

## 利用球面弦弧估计研究一类曲线流

赵玉玲

(贵州财经大学数学与统计学院, 贵阳 550025)

摘要: 本文研究了如下曲线收缩流:

$$X_t = \frac{k}{K}N$$

利用球面弦弧估计方法, 获得了任意初始光滑嵌入闭球面曲线在该流下演化会保持总测地曲率  $\int_X k ds = 0$  不变, 最终收敛为球面上一条简单闭测地线的结果, 这为 Gage 猜想在球面上成立推广了比较简洁的证明.

关键词: 球面弦弧估计; 曲线收缩流; 测地线; 收敛性

MR(2010) 主题分类号: 53A04; 53C44

中图分类号: O186.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2026)03-0158-07

### 1 引言

曲线收缩流是黎曼流形上曲线长度泛函的  $L_2$  梯度流, 也是曲率流中最重要的流模型之一, Gage-Hamilton<sup>[1]</sup>, Grayson<sup>[2]</sup> 等人最先在平面情形进行研究, 其后的工作参见文献 [3-5]. 如果外围空间变为曲面, 相关的工作参见文献 [6-10], 特别地, Gage 在文献 [11] 中研究了严格凸曲面上的一类曲线流, 并在文末提出如下猜想:

凸曲面上满足  $\int_X k ds = 0$  的简单闭曲线, 均可在演化方程

$$X_t = \frac{k}{K}N, \quad (1.1)$$

下收敛到一条简单闭测地线, 其中  $k$  为测地曲率,  $K$  为凸曲面在一点处的高斯曲率.

本文, 我们利用 Bryan-Langford-Zhu<sup>[12]</sup> 建立的球面弦弧估计研究球面情形下的 Gage 猜想, 得到

**定理 1.1** 球面上满足  $\int_X k ds = 0$  的简单闭曲线, 在演化方程 (1.1) 下收敛到一条简单闭测地线.

### 2 预备知识

设正则曲线族  $\{\Gamma_t\}_{t \in I}$  在二维球面上按 (1.1) 演化, 考虑光滑族  $X(\cdot, t) : M^1 \times I \rightarrow S^2$ , 其中  $\Gamma_t = X(M^1, t)$  为时刻  $t$  的嵌入曲线.

\*收稿日期: 2025-12-23

接收日期: 2026-02-13

基金项目: 贵州财经大学研究生科研项目基金资助 (2025BAZYSY218), 贵州省科技计划项目基金资助 (黔科合基础 MS(2026)071).

作者简介: 赵玉玲 (2000-), 女, 贵州毕节, 研究生, 主要研究方向: 整体微分几何和几何分析. E-mail: 1936712881@qq.com.

对于以弧长为参数的球面 (半径为  $R$ ) 曲线  $X$ , 其 Frenet 公式可定义为

$$\begin{cases} \dot{N} &= kT, \\ \dot{T} &= -kN + \tau X, \\ \dot{X} &= -\tau T, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $T$  为单位切向量,  $N$  为单位外法向量且满足  $X = N \times T$ , 挠率系数为  $\tau$ .

曲线  $X$  的空间曲率  $\bar{k}$ , 测地曲率  $k$  测地曲率和法曲率  $\frac{1}{R^2}$  满足  $\bar{k}^2 = \frac{1}{R^2} + k^2$ .

首先定义空间距离函数  $w(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|}$ , 其中  $x, y \in \Gamma \subseteq S^2$ ,  $d = |x-y|$  为欧氏弦长,  $\rho$  为球面弦长, 它们的关系满足  $\cos \rho = \langle x, y \rangle = 1 - \frac{d^2}{2}$ , 特别地,  $\langle w, x \rangle = -\langle w, y \rangle = \frac{d}{2}$ .

其次, 定义弧长关于位置向量的变分导数:

$$\frac{\partial l}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} l(x+h, y), \quad \frac{\partial l}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dh} \Big|_{h=0} l(x, y+h),$$

其中  $l(x, y)$  表示  $x, y$  之间的劣弧长,  $L$  为闭曲线总长度. 对于曲线上任意给定的一对点, 满足  $l = y - x$ , 且  $\frac{\partial l}{\partial x} = -1, \frac{\partial l}{\partial y} = 1$ .

