

## 非线性抛物方程的矩阵型 Li-Yau-Hamilton 估计

曹德侠, 任新安

(中国矿业大学数学学院, 江苏 徐州 221116)

**摘要:** 本文主要研究了带有一般梯度项的非线性抛物方程的矩阵型 Li-Yau-Hamilton 估计. 利用张量最大值原理证明了当 Riemann 度量沿 Ricci 流演化时 Riemann 流形上非线性抛物方程的矩阵型 Li-Yau-Hamilton 估计, 其次证明了当 Kähler 度量沿 Kähler-Ricci 流演化时 Kähler 流形上非线性抛物方程的矩阵型 Li-Yau-Hamilton 估计. 这些结果推广了梯度项为平方项时的相关结果.

**关键词:** 非线性抛物方程; Li-Yau-Hamilton 估计; Ricci 流; Kähler-Ricci 流

MR(2010) 主题分类号: 53C44; 53C55 中图分类号: O186.1

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2026)03-0177-10

### 1 引言

流形上抛物型偏微分方程的梯度估计是几何分析的重要课题之一. 1986 年 Li 和 Yau<sup>[1]</sup> 首次对黎曼流形上热方程的正解得到了梯度估计, 即若黎曼流形  $M$  满足 Ricci 曲率非负, 则对于热方程

$$u_t = \Delta u \quad (1.1)$$

的正解  $u(x, t)$  有估计:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_t}{u} \leq \frac{n}{2t}. \quad (1.2)$$

从该估计出发便能得到经典形式的 Harnack 不等式, 所以这一类型的梯度估计也称为微分 Harnack 不等式. 随后 Hamilton<sup>[2]</sup> 应用 Li-Yau 的方法将结果 (1.2) 推广到全矩阵情形, 即  $M$  是黎曼流形且满足 Ricci 张量平行、截曲率非负, 则

$$H_{ij} = \nabla_i \nabla_j u - \frac{\nabla_i u \nabla_j u}{u} + \frac{u}{2t} g_{ij} \geq 0. \quad (1.3)$$

之后 Hamilton 分别得到了 Ricci 流和平均曲率流的微分 Harnack 不等式<sup>[3,4,5]</sup>. 由于这三位数学家在该领域中所作的开拓性的贡献, 微分 Harnack 不等式也被称之为 Li-Yau-Hamilton 估计.

后来, Chow 先后得到了 Gauss 曲率流<sup>[6]</sup> 和 Yamabe 流<sup>[7]</sup> 的 Li-Yau-Hamilton 估计, 曹怀东<sup>[8]</sup> 给出了 Kähler-Ricci 流的 Li-Yau-Hamilton 估计. 这些估计在相应曲率流的奇异性分析中起到了十分重要的作用.

\*收稿日期: 2026-01-16 接收日期: 2026-03-06

作者简介: 曹德侠 (1977-), 女, 江苏徐州, 副教授, 主要研究方向: 几何分析.

E-mail: caodexiacumt@126.com;

通讯作者: 任新安 (1978-), 男, 江苏徐州, 教授, 主要研究方向: 微分几何.

E-mail: renx@cumt.edu.cn.

在 Kähler 流形上, 曹怀东和倪磊<sup>[9]</sup> 证明全纯双截曲率非负的条件下热方程的矩阵型 Li-Yau-Hamilton 估计, 随后 Chow 和倪磊<sup>[10]</sup> 研究了正向共轭热方程在 Kähler-Ricci 流下的矩阵型 Li-Yau-Hamilton 估计. 近来, 李小龙和张旗<sup>[11]</sup> 证明了 Ricci 流下热方程和共轭热方程新的矩阵型估计, 李小龙、刘浩月和任新安<sup>[12]</sup> 在 Kähler-Ricci 流下证明了类似的估计. 这些结果随后被推广到一般的抛物型偏微分方程上, 姚莎, 刘浩月和任新安<sup>[13]</sup> 证明了如下的结果.

