (3.1) 变成

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} - \frac{dv(t)}{dt} + Av(t) + G(v(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

当参数  $\varepsilon$  很小时, 则系统 (3.2) 视为如下系统的扰动系统:

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + G(v(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

记  $v(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(t, \cdot) \end{pmatrix}$ , 则可知系统 (3.3) 是等价于系统 (2.2) 的. 从第二节的讨论中, 可知当满足一定的条件时, 系统 (3.3) 会发生 Hopf 分支现象. 利用文献 [1] 中关于非稠定抽象方程的扰动结论, 可以得出如下定理.

**定理 3.1** 令假设 1 和假设 2 成立, 并且假设引理 2.6 和引理 2.7 中的条件成立, 对于由 (2.27) 式给出的  $\tau_0 > 0$ , 则存在大波速  $c^* > 0$  以及  $\eta^* > 0$ , 使得对于任意  $c \in (c^*, \infty)$ , 存在  $\tau = \tau(c) \in (\tau_0 - \eta^*, \tau_0 + \eta^*)$  使得  $\tau = \tau(c)$  是系统 (3.2) 在平衡态  $\bar{w}_\tau(a)$  附近的 Hopf 分支点.

在满足条件下, Hopf 分支结果在系统 (3.2) 中出现, 则说明系统 (1.3) 存在关于  $x$  周期的  $U(x, \cdot)$ , 进而可以说明系统 (1.2) 存在周期波串解.

#### 4 数值模拟及分析

对系统 (1.3) 和系统 (2.1) 进行数值模拟验证. 选取参数:  $\mu = 0.25$ ,  $R = 0.1118$ ,  $\zeta = 0.32$ ,  $n = 1.028$ ,  $\alpha = 9.0$ ,  $r = 1.36 \times 10^{-8}$  以及初始年龄分布  $u(0, a) = 2.0796 \times 10^{-3} \cdot e^{-1.013a}$ .  $\delta = (\mu + \zeta)^2 Re^{\mu\tau} = (0.25 + 0.32)^2 \times 0.118 \times e^{-0.25 \times 4.052} = 0.1 > 0$ , 假设 1 成立. 通过 (2.25) 式, 利用三次方程的求根公式, 可以算出  $\omega_+ = \sqrt{\sigma_+} \approx 0.5032$  以及临界参数  $\tau_0 \approx 4.0521$ . 验证:  $\alpha = 9.0 > \mu = 0.25$ , 即满足假设 2;  $\mu = 0.25 < \zeta = 0.32$ ,  $(\frac{\pi\mu}{\mu+\zeta})^2 (\frac{n(\alpha-\mu)}{\alpha})^2 [\frac{n(\alpha-\mu)}{\alpha} - \frac{\zeta^2}{(\mu+\zeta)^2}] = (\frac{3.14 \times 0.25}{0.25+0.32})^2 \times (1.028 \times (1 - 0.25/9))^2 [1.028 \times (1 - 0.25/9) - \frac{0.32^2}{(0.25+0.32)^2}] = 1.2964 > 1$ , 又  $\frac{-\omega_+^4 + (q-ph)\omega_+^2}{k(\omega_+^2 + h^2)} = \frac{-0.5032^4 + [(0.25+0.32)^2 - 2 \times (0.25+0.32) \times 0.25] \times 0.5032^2}{1.028 \times (1 - 0.25/9) \times (0.25+0.32)^2 \times (0.5032^2 + 0.25^2)} = -0.5269 \in (-1, 1)$ , 即满足引理 2.6 中假设条件;  $n(1 - \mu/\alpha) - 1 = 1.028 \times (1 - 0.25/9) - 1 = -5.5556 \times 10^{-4} < 0$ , 即满足引理 2.7 中的假设条件. 通过验证, 上述选择的参数是可以使得假设 1 和假设 2 以及引理 2.6 和引理 2.7 中假设条件成立. 与年龄相关的雄性石斑鱼产生精子的变化函数 (如图 2)

$$\beta(a) = \begin{cases} 0.1(a - \tau)e^{-0.32(a-\tau)}, & \text{如果 } a \geq \tau, \\ 0, & \text{如果 } a \in (0, \tau). \end{cases}$$

