

图上无界拉普拉斯算子非线性抛物方程解的存在性和爆破现象

朱立平, 黄大伟

(西安建筑科技大学理学院, 陕西 西安 710055)

摘要: 本文研究了局部有限图上无界拉普拉斯算子非线性抛物方程 $u_t = \Delta u + h(x)f(u(x, t))$ 解的存在性和爆破问题. 首先利用巴拿赫不动点定理证明了温和解在短时间内的存在唯一性; 其次, 通过巧妙地构造辅助函数, 在图满足多项式增长条件和 f 满足适当的条件下, 利用热核估计证明了温和解会在有限时间内爆破. 推广了文献 [13] 的结果.

关键词: 无界拉普拉斯算子; 爆破; 抛物方程

MR(2010) 主题分类号: 35R02; 35K08; 35B44; 35K55

中图分类号: O175.26

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2026)03-0125-09

1 引言

本文研究局部有限图 $G(V, E)$ 上抛物方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + h(x)f(u(x, t)), & (x, t) \in V \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in V. \end{cases} \quad (1.1)$$

温和解的存在唯一性和爆破现象, 这里 V 表示图 G 所有顶点的集合, E 表示图 G 所有边的集合, Δ 表示图 G 上的无界拉普拉斯算子. $h(x)$ 是定义在 V 上的一个非负有界函数, 令

$$h_0 = \inf_{x \in V} h(x), \quad h_1 = \sup_{x \in V} h(x).$$

初值 $u_0(x)$ 是有界, 非负, 非平凡的.

自 1966 年 Fujita^[1] 在文献中给出 \mathbb{R}^N 上半线性热方程解发生爆破的临界指标之后, 越来越多的中外学者开始关注抛物方程解的整体存在性与爆破现象的理论研究^[2-6]. 1988 年, 对于抛物方程初边值问题

$$\begin{cases} u_t = Lu + h(x, t)f(u), & (x, t) \in D \times (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \bar{D}, \\ u(t, x) = 0, & (x, t) \in \partial D \times (0, T]. \end{cases} \quad (1.2)$$

这里 L 是区域 $D \subset \mathbb{R}^N$ 上的一致椭圆算子. 当 f 满足适当条件时, Meier^[2] 利用上下解方法, 结合比较原理, 证明了解在有限时间内爆破, 并得到了爆破时间的上界估计, 给出了更一般的爆破条件.

*收稿日期: 2025-07-18

接收日期: 2025-09-15

作者简介: 朱立平 (1977-), 女, 陕西西安, 副教授, 研究方向: 偏微分方程的理论及计算.

近年来, 图上离散抛物方程越来越多地被用来模拟人工智能, 生命科学, 信息传播等领域中发生在复杂网络结构上的耦合动力学过程. 在热传导模拟中, 离散抛物方程用于描述复杂几何结构的温度分布, 帮助优化散热设计; 在环境科学领域, 被用于模拟污染物在地下水中扩散的时空演化, 为污染治理提供理论支持; 在社交网络信息传播领域, 将用户视为节点, 关注关系被视为带权边, 用户对信息的知晓度视为节点上的状态量, 从而建立一个基于网络结构和邻居交互的, 可计算的离散抛物方程模型. 又因为在科学计算与工程仿真中, 其具有便于计算机求解, 同时保留原方程物理特性的优点, 因此关于图上离散抛物方程解的存在性和渐近行为研究已成为众多学者研究的热点问题之一^[7-13].

2017 年在满足曲率维数条件 $CDE'(n, 0)$ 和多项式体积增长条件的有限或局部有限连通加权图上, Yong Lin 和 Yiting Wu^[10] 针对半线性热方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}, & (x, t) \in V \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = a(x), & x \in V. \end{cases} \quad (1.3)$$

证明了对于有界, 非负, 非平凡初值, 若 $0 < m\alpha < 2$, (1.3) 不存在非负全局解; 若 $m\alpha > 2$, 当初值足够小时, 非负解是全局解. 2018 年, 作者^[11] 进一步研究了更具一般性的非线性抛物方程

$$u_t = \Delta u + f(u(x, t)), \quad (x, t) \in V \times (0, +\infty). \quad (1.4)$$

当 f 满足适当条件时, 作者分别证明了初值问题和 Dirichlet 初边值问题的解会在有限时间内发生爆破现象.