**定理 A** 设  $(M^n, g(t))$ ,  $t \in [0, T]$  为 Ricci 流的紧致解, 其截曲率非负, 并且  $R_{ij} \leq kg_{ij}$ , 其中  $k$  为正常数. 设  $v : M^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  为非线性热方程

$$v_t = \Delta_{g(t)}v + |\nabla v|^2 + f(v) \quad (1.4)$$

的解, 其中  $f''(v) \geq 0$ . 假设  $c(t)$  是一个光滑函数满足常微分不等式

$$c'(t) + 2c^2(t) - (f'(v) + 2k)c(t) \geq 0, \quad (1.5)$$

并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $c(t) \rightarrow +\infty$ , 则

$$\nabla_i \nabla_j v + c(t)g_{ij} \geq 0. \quad (1.6)$$

**定理 B** 设  $(M^n, g(t))$ ,  $t \in [0, T]$  为  $\varepsilon$ -Kähler-Ricci 流

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = -\varepsilon R_{i\bar{j}} \quad (1.7)$$

的紧致解, 其全纯双截曲率非负, 并且  $R_{i\bar{j}} \leq kg_{i\bar{j}}$ , 其中  $k$  为正常数,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  是个参数. 设  $v : M^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  为非线性热方程

$$v_t = \Delta_{g(t)}v + |\nabla v|^2 + f(v) \quad (1.8)$$

的解, 其中  $f''(v) \geq 0$ . 假设  $c(t)$  是一个光滑函数满足常微分不等式

$$c'(t) + c^2(t) - (f'(v) + \varepsilon k)c(t) \geq 0, \quad (1.9)$$

并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $c(t) \rightarrow +\infty$ , 则

$$\nabla_i \nabla_{\bar{j}} v + c(t)g_{i\bar{j}} \geq 0. \quad (1.10)$$

本文的主要目的是要考虑带有一般梯度项的非线性抛物方程的矩阵型 Li-Yau-Hamilton 估计, 我们主要得到了如下的定理.

**定理 1.1** 设  $(M^n, g(t))$ ,  $t \in [0, T]$  为 Ricci 流的紧致解, 其截曲率非负, 并且  $R_{ij} \leq kg_{ij}$ , 其中  $k$  为正常数. 设  $v : M^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  为非线性热方程

$$v_t = \Delta_{g(t)}v + h(|\nabla v|^2) + f(v) \quad (1.11)$$

的解, 其中  $f'' \geq 0$ ,  $h'' \geq 0$ ,  $h' \geq 0$ . 假设  $c(t)$  是一个光滑函数满足常微分不等式

$$c' + 2h'c^2 - f'c - 2kc \geq 0, \quad (1.12)$$

并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $c(t) \rightarrow +\infty$ , 则

$$\nabla_i \nabla_j v + c(t) g_{ij} \geq 0. \quad (1.13)$$

**定理 1.2** 设  $(M^n, g(t))$ ,  $t \in [0, T]$  为  $\varepsilon$ -Kähler-Ricci 流

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = -\varepsilon R_{i\bar{j}} \quad (1.14)$$

的紧致解, 其全纯双截曲率非负, 并且  $R_{i\bar{j}} \leq k g_{i\bar{j}}$ , 其中  $k$  为正常数,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  是个参数. 设  $v : M^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  为非线性热方程

$$v_t = \Delta_{g(t)} v + h(|\nabla v|^2) + f(v) \quad (1.15)$$

的解, 其中  $f'' \geq 0$ ,  $h'' \geq 0$ ,  $h' \geq 0$ . 假设  $c(t)$  是一个光滑函数满足常微分不等式

$$c' + c^2 h' - (\varepsilon k + f') c \geq 0, \quad (1.16)$$

并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $c(t) \rightarrow +\infty$ , 则

$$\nabla_i \nabla_{\bar{j}} v + c(t) g_{i\bar{j}} \geq 0. \quad (1.17)$$

在文中第 4 小节我们将会给出以上两个主要结论的证明. 在这之前, 由于不同文献会因为作者个人习惯而采用不同的记号, 为方便行文和阅读, 我们在第 2 节对本文的符号约定做简要阐述. 在第 3 小节则列出证明过程中需要的重要引理.