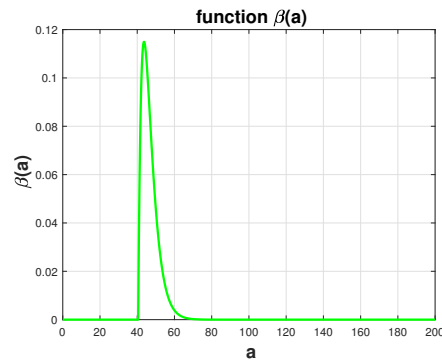


图 2 和年龄相关的雄鱼产生精子的变化函数.

在图 3 中, 选取分叉参数  $\tau = 4.0520 < \tau_0$ , 系统 (2.1) 的正平衡态为  $\bar{u}(a) = 5.2152 \times 10^{-7} \cdot e^{-1.0130a}$  是渐近稳定的. 在图 4 中, 我们选择参数  $\tau = 4.0522 > \tau_0$ , 正平衡态为  $\bar{u}(a) = 5.2152 \times 10^{-7} \cdot e^{-1.0132a}$ . 从图 4 中的结果, 我们可以看到系统 (2.1) 在平衡态附近的解随时间逐渐出现周期震荡行为. 由图 3 和图 4 的数值模拟结果, 验证了第 2 节中论证的结论. 当我们选取分叉参数为  $\tau = 4.0520 < \tau_0$ , 大波速  $c = 10^5$ , 从图 5 显示的结果, 我们可以看到系统 (1.3) 的平衡态是渐近稳定的. 当我们选取参数  $\tau = 4.0522 > \tau_0$ , 大波速  $c = 10^5$ . 图 6 的数值结果说明系统 (1.3) 的平衡态附近的解逐渐趋于周期震荡. 图 5 和图 6 的数值模拟结果, 验证了第 3 节中得到的关于系统 (1.3) 的结论.

通过数值模拟发现大波速存在满足条件的最小下界, 但本文未能从理论上给出证明. 在描述生育函数时, 采用了  $\Gamma$  分布函数. 此生育函数的调整可以直观的反映到数值模拟中, 观察鱼群数量的变化, 存在一个快速增长以及缓慢下降的过程. 这个过程能真实反映鱼群在自然界的繁殖规律.

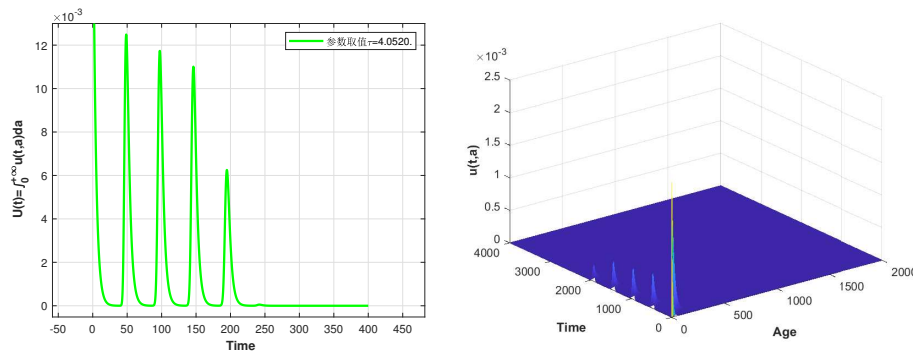


图 3 系统 (2.1) 的数值模拟结果, 其中取  $\tau = 4.0520 < \tau_0$ .