2024 年 Yang Liu^[12] 利用 Banach 不动点定理, 证明了局部有限图上抛物方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + h(x)u^{1+\alpha}(x, t), & (x, t) \in V \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in V \end{cases} \quad (1.5)$$

的解在短时间内是存在且唯一的. 在图 G 满足曲率维数条件 $CDE'(n, 0)$ 和多项式体积增长条件下, 作者利用热核估计证明得到了和文献 [10] 相同的结论.

在已有的相关研究基础上, 2025 年 Yong Lin^[13] 等人研究了局部有限图上无界 Laplace 算子半线性热方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}(x, t), & (x, t) \in V \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in V. \end{cases} \quad (1.6)$$

解的存在性与爆破现象. 为处理无界 Laplace 算子, 作者引入温和解避免交换半群 P_t 和 Δ 的运算顺序, 证明了温和解短时间内的存在唯一性. 此外, 通过引入图上一种新的内蕴度量, 得到一个新的热核对角下界估计, 并由此证明了非负全局解是不存在的.

受上述文献启发, 本文借助于文献 [13] 给出的内蕴度量, 本文通过构造 Banach 空间, 利用不动点定理证明局部有限图上无界拉普拉斯算子非线性抛物方程 (1.1) 温和解在短时间内的存在性. 此外通过巧妙地构造辅助函数证明解在有限时间内发生爆破. 和文献 [13] 相比, 方程 (1.1) 中的非线性源项 $h(x)f(u(x, t))$ 更具有一般性, 从而结论具有更广泛的适用性.

2 预备知识

设 V 是图的顶点集, $\omega : V \times V \rightarrow [0, \infty)$ 是一个权重函数, 且对于所有的 $x, y \in V$, 满足对称性: $\omega_{xy} = \omega_{yx}$; 正定性: 当且仅当 $x \sim y$ 时有 $\omega_{xy} > 0$. $\mu : V \rightarrow (0, \infty)$ 是一个在 V 上的正测度函数.

定义拉普拉斯算子如下

$$\Delta f(x) = \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \sim x} \omega_{xy} (f(y) - f(x)),$$

当且仅当 $D_\mu = \frac{\sum_{y \sim x} \omega_{xy}}{\mu(x)} < \infty$ 时, 拉普拉斯算子 Δ 是有界的.

本文中, 我们考虑无界拉普拉斯算子. 定义 $P_t = e^{t\Delta}$ 是与 Δ 对应的半群算子. 此外有

$$P_t f(x) = \sum_{y \in V} \mu(y) p(t, x, y) f(y),$$

和

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} P_t f(x) = P_0 f(x) = f(x).$$

为处理无界拉普拉斯算子, 参考文献[13], 我们引入图上一种内蕴度量.

定义 2.1^[13] 设距离函数 $\rho : V \times V \rightarrow [0, \infty)$ 满足对任意的 $x \in V$ 有 $\sum_{y \in V} \omega_{xy} \rho^2(x, y) \leq \mu(x)$, 成立, 则称 ρ 是图上的一个内蕴度量. 此外若存在一个正常数 j , 使得

$$\sup\{\rho(x, y) \mid x, y \in V, x \sim y\} \leq j,$$

我们称 ρ 是存在有限跳跃. 对于固定的点 $x \in V$, 基于内蕴度量 ρ 定义图上的球如下:

$$B_\rho(x, r) = \{y \in V : \rho(x, y) \leq r\},$$

这里 $r \geq 0$, 如果球 $B_\rho(x, r)$ 具有有限基数, 则称 $B_\rho(x, r)$ 是一个有限球, 这时球的体积定义为

$$V_\rho(x, r) = \sum_{y \in B_\rho(x, r)} \mu(y).$$

定义 2.2^[13] 若存在常数 $C > 0$ 和 $r_0 > 0$, 使得对于所有的 $x \in V$ 和 $r \geq r_0$ 都有

$$V_\rho(x, r) \leq Cr^m,$$

这里 $m \in \mathbb{N}_+$, 则称图 G 满足 m 次多项式体积增长条件.