## 2 符号约定

本小节介绍 Riemann 流形和 Kähler 流形上涉及到的一些基本事实. 设  $(M, g)$  为 Riemann 流形,  $\nabla$  为度量  $g$  的 Levi-Civita 联络, 则 Riemann 曲率张量定义为

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.1)$$

在局部坐标下, 它的分量为

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}. \quad (2.2)$$

记

$$R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m. \quad (2.3)$$

Ricci 张量定义为

$$R_{ij} = R_{kij}^k. \quad (2.4)$$

数量曲率定义为

$$R = g^{ij} R_{ij}. \quad (2.5)$$

称  $M$  具有非负截曲率, 如果对任意  $v, w \in T_x M$  和任意  $x \in M$ , 都有

$$R_{kijl} v^i v^j w^k w^l \geq 0. \quad (2.6)$$

为了交换协变微分的顺序, 我们需要下面的 Ricci 恒等式. 如果  $\alpha$  是一个 1- 形式, 则

$$\nabla_i \nabla_j \alpha_k = \nabla_j \nabla_i \alpha_k - R_{ijk}^l \alpha_l. \quad (2.7)$$

设  $M$  是 Kähler 流形, 其 Kähler 度量为  $g_{i\bar{j}}$ , Kähler 形式

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j \quad (2.8)$$

是实的闭 (1, 1)- 形式, 进而可以得到:

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i}, \quad \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j}. \quad (2.9)$$

同样, 与黎曼流形相对应的, Kähler 流形的度量  $g_{i\bar{j}}$  的 Christoffel 符号为:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{k\bar{l}} \frac{\partial g_{i\bar{l}}}{\partial z^j}, \quad \Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{l}} = g^{k\bar{l}} \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial \bar{z}^i}, \quad (2.10)$$

其中  $g^{i\bar{j}} = (g_{i\bar{j}})^{-1}$ . 显然  $\Gamma_{ij}^k$  关于  $i$  和  $j$  是对称的, 而  $\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{l}}$  关于  $\bar{i}$  和  $\bar{j}$  也是对称的.

由度量  $g_{i\bar{j}}$  所定义的曲率张量:

$$R_{ik\bar{l}}^j = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial \bar{z}^l}, \quad R_{i\bar{j}k\bar{l}} = g_{p\bar{j}} R_{ik\bar{l}}^p. \quad (2.11)$$

容易看出  $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$  关于  $i$  和  $k$  对称, 关于  $\bar{j}$  和  $\bar{l}$  对称. 特别地,  $i\bar{j}$  与  $k\bar{l}$  可交换. 由于相较于黎曼流形, Kähler 流形中的曲率张量有更好的对称形式, 因此, Bianchi 恒等式也退化为更简便的形式:

$$\nabla_p R_{i\bar{j}k\bar{l}} = \nabla_k R_{i\bar{j}p\bar{l}}, \quad \nabla_{\bar{q}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} = \nabla_{\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{q}}. \quad (2.12)$$

此外, 若对任一点  $x \in M$  处任意两个全纯切空间  $T_x M$  中的向量  $v, w$  都成立:

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} v^i v^{\bar{j}} w^k w^{\bar{l}} \geq 0, \quad (2.13)$$

则称  $M$  的全纯双截曲率非负.

参照黎曼流形, 对曲率张量取迹得到 Ricci 张量,

$$R_{i\bar{j}} = g^{k\bar{l}} R_{i\bar{j}k\bar{l}}. \quad (2.14)$$

再取迹得数量曲率:

$$R = g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}}. \quad (2.15)$$

本节最后, 给出 Kähler 流形上协变导数交换次序的公式, 同类指标直接可以交换顺序, 这是有别于黎曼流形的.

$$\nabla_k \nabla_j v_i = \nabla_j \nabla_k v_i, \quad \nabla_{\bar{k}} \nabla_{\bar{j}} v_i = \nabla_{\bar{j}} \nabla_{\bar{k}} v_i. \quad (2.16)$$

但是在不同类型的指标交换次序时应遵循下式:

$$\nabla_k \nabla_{\bar{j}} v_i = \nabla_{\bar{j}} \nabla_k v_i - R_{k\bar{j}i\bar{l}} v_l. \quad (2.17)$$

### 3 基本引理

本文所讨论的是矩阵型的梯度估计, 其中证明的核心思想类似于函数型的梯度估计, 区别之处在于前者所用的是张量型极值原理, 后者只需应用普通的函数型极值原理即可. 因此, 我们首先给出如下的张量型极值原理, 这一重要引理是 Hamilton 在文<sup>[14,15]</sup>中证明得到的, 文献中有详细证明过程, 在此就不再赘述了.