最后, 定义弦弧轮廓函数  $\varphi_{\Gamma(z)} := \inf \{d(x, y) | l(x, y) = z\}$ , 且有

**引理 2.1** <sup>[12]</sup> 任给球面曲线  $\Gamma$ , 有

$$\varphi_{\Gamma(z)} = z - \frac{1}{24} (\max(k^2 + 1)z^3 + o(z^5)), \quad z \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

### 3 球面弦 - 弧估计

考虑辅助函数

$$Z(x, y, t) := d(x, y) - L(t)\phi\left(\frac{l(x, y, t)}{L(t)}, t\right), \quad (3.1)$$

其中  $l(x, y, t)$  是  $\Gamma_t$  的劣弧长,  $L(t)$  为曲线  $\Gamma_t$  总长度. 从而, 我们有下面的引理

**引理 3.1** <sup>[12]</sup>  $\phi: [0, 1] \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  是阻断函数, 并且满足以下四条性质:

- (i) 对称性:  $\phi(1-z) = \phi(z), \forall z \in [0, 1]$ ;
- (ii) 有界性:  $|\phi| \leq 1$ ;
- (iii) 凹凸性:  $\phi$  是严格凹函数;
- (iv) 对于  $\forall L > 0$ , 在  $z \in [0, 1]$  上, 使得  $\lambda\phi(z) \leq 2$ , 那么函数  $z \mapsto h(\lambda\phi(z))$  是严格凹函数, 其中  $h(d) := \arccos\left(1 - \frac{d^2}{2}\right)$ .

#### 3.1 $Z$ 的变分

特别地, 选取阻断函数

$$\phi(z) = a^{-1} \arctan\left(\frac{1}{\pi} \sin(\pi z)\right), \quad (3.2)$$

并得到辅助函数  $Z$  的各阶变分:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z}{\partial t} &= \langle w, -k_x N_x + k_y N_y \rangle - L_t \left( \phi - \frac{l}{L} \phi' \right) - L \phi_t - l \phi', \\ \partial_x Z &= \langle w, T_x \rangle + \phi', \quad \partial_y Z = -\langle w, T_y \rangle - \phi', \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} &= \frac{1}{d} (1 - \langle w, T_x \rangle^2) + \langle w, -x - k_x N_x \rangle^2 - \frac{1}{L} \phi'', \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} &= \frac{1}{d} (1 - \langle w, T_y \rangle^2) - \langle w, -y - k_y N_y \rangle^2 - \frac{1}{L} \phi'', \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{d} (\langle T_x, T_y \rangle - \langle w, T_x \rangle \langle w, T_y \rangle) + \frac{1}{L} \phi''.\end{aligned}$$

在零极小值处, 可知

**引理 3.2** <sup>[12]</sup> 如果  $x \neq y$ , 在  $Z(\cdot, \cdot, t)$  的局部零极小值  $(x, y)$  处, 有

$$\langle T_x, T_y \rangle = 2\phi'^2 - 1. \quad (3.3)$$

接下来, 我们考虑流的微分不等式以及两个弦弧估计. 首先, 长度  $L(t)$  的演化方程为

$$L_t = - \int_X \frac{k^2}{K} ds = - \frac{1}{R^2} \int_X \bar{k}^2 ds + \frac{L}{R^4} \leq - \frac{1}{LR^2} \left( \int_X |\bar{k}| ds \right)^2 + \frac{L}{R^4}, \quad (3.4)$$

利用 Fenchel 定理  $\int_X |k| ds \geq 2\pi$ , 得到如下微分不等式

$$L_t \leq \frac{L}{R^4} - \frac{4\pi^2}{LR^2}.$$

类似地, 我们定义  $l[x : y]$  是曲线  $X$  上连接  $x, y$  两点之间的劣弧长, 则有

$$l_t = - \int_{[x:y]} \frac{k^2}{K} ds = - \frac{1}{R^2} \int_{[x:y]} \bar{k}^2 ds + \frac{l}{R^4} \leq - \frac{1}{lR^2} \left( \int_{[x,y]} |\bar{k}| ds \right)^2 + \frac{l}{R^4}, \quad (3.5)$$

又因为  $\int_{[x,y]} |\bar{k}| ds \geq \arccos \langle T_x, T_y \rangle$ , 则

$$l_t \leq \frac{l}{R^4} - \frac{1}{lR^2} (\arccos \langle T_x, T_y \rangle)^2.$$