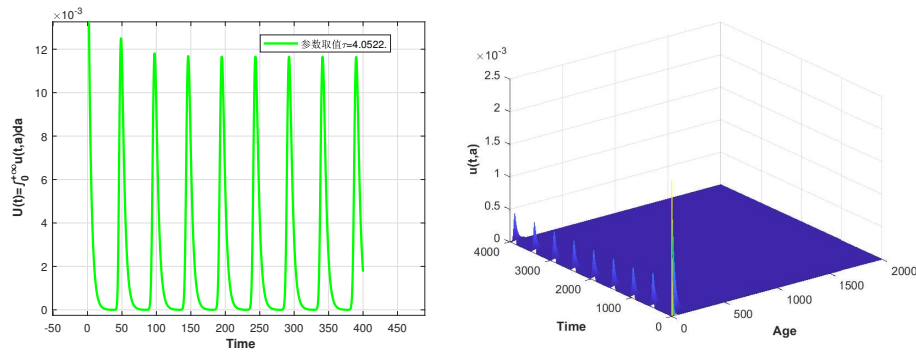


图 4 系统 (2.1) 的数值模拟结果, 其中取  $\tau = 4.0522 > \tau_0$ , 解趋于周期震荡.

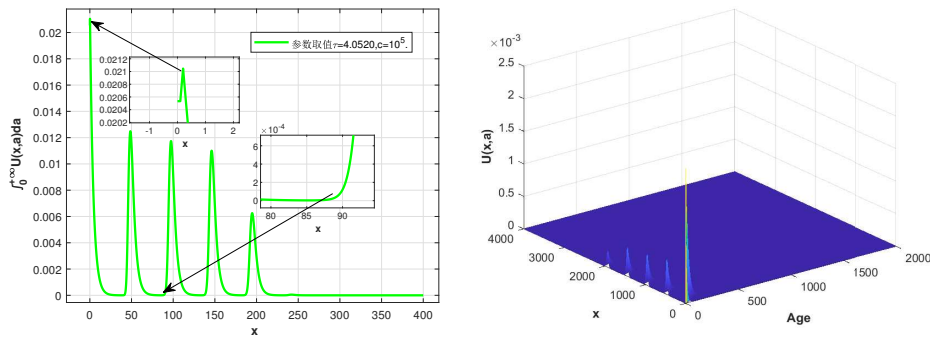


图 5 系统 (1.3) 的数值模拟结果, 其中取  $\tau = 4.0520 < \tau_0$ , 波速取  $c = 10^5$ .

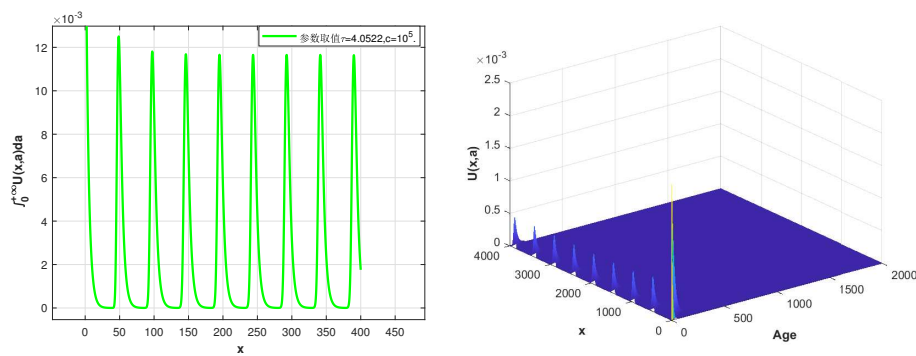


图 6 系统 (1.3) 数值模拟结果, 其中取  $\tau = 4.0522 > \tau_0$ , 波速取  $c = 10^5$ .

## 5 总结

对褐点石斑鱼的繁殖特性分析, 我们提出具有空间扩散的年龄结构的模型. 通过对方程的研究分析, 我们得到了在大波速下模型出现周期波串解的条件. 模型的建立, 旨在通过模型来描述褐点石斑鱼在时间和空间上在受精率的影响下, 种群数量的演化与分布规律. 鱼群繁殖是在特定的季节以及环境下, 短期内产生大量的鱼苗, 而后这些新生鱼苗在自然环境中随着环境的竞争或者外在的侵害而死亡, 但是这个过程相较产生新个体的时间来说要缓慢许多.