**引理 1** 设  $M$  是紧致的黎曼流形,  $M_{ij}(x, t)$  是定义在  $M \times [0, T]$  上的光滑  $n$  阶矩阵对称函数, 假设  $M_{ij}$  满足方程

$$\partial_t M_{ij} = \Delta M_{ij} + \langle M_{ij}, \cdot \rangle + \Phi(M_{ij}), \quad (3.1)$$

且对于  $M_{ij}$  的 0 特征向量  $v$  有  $\Phi(M_{ij})(v, v) \geq 0$ , 那么如果当  $t = 0$  时  $M_{ij} \geq 0$ , 则必在整个时间  $t \in [0, T]$  也成立  $M_{ij} \geq 0$ .

**注 1** 将条件 (3.1) 中的 “=” 改为 “ $\geq$ ” 结论同样成立.

**注 2** Kähler 流形中张量型极值原理同样成立.

下面, 我们给出在定理的证明中需要用到的演化方程.

设  $M$  是紧致的黎曼流形,  $g(t)$  是 Ricci 流

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} \quad (3.2)$$

的一个解. 我们研究非线性抛物方程

$$(\partial_t - \Delta)v = h(|\nabla v|^2) + f(v). \quad (3.3)$$

为简单起见, 记  $H_{ij} := \nabla_i \nabla_j v$ , 并且  $\Delta_L$  为如下定义的 Lichnerowicz-Laplace 算子,

$$\Delta_L h_{ij} = \Delta h_{ij} + 2R_{ikjl} h_{kl} - R_{ik} h_{jk} - R_{jk} h_{ik}. \quad (3.4)$$

**引理 2**  $H_{ij}$  的演化方程为

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_L)H_{ij} = & h'(|\nabla v|^2)(2H_{ik}H_{kj} + 2R_{ikjl}\nabla_l v\nabla_k v + 2\nabla_k H_{ij}\nabla_k v) \\ & + h''(|\nabla v|^2)\nabla_i|\nabla v|^2\nabla_j|\nabla v|^2 + f''(v)\nabla_i v\nabla_j v + f'(v)H_{ij}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**证** 对任何光滑函数  $f(x, t)$ , 有

$$(\partial_t - \Delta_L)(\nabla_i \nabla_j f) = \nabla_i \nabla_j ((\partial_t - \Delta)f), \quad (3.6)$$

所以

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_L)H_{ij} = & \nabla_i \nabla_j (h(|\nabla v|^2) + f(v)) \\ = & h''(|\nabla v|^2)\nabla_i|\nabla v|^2\nabla_j|\nabla v|^2 + h'(|\nabla v|^2)\nabla_i\nabla_j|\nabla v|^2 \\ & + f''(v)\nabla_i v\nabla_j v + f'(v)\nabla_i\nabla_j v. \end{aligned} \quad (3.7)$$

因为

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j |\nabla v|^2 &= \nabla_i \nabla_j (\nabla_k v \nabla_k v) \\
&= \nabla_i (\nabla_j \nabla_k v \nabla_k v + \nabla_k v \nabla_j \nabla_k v) \\
&= 2\nabla_i (\nabla_j \nabla_k v \nabla_k v) \\
&= 2\nabla_k (\nabla_i \nabla_j v) \nabla_k v + 2R_{ikjl} \nabla_l v \nabla_k v + 2H_{ik} H_{kj} \\
&= 2H_{ik} H_{kj} + 2R_{ikjl} \nabla_l v \nabla_k v + 2\nabla_k H_{ij} \nabla_k v,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

所以

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta_L) H_{ij} &= h'(|\nabla v|^2) (2H_{ik} H_{kj} + 2R_{ikjl} \nabla_l v \nabla_k v + 2\nabla_k H_{ij} \nabla_k v) \\
&\quad + h''(|\nabla v|^2) \nabla_i |\nabla v|^2 \nabla_j |\nabla v|^2 + f''(v) \nabla_i v \nabla_j v + f'(v) H_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

设  $M$  是紧致的 Kähler 流形,  $g(t)$  是  $\varepsilon$ -Kähler-Ricci 流

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{i\bar{j}} = -\varepsilon R_{i\bar{j}} \tag{3.10}$$