假设在某一时刻  $t > 0$ , 某一对非对角点  $x \neq y$  处,  $Z$  取得零极小值. 利用  $Z$  的变分公式和 (3.4) 与 (3.5) 可得

$$\begin{aligned}0 &\geq \frac{\partial Z}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \\ &= \langle w, x - y \rangle - L_t \left( \phi - \frac{l}{L} \phi' \right) - L \phi_t - l_t \phi' + \frac{4}{L} \phi'' \\ &\geq \left( \frac{4\pi^2}{LR^2} - \frac{L}{R^4} \right) \left( \phi - \frac{l}{L} \phi' \right) + \left[ \frac{1}{lR^2} (\arccos(2\phi'^2 - 1))^2 - \frac{l}{R^4} \right] \phi' + d - L \phi_t + \frac{4}{L} \phi'' \\ &= \left( \frac{4\pi^2}{LR^2} - \frac{L}{R^4} \right) \phi - \frac{l}{L} \phi' + \left[ \frac{1}{lR^2} (2 \arccos \phi')^2 - \frac{l}{R^4} \right] \phi' + d - L \phi_t + \frac{4}{L} \phi'',\end{aligned}$$

因为  $(2 \arccos \phi')^2 = 4(\arccos \phi')^2 \geq 4 \left[ \pi^2 \left(\frac{l}{L}\right)^2 - \frac{2\pi \frac{l}{L}}{\sin(\pi \frac{l}{L})} (\phi' - \cos(\pi \frac{l}{L})) \right]$  所以

$$\begin{aligned} L\phi_t &\geq \left( \frac{4\pi^2}{LR^2} - \frac{L}{R^4} \right) \left( \phi - \frac{l}{L}\phi' \right) + \frac{4\pi^2 l \phi'}{R^2 L^2} - \frac{8\pi \phi'}{R^2 L \sin(\pi \frac{l}{L})} (\phi' - \cos(\pi \frac{l}{L})) - \frac{l\phi'}{R^4} + d + \frac{4}{L}\phi'' \\ &= L^2\phi \left( 1 - \frac{1}{R^4} \right) + 4 \left( \frac{\pi^2 \phi}{R^2} + \phi'' \right) + \frac{1}{R^2} \left( \frac{8\pi \phi'}{\tan(\pi \frac{l}{L})} - \frac{8\pi \phi'^2}{\sin(\pi \frac{l}{L})} \right), \end{aligned}$$

综上得到不等式在点  $(x, y, t)$  处有:

$$L^2\phi_t \geq L^2\phi \left( 1 - \frac{1}{R^4} \right) + 4 \left( \frac{\pi^2 \phi}{R^2} + \phi'' \right) + \frac{1}{R^2} \left( \frac{8\pi \phi'}{\tan(\pi - \frac{l}{L})} - \frac{8\pi \phi'^2}{\sin(\pi - \frac{l}{L})} \right). \quad (3.6)$$

特别地, 在单位圆上有  $L^2\phi_t \geq 4(\pi^2\phi + \phi'') + \frac{8\pi\phi'}{\tan(\pi - \frac{l}{L})} - \frac{8\pi\phi'^2}{\sin(\pi - \frac{l}{L})}$ . 由于  $\phi$  的严格凹性和 Hölder 不等式取等条件, 上述不等式应严格取不等号.

因球面的高斯曲率为常数  $K = \frac{1}{R}$ , 为计算方便, 在接下来的计算中我们取  $R = 1$ , 亦即  $K = 1$ .

### 3.2 弦 - 弧估计

**定理 3.3** 如果当  $t = 0$ , 对某个  $a > 0$ , 有  $\frac{d}{L} \geq \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)\right)$ , 那么对于  $t \in [0, T)$

$$\frac{d}{L} \geq \frac{1}{ae^{-4\pi^2\tau}} \arctan\left(\frac{4e^{-a\pi^2\tau}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)\right). \quad (3.7)$$

恒成立, 其中  $\tau(t) := \int_0^t L^{-2} dt$ .

**证** 假设存在  $t_0 > 0$  和  $x \neq y$ , 使得  $Z(x, y, t_0) = d - L\phi\left(\frac{\ell}{L}, t_0\right) < 0$ , 则  $Z$  在  $(x, y, t_0)$  处取局部负极小值, 满足  $\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$ ,  $(Z) \geq 0$ .

将 (3.3) 代入  $Z$  的时间演化方程和二阶导数公式  $0 \geq \frac{\partial^2 Z}{\partial t} - \left( \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right)$

结合  $L_t = -\int k^2 ds \leq -\frac{4\pi^2}{L}$  阻断函数  $\phi$  的微分条件, 化简得,

$$L^2\phi_t'' > 4(\phi'' + \pi^2\phi) + \frac{8\pi\phi'}{\tan\left(\pi \frac{\ell}{L}\right)} - 8\pi\phi'^2,$$

但 Chow 等在文章 [13] 中已证明, 满足条件的  $\phi$  必须满足

$$L^2\phi_t'' < 4(\phi'' + \pi^2\phi) + \frac{8\pi\phi'}{\tan\left(\pi \frac{\ell}{L}\right)} - 8\pi\phi'^2,$$

矛盾, 故  $Z \geq 0$ , 即 (3.7) 成立.