## 参 考 文 献

- [1] Ducrot A, Magal P. A center manifold for second order semi-linear differential equations on the real line and applications to the existence of wave trains for the Gurtin-McCamy equation[J]. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2019, 372(5): 3487–3537.
- [2] Ducrot A, Liu Zhihua, Magal P. Essential growth rate for bounded linear perturbation of non-densely defined Cauchy problems[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, 341(1): 501–518.
- [3] Hill V. The possible effects of the aggregation of the molecules of Haemoglobin on its dissociation Curves[J]. *The Journal of Physiology*, 1910, 40(1): iv–vii.
- [4] Perthame B. *Transport equations in biology*[M]. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007.
- [5] 陈大刚, 张美昭. 中国海洋鱼类 [M]. 中国海洋大学出版社, 2015.
- [6] Björn R, Björn S. Diffusive stability against nonlocalized perturbations of planar wave trains in reaction - diffusion systems[J]. *Journal of Differential Equations* 2021, 274(2): 1223–1261.
- [7] Benzie H, Dixon P. The effects of sperm concentration, sperm:egg ratio, and gamete age on fertilization success in crown-of-thorns starfish[J]. *Acanthaster Planci* in the Laboratory. *Bio. Bull.*, 1994, 186(2): 139–152.
- [8] Bakker C, Zbinden M, Fromment G, Weiss A, Largiader R. Slow fertilization of stickleback eggs: the results of sexual conflict?[J] *BMC Ecology*, 2006, 6(7): 1–8.
- [9] Browne K, Kaurova A, Shishova V, McGinnity D, Dzyuba R. Sperm motility of externally fertilizing fish and amphibians[J]. *Theriogenology*, 2015, 83(1): 1–13.
- [10] 李庆. 石斑鱼遗传多样性及其系统发育分析 [J]. *安徽农业科学*, 2015, 498(29): 75–79.
- [11] 罗颜涛. 三类反应扩散传染病模型和年龄结构寄生捕食种群模型的动态行为 [D]. 新疆大学, 2020.
- [12] Myers A. Stock and recruitment: generalizations about maximum reproductive rate, density dependence, and variability using meta-analytic approaches[J]. *ICES Journal of Marine Science*, 2001, 58(5): 937–951.
- [13] Magal P. Compact attractors for time-periodic age-structured population models[J]. *Electron. J. Differential Equations*, 2001, 65: 1–35.
- [14] Magal P, Ruan Shigui. On semilinear Cauchy problems with non-dense domain[J]. *Adv. Differential Equations*, 2009, 14(11): 1041–1084.
- [15] Ricker E. *Computation and interpretation of biological studies of fish populations*[M]. Canada: Bull. Fish. Res. Bd., 1975.
- [16] Thieme R. Quasi-compact semigroups via bounded perturbation[C]. *World Sci. Publ.*, River Edge, NJ, 1997, 6: 691–713.
- [17] Yang Sen, Huang Wenhua, Guo Wenjie, Chen Xinhan, Fan Bin. Effects of gametes post-activation, egg storage and sperm-egg ratio on in vitro fertilization outcomes in the brown-marbled grouper(*Epinephelus fuscoguttatus*)[J]. *Animal Reproductions Science*, 2020, 219(8): 1065–1094.

- [18] Liu Zhihua, Magal P, Ruan Shigui. Hopf bifurcation for non-densely defined Cauchy problems[J]. Z. Angew. Math. Phys., 2011, 62(7): 191–222.
- [19] Wang Zhen, Liu Zhihua. Hopf bifurcation of an age-structured compartmental pest-pathogen model[J]. J. Math. Anal. Appl., 2012, (385)2: 1134–1150.

## RESEARCH ON THE WAVE TRAIN SOLUTIONS OF EPINEPHELUS-FUSCOGUTTATUS MODEL

WU Ya-yun

(*School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei 230601, China*)

**Abstract:** In this paper, the existence of periodic wave train solutions of an age-structured model with diffusion is studied. By using the theory of integrated semigroup, Hopf bifurcation theorem and second order semi-linear abstract differential equation perturbation method, the results of the existence of the periodic wave train solutions of the *Epinephelus fuscoguttatus* model are obtained. The results of the Hopf bifurcation problem and the periodic wave train solutions of the age structure model are generalized.

**Keywords:** age structure; diffusion equation; non-densely defined Cauchy problem; Hopf bifurcation; periodic wave trains

**2010 MR Subject Classification:** 34C23; 34K13; 37L10; 92D25