的一个解. 我们研究非线性抛物方程

$$(\partial_t - \Delta)v = h(|\nabla v|^2) + f(v). \tag{3.11}$$

为简单起见, 记  $H_{ik} := \nabla_i \nabla_k v$ ,  $H_{i\bar{k}} := \nabla_i \nabla_{\bar{k}} v$ ,  $H_{\bar{j}k} := \nabla_{\bar{j}} \nabla_k v$ . 用  $\Delta_L$  表示如下定义的复 Lichnerowicz-Laplace 算子,

$$\Delta_L h_{i\bar{j}} := \Delta h_{i\bar{j}} + R_{i\bar{j}l\bar{k}} h_{k\bar{l}} - \frac{1}{2} R_{i\bar{l}} h_{l\bar{j}} - \frac{1}{2} R_{k\bar{j}} h_{i\bar{k}}. \tag{3.12}$$

**引理 3**  $H_{i\bar{j}}$  满足的演化方程为

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta_L) H_{i\bar{j}} &= h''(|\nabla v|^2) \nabla_i |\nabla v|^2 \nabla_{\bar{j}} |\nabla v|^2 \\
&\quad + h'(|\nabla v|^2) (H_{i\bar{k}} H_{k\bar{j}} + H_{ik} H_{\bar{j}\bar{k}} + R_{i\bar{k}l\bar{j}} \nabla_k v \nabla_{\bar{l}} v) \\
&\quad + h'(|\nabla v|^2) (\nabla_k H_{i\bar{j}} \nabla_{\bar{k}} v + \nabla_{\bar{k}} H_{i\bar{j}} \nabla_k v) \\
&\quad + f''(v) \nabla_i v \nabla_{\bar{j}} v + f'(v) \nabla_i \nabla_{\bar{j}} v.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

**证** 先计算

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta_L) H_{i\bar{j}} &= \nabla_i \nabla_{\bar{j}} ((\partial_t - \Delta)v) \\
&= \nabla_i \nabla_{\bar{j}} (h(|\nabla v|^2) + f(v)) \\
&= \nabla_i \nabla_{\bar{j}} h(|\nabla v|^2) + \nabla_i \nabla_{\bar{j}} f(v),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

交换协变微分的顺序得

$$\nabla_i \nabla_{\bar{j}} |\nabla v|^2 = H_{i\bar{k}} H_{k\bar{j}} + H_{ik} H_{\bar{j}\bar{k}} + R_{i\bar{k}l\bar{j}} \nabla_k v \nabla_{\bar{l}} v + \nabla_k H_{i\bar{j}} \nabla_{\bar{k}} v + \nabla_{\bar{k}} H_{i\bar{j}} \nabla_k v. \tag{3.15}$$

所以有

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_L)H_{i\bar{j}} = & h''(|\nabla v|^2)\nabla_i|\nabla v|^2\nabla_{\bar{j}}|\nabla v|^2 + h'(|\nabla v|^2)(H_{i\bar{k}}H_{k\bar{j}} + H_{ik}H_{\bar{j}\bar{k}} + R_{i\bar{k}l\bar{j}}\nabla_k v\nabla_{\bar{l}}v) \\ & + h'(|\nabla v|^2)(\nabla_k H_{i\bar{j}}\nabla_{\bar{k}}v + \nabla_{\bar{k}}H_{i\bar{j}}\nabla_k v) + f''(v)\nabla_i v\nabla_{\bar{j}}v + f'(v)\nabla_i\nabla_{\bar{j}}v. \end{aligned} \quad (3.16)$$

#### 4 矩阵型估计

有了以上准备, 我们开始证明本文的主要定理.

**定理 4.1** 设  $(M^n, g(t))$ ,  $t \in [0, T]$  为 Ricci 流的紧致解, 其截曲率非负, 并且  $R_{ij} \geq kg_{ij}$ , 其中  $k$  为正常数. 设  $v: M^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  为非线性热方程

$$v_t = \Delta v + h(|\nabla v|^2) + f(v) \quad (4.1)$$

的解, 其中  $f''(v) \geq 0$ ,  $h''(|\nabla v|^2) \geq 0$ ,  $h'(|\nabla v|^2) \geq 0$ . 假设  $c(t)$  是一个光滑函数满足常微分不等式

$$c' + 2h'c^2 - f'c - 2kc \geq 0, \quad (4.2)$$

并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $c(t) \rightarrow +\infty$ , 则

$$\nabla_i\nabla_{\bar{j}}v + c(t)g_{ij} \geq 0. \quad (4.3)$$

**证** 由引理 2,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_L)H_{ij} = & h'(|\nabla v|^2)(2H_{ik}H_{kj} + 2R_{ikjl}\nabla_l v\nabla_k v + 2\nabla_k H_{ij}\nabla_k v) \\ & + h''(|\nabla v|^2)\nabla_i|\nabla v|^2\nabla_j|\nabla v|^2 + f''(v)\nabla_i v\nabla_j v + f'(v)H_{ij}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