**定理 3.4** 如果在  $t = 0$ ,  $\exists a > 0$ , 有  $\frac{d}{L} \geq \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi l}{L}\right)\right)$ , 那么对于  $\forall t \in [0, T)$  有

$$k^2 + 1 \leq \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(1 + \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-8\pi^2\tau}\right). \quad (3.8)$$

**证** 首先, 利用泰勒展开式得到

$$\arctan\left(\frac{a}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \ell}{L}\right)\right) = \frac{ae^{-4\pi^2\tau}}{L} \ell - \frac{ae^{-4\pi^2\tau}(\pi^2 + 2a^2 e^{-8\pi^2\tau})}{6L^3} \ell^3 + o(\ell^3),$$

再结合

$$d = \phi_p(\ell) \geq L \cdot \frac{1}{ae^{-4\pi^2\tau}} \left( \frac{ae^{-4\pi^2\tau}}{L} \ell - \frac{ae^{-4\pi^2\tau}(\pi^2 + 2a^2e^{-8\pi^2\tau})}{6L^3} \ell^3 + o(\ell^3) \right),$$

比较  $\ell^3$  项的系数:

$$-\frac{1}{24} \max(k^2 + 1) \geq -\frac{\pi^2 + 2a^2e^{-8\pi^2\tau}}{6L^2},$$

最后化简即得 (3.8).

#### 4 球面曲线的收敛性

**引理 4.1** 球面上简单闭曲线, 在流 (1.1) 下演化将保持总测地曲率  $I(t) = \int_X k ds = 0$  不变.

**证** 由演化曲线所围的面积  $A(t)$  的演化方程和球面高斯博内公式  $\int_X k ds = 2\pi - KA(t)$  可得

$$\frac{dA(t)}{dt} = - \int_X \frac{k}{K} ds = -\frac{1}{K}(2\pi - KA(t)),$$

又

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_X k ds \right) = -K \frac{dA}{dt} = \left( \int_X k ds \right) = I(t),$$

即

$$I(t) = I(0)e^t.$$

由于初始曲线满足  $I(0) = 0$ , 从而  $I(t) = 0$ .

接下来证明定理 1.1: 首先通过弦弧估计定理研究面积守恒和长度递减性, 由引理 4.1 显然可知面积  $A(t) \equiv 2\pi$ , 又由 (3.4) 可以得  $L'(t) \leq 0$ , 故  $L(t)$  单调递减, 所以根据球面等周不等式给出  $L(t) \geq 2\pi(\forall t \geq 0)$ , 因此存在极限

$$L_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t) \geq 2\pi, \quad (4.1)$$

运用定理 3.4, 有

$$\int_X (k^2 + 1) ds \leq \frac{4\pi^2}{L} \left( 1 + \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-8\pi^2\tau} \right) \int_X 1 ds,$$

又因为  $L(t)L_t = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(L^2)$ , 所以

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(L^2) + L^2 \leq 4\pi^2 \left( 1 + \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-8\pi^2\tau(t)} \right),$$

整理得微分不等式:

$$\frac{d}{dt}(L^2) \geq 2L^2 - 8\pi^2 \left( 1 + \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-8\pi^2\tau(t)} \right), \quad (4.2)$$

由于  $e^{-8\pi^2\tau(t)}$  随时间递减, 可得简化不等式:

$$\frac{d}{dt}(L^2) \geq 2L^2 - \Delta, \quad \Delta = 8\pi^2 \left( 1 + \frac{2a^2}{\pi^2} \right), \quad (4.3)$$

又由 (4.2), 当  $t$  充分大时,  $e^{-8\pi^2\tau(t)}$  趋于 0, 故对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $T_\varepsilon$  使当  $t \geq T_\varepsilon$  时

$$\frac{d}{dt}(L^2) \geq 2L^2 - 8\pi^2 - \varepsilon.$$

若  $L_\infty^2 > 4\pi^2$ , 取  $\varepsilon$  足够小可使右端正, 则  $L^2$  增长, 与  $L$  递减矛盾. 故  $L_\infty^2 \leq 4\pi^2$ , 即  $L_\infty \leq 2\pi$ . 结合 (4.1) 得  $L_\infty = 2\pi$ .