利用条件  $R_{ikjl}\nabla_l v\nabla_k v \geq 0$ ,  $h''(|\nabla v|^2) \geq 0$ ,  $h'(|\nabla v|^2) \geq 0$  和  $f''(v) \geq 0$  得

$$(\partial_t - \Delta_L)H_{ij} \geq h'(|\nabla v|^2)(2H_{ik}H_{kj} + 2\nabla_k H_{ij}\nabla_k v) + f'(v)H_{ij}. \quad (4.5)$$

令

$$Z_{ij} := H_{ij} + c(t)g_{ij}. \quad (4.6)$$

则

$$2H_{ik}H_{kj} = 2Z_{ik}Z_{kj} - 4cZ_{ij} + 2c^2g_{ij}. \quad (4.7)$$

因此

$$\begin{aligned} & (\partial_t - \Delta_L)Z_{ij} \\ = & (\partial_t - \Delta_L)(H_{ij} + c(t)g_{ij}) \\ = & (\partial_t - \Delta_L)H_{ij} + (\partial_t - \Delta_L)(c(t)g_{ij}) \\ \geq & h'(2Z_{ik}Z_{kj} - 4cZ_{ij} + 2c^2g_{ij} + 2\nabla_k Z_{ij}\nabla_k v) + f'(v)Z_{ij} - f'cg_{ij} + c'g_{ij} - 2cR_{ij} \\ = & 2h'Z_{ik}Z_{kj} - 4ch'Z_{ij} + 2h'\nabla_k Z_{ij}\nabla_k v + f'(v)Z_{ij} + (c' + 2h'c^2 - f'c - 2kc)g_{ij} + 2c(kg_{ij} - R_{ij}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

利用条件  $R_{i\bar{j}} \leq kg_{i\bar{j}}$ , 再加上  $c(t)$  满足

$$c' + 2h'c^2 - f'c - 2kc \geq 0, \quad (4.9)$$

可以得出

$$(\partial_t - \Delta_L)Z_{ij} - 2h'\nabla_k Z_{ij}\nabla_k v \geq 2h'Z_{ik}Z_{kj} - 4ch'Z_{ij} + f'(v)Z_{ij}. \quad (4.10)$$

如果  $Z_{ij}w^j = 0$ , 则

$$(2h'Z_{ik}Z_{kj} - 4ch'Z_{ij} + f'(v)Z_{ij})w^i w^j \geq 0,$$

即上式右边满足零特征向量条件, 并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $Z_{ij}(x, t) \rightarrow \infty$ , 因此由引理 1 可以得到  $Z_{ij}(x, t) \geq 0$ .

**定理 4.2** 设  $(M^n, g(t))$ ,  $t \in [0, T]$  为  $\varepsilon$ -Kähler-Ricci 流的紧致解, 其全纯双截曲率非负, 并且  $R_{i\bar{j}} \leq kg_{i\bar{j}}$ , 其中  $k$  为正常数. 设  $v : M^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  为非线性热方程

$$v_t = \Delta v + h(|\nabla v|^2) + f(v) \quad (4.11)$$

的解, 其中  $f''(v) \geq 0$ ,  $h''(|\nabla v|^2) \geq 0$ ,  $h'(|\nabla v|^2) \geq 0$ . 假设  $c(t)$  是一个光滑函数满足常微分不等式

$$c' + c^2 h' - (\varepsilon k + f')c \geq 0, \quad (4.12)$$

并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $c(t) \rightarrow +\infty$ , 则

$$\nabla_i \nabla_{\bar{j}} v + c(t)g_{i\bar{j}} \geq 0. \quad (4.13)$$

**证** 在 (3.13) 式中令  $\delta = 1, \theta = 0$ , 则  $H_{i\bar{j}}$  满足

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_L)H_{i\bar{j}} &= h''(|\nabla v|^2)\nabla_i |\nabla v|^2 \nabla_{\bar{j}} |\nabla v|^2 \\ &\quad + h'(|\nabla v|^2)(H_{i\bar{k}}H_{k\bar{j}} + H_{ik}H_{\bar{j}\bar{k}} + R_{i\bar{k}l\bar{j}}\nabla_k v \nabla_{\bar{l}} v) \\ &\quad + h'(|\nabla v|^2)(\nabla_k H_{i\bar{j}}\nabla_{\bar{k}} v + \nabla_{\bar{k}} H_{i\bar{j}}\nabla_k v) \\ &\quad + f''(v)\nabla_i v \nabla_{\bar{j}} v + f'(v)\nabla_i \nabla_{\bar{j}} v. \end{aligned} \quad (4.14)$$

利用条件  $R_{i\bar{k}l\bar{j}}\nabla_l v \nabla_{\bar{k}} v \geq 0$ ,  $h''(|\nabla v|^2) \geq 0$ ,  $h'(|\nabla v|^2) \geq 0$  和  $f''(v) \geq 0$  得

$$(\partial_t - \Delta_L)H_{i\bar{j}} \geq h'(|\nabla v|^2)H_{i\bar{k}}H_{k\bar{j}} + h'(|\nabla v|^2)(\nabla_k H_{i\bar{j}}\nabla_{\bar{k}} v + \nabla_{\bar{k}} H_{i\bar{j}}\nabla_k v) + f'(v)\nabla_i \nabla_{\bar{j}} v. \quad (4.15)$$

令

$$Z_{i\bar{j}} := H_{i\bar{j}} + c(t)g_{i\bar{j}}. \quad (4.16)$$

则

$$H_{i\bar{k}}H_{k\bar{j}} = Z_{i\bar{k}}Z_{k\bar{j}} - 2c(t)Z_{i\bar{j}} + c^2(t)g_{i\bar{j}}. \quad (4.17)$$

因此

$$\begin{aligned}
 (\partial_t - \Delta_L)Z_{i\bar{j}} &= (\partial_t - \Delta_L)(H_{i\bar{j}} + c(t)g_{i\bar{j}}) \\
 &= (\partial_t - \Delta_L)H_{i\bar{j}} + (\partial_t - \Delta_L)(c(t)g_{i\bar{j}}) \\
 &\geq h'(|\nabla v|^2)H_{i\bar{k}}H_{k\bar{j}} + h'(|\nabla v|^2)(\nabla_k H_{i\bar{j}}\nabla_{\bar{k}}v + \nabla_{\bar{k}}H_{i\bar{j}}\nabla_k v) \\
 &\quad + f'(v)\nabla_i\nabla_{\bar{j}}v + c'(t)g_{i\bar{j}} - \varepsilon c(t)R_{i\bar{j}} \\
 &= h'(|\nabla v|^2)Z_{i\bar{k}}Z_{k\bar{j}} + h'(|\nabla v|^2)(\nabla_k Z_{i\bar{j}}\nabla_{\bar{k}}v + \nabla_{\bar{k}}Z_{i\bar{j}}\nabla_k v) + [f'(v) - 2c(t)h'(|\nabla v|^2)]Z_{i\bar{j}} \\
 &\quad + [c'(t) + c^2(t)h'(|\nabla v|^2) - (\varepsilon k + f'(v))c(t)]g_{i\bar{j}} + \varepsilon c(t)(kg_{i\bar{j}} - R_{i\bar{j}}).
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

利用条件  $R_{i\bar{j}} \leq kg_{i\bar{j}}$ , 再加上  $c(t)$  满足

$$c' + c^2 h' - (\varepsilon k + f')c \geq 0, \tag{4.19}$$

可以得出

$$(\partial_t - \Delta_L)Z_{i\bar{j}} - h'(\nabla_k Z_{i\bar{j}}\nabla_{\bar{k}}v + \nabla_{\bar{k}}Z_{i\bar{j}}\nabla_k v) \geq h'Z_{i\bar{k}}Z_{k\bar{j}} + (f' - 2ch')Z_{i\bar{j}}. \tag{4.20}$$

如果  $Z_{i\bar{j}}w^{\bar{j}} = 0$ , 则

$$(h'Z_{i\bar{k}}Z_{k\bar{j}} + (f' - 2ch')Z_{i\bar{j}})w^i w^{\bar{j}} \geq 0,$$

即上式右边满足零特征向量条件,

这样上式右边满足零特征向量条件, 并且当  $t \rightarrow 0$  时,  $Z_{i\bar{j}}(x, t) \rightarrow \infty$ , 因此由引理 1 可以得到  $Z_{i\bar{j}}(x, t) \geq 0$ .