其次, 估计曲率的衰减. 由 (3.8) 可得:

$$\int_{\Gamma_t} k^2 ds \leq \frac{4\pi^2}{L(t)} \left( 1 + \frac{2a^2}{\pi^2} e^{-8\pi^2\tau(t)} \right) - L(t), \quad (4.4)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{-8\pi^2\tau(t)} \rightarrow 0$ , 代入上式得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_t} k^2 ds \leq \frac{4\pi^2}{2\pi} (1 + 0) - 2\pi = 2\pi - 2\pi = 0,$$

又  $\int k^2 ds \geq 0$ , 故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_t} k^2 ds = 0. \quad (4.5)$$

最后, 利用 Bernstein 估计与高阶衰减证明光滑收敛到测地线.

**引理 4.2** (Bernstein 型估计) 存在常数  $C_m > 0$  (依赖于初始曲线与阶数  $m$ ) 和  $\lambda > 0$ , 使得

$$\max_{\Gamma_t} |\nabla^m k| \leq C_m e^{-\lambda t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

**证** [13] 中的 Bernstein 估计给出  $k$  及其各阶导数的  $L^\infty$  估计, 结合 (4.5) 与抛物方程的正则性理论, 可推出指数衰减.

结合 (1.1) 和 (4.4), 在  $C^\infty$  意义下, 对任意  $m \geq 0$ :

$$\|\partial_t X\|_{C^m(\Gamma_t)} \leq C_m e^{-\lambda t},$$

因此  $X(\cdot, t)$  在  $C^\infty$  范数下是 Cauchy 列, 存在光滑极限

$$X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X(\cdot, t).$$

综上, 极限曲线  $\Gamma_\infty = X_\infty(S^1)$  满足:  $L_\infty = 2\pi$ ,  $k_\infty \equiv 0$  且演化过程保持简单性. 因此  $\Gamma_\infty$  是  $S^2$  上的一条简单闭测地线 (大圆), 定理 1.1 得证.

## 参 考 文 献

- [1] Gage M, Hamilton R S. The heat equation shrinking convex plane curves[J]. Journal of Differential Geometry, 1986, 23(1): 69-96.
- [2] Grayson M A. The heat equation shrinks embedded plane curves to round points[J]. Journal of Differential geometry, 1987, 26(2): 285-314.

- [3] Andrews B, Bryan P. Curvature bound for curve shortening flow via distance comparison and a direct proof of grayson’s theorem[M]. *Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2011.
- [4] Hamilton R S. Isoperimetric estimates for the curve shrinking flow in the plane[A]. In: *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*[C]. 1995: 137–201–222.
- [5] Huisken G. A distance comparison principle for evolving curves[J]. *Asian Journal of Mathematics*, 1998, 2(1): m127–133.
- [6] Edelen N. Noncollapsing of curve-shortening flow in surfaces[J]. *International Mathematics Research Notices*, 2015, 2015(20): m10143–10153.
- [7] Gage M E. Curve shortening on surfaces[A]. In: *Annales scientifiques de l’école normale supérieure, volume 23*[C]. 1990: 229–256. <http://www.cajcd.edu.cn/pub/wml.txt/980810-2.html>, 1998-08-16/1998-10-04.
- [8] Johnson D L, Muraleetharan M. Singularity formation of embedded curves evolving on surfaces by curvature flow[J]. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2010, 61(2): 121–146.
- [9] Ko D. Existence and morse index of two free boundary embedded geodesics on riemannian 2-disks with convex boundary[EB/OL]. arXiv:2309.09896, 2023.
- [10] Langford M, Zhu J J. A distance comparison principle for curve shortening flow with free boundary[EB/OL]. arXiv:2302.14258, 2023.
- [11] Gage M E. Deforming curves on convex surfaces to simple closed geodesics[J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 1990: 1037–1059.
- [12] Bryan P, Langford M, Zhu J J. Sharp distance comparison for curve shortening flow on the round sphere[EB/OL]. arXiv:2310.02649, 2023.
- [13] Andrews B, Chow B, Guenther C, et al. *Extrinsic geometric flows*, volume 206[M]. American mathematical society, 2022.

## STUDYING A CLASS OF CURVE FLOWS ON THE SPHERE VIA CHORD-ARC ESTIMATES

ZHAO Yu-ling

(*School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China*)

**Abstract:** In this paper, we study the following curve shortening flow:

$$X_t = \frac{k}{K}N.$$

Using the spherical chord-arc estimate method, we obtain that any initially smooth embedded closed spherical curve evolving under this flow preserves the vanishing total geodesic curvature  $\int_X k$ , and eventually converges to a simple closed geodesic on the sphere. This provides a relatively concise proof for the extension of Gage’s conjecture to the sphere.

**Keywords:** Chord-arc estimate; curve shortening flow; geodesic; convergence

**2010 MR Subject Classification:** 53A04; 53C44.