下面我们通过注记的形式给出定理 4.1 与定理 4.2 的两个例子.

**注 4.1** 在定理 4.1 中, 令  $f(v) = e^{av}$ , 其中  $a$  为负常数,  $h(|\nabla v|^2) = |\nabla v|^2$ , 则函数

$$c(t) = \frac{k}{1 - e^{-2kt}}$$

满足定理 4.1 中的不等式 (4.2).

**注 4.2** 在定理 4.2 中, 令  $f(v) = av$ , 其中  $a$  为正常数,  $h(|\nabla v|^2) = |\nabla v|^2$ , 则函数

$$c(t) = \frac{\varepsilon k + a}{1 - e^{-(\varepsilon k + a)t}}$$

满足定理 4.2 中的不等式 (4.12).

## 参 考 文 献

- [1] Li P, Yau S-T. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator[J]. Acta Math., 1986, 156: 153–201.
- [2] Hamilton R. A matrix Harnack estimate for the heat equation[J]. Comm. Anal. Geom., 1993, 1(1): 113–126.
- [3] Hamilton R. The Ricci flow on surfaces[J]. Contemp. Math., 1993, 71: 237–262.

- [4] Hamilton R. The Harnack estimate for the Ricci flow[J]. *J. Differential Geom.*, 1993, 37(1): 225–243.
- [5] Hamilton R. The Harnack estimate for the mean curvature flow[J]. *J. Differential Geom.*, 1995, 41(1): 215–226.
- [6] Chow B. On Harnack’s inequality and entropy for the Gaussian curvature flow[J]. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1991, 44: 469–483
- [7] Chow B. The Yamabe flow on locally conformal flat manifolds with positive Ricci curvature[J]. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1992, 45: 1003–1014.
- [8] Cao H D. On Harnack’s inequalities for the Kähler-Ricci flow[J]. *Invent. Math.*, 1992, 109(1): 247–263.
- [9] Cao H D, Ni L. Matrix Li-Yau-Hamilton estimates for the heat equation on Kähler manifolds[J]. *Math. Ann.*, 2005, 331(4): 795–807.
- [10] Ni L. A matrix Li-Yau-Hamilton estimate for Kähler-Ricci flow[J]. *J. Differential Geom.*, 2007, 75(2): 303–358.
- [11] Li X, Zhang Q-S. Matrix Li-Yau-Hamilton estimates under Ricci flow and parabolic frequency[J]. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2024, 63(63): 38.
- [12] Li X, Liu H-Y, Ren X-A. Matrix Li-Yau-Hamilton estimates under Kähler-Ricci flow[J]. *J. Geom. Anal.*, 2025, 35(113): 19.
- [13] Yao S, Liu H-Y, Ren X-A. Matrix Li-Yau-Hamilton estimates for nonlinear heat equations under geometric flows[J]. *Pacific J. Math.*, 2025, 338(1): 19–34.
- [14] Hamilton R. Three-manifolds with positive Ricci curvature[J]. *J. Differential Geom.*, 1982, 17(2): 255–306.
- [15] Hamilton R. Four-manifolds with positive curvature operator[J]. *J. Differential Geom.*, 1986, 24(2): 153–179.

## MATRIX LI-YAU-HAMILTON ESTIMATES FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS

CAO De-xia, REN Xin-an

*(School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)*

**Abstract:** In this paper we are concerned with the matrix Li-Yau-Hamilton estimates for nonlinear parabolic equations. By using the maximum principle for tensor, we derive such an estimate for nonlinear parabolic equations on Riemannian manifolds with metric evolving under the Ricci flow. Then we consider the estimate for nonlinear parabolic equations on Kähler manifolds with Kähler metrics evolving under the Kähler-Ricci flow. These results generalize the corresponding ones when the gradient term is quadratic.

**Keywords:** nonlinear parabolic equation; Li-Yau-Hamilton estimate; Ricci flow; Kähler-Ricci flow

**2010 MR Subject Classification:** 53C44; 53C55.