定义 2.3 若函数 $u : V \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $(0, T)$ 上连续可微且一致有界, 对任意的 $(x, t) \in V \times [0, T)$ 满足

$$u(x, t) = P_t u_0(x) + \int_0^t P_{t-s} h(x) f(u(x, s)) ds, \quad (2.1)$$

那么称 u 为方程 (1.1) 的一个温和解.

引理 2.4^[13] 设 $G = (V, E)$ 是一个带内蕴度量 ρ 的加权图, 且 ρ 具有有限跳跃和有限球性质. 若图满足 m 次多项式体积增长条件, 那么对所有的 $x \in V$ 和足够大的时间 t 有

$$p(t, x, y) \geq \frac{1}{4V_\rho(x, c\sqrt{t \log t})},$$

其中 $c > \sqrt{\frac{m}{2}}$.

下面我们给出一些图上热核的重要性质.

引理 2.5^[14, 15] 对于 $t, s > 0$ 和 $x, y \in V$, 都有

- (1) $p(t, x, y)$ 是对时间 t 连续的;
- (2) $p(t, x, y) = p(t, y, x)$;
- (3) $p(t, x, y) \geq 0$;
- (4) $\sum_{y \in V} \mu(y)p(t, x, y) \leq 1$;
- (5) $\partial_t p(t, x, z) = \Delta_y p(t, x, y) = \Delta_x p(t, x, y)$;
- (6) $\sum_{z \in V} \mu(z)p(t, x, z)p(s, z, y) = p(t + s, x, y)$;
- (7) $p(t, x, y)$ 在时间 t 上是非递增的.

定义 2.6 如果对于所有的 $t > 0, x \in V$ 都有

$$\sum_{y \in V} \mu(y)p(t, x, y) = 1.$$

则图 $G = (V, E)$ 是随机完备的.

注 由文献[13]可知, 如果对于足够大的 r , 图 G 满足 m 次多项式体积增长条件, 那么 G 是随机完备的.

3 主要结论

为了得到结论, 我们假设函数 f 满足以下条件:

- (a1) f 在 $[0, +\infty)$ 上满足 Lipschitz 条件, L 为 Lipschitz 常数;
- (a2) f 是有界函数且 $f(0) = 0$;
- (a3) 对所有的 $\tau > 0$ 都有 $f(\tau) > 0$;
- (a4) f 在 $[0, +\infty)$ 上是凸函数;
- (a5) 存在一个 $r_0 > 0$, 当 $r > r_0$ 时, $\int_r^{+\infty} \frac{1}{f(\tau)} < \infty$.

定理 3.1 假设 $G = (V, E)$ 是一个局部有限连通图, 函数 f 满足条件 (a1) – (a3) 那么对于任意的有界初值, (1.1) 存在唯一的温和解.

证 首先定义 Banach 空间

$$X_t = \{u : V \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}\},$$

其范数定义为

$$\|u\|_{X_t} = \sup_{V \times [0, T]} |u|.$$

对于任意的 $u \in X_t$, 我们证明算子

$$D(u)(x, t) = \sum_{y \in V} \mu(y)p(t, x, y)u_0(y) + \int_0^t \sum_{y \in V} \mu(y)p(t-s, x, y)h(y)f(u(y, s)) ds,$$

在闭球 $B(u_0, A\|u_0\|_{X_t})$ 上是一个压缩映射, 其中

$$B(u_0, A\|u_0\|_{X_t}) = \{u \in X_t : \|u - u_0\|_{X_t} \leq A\|u_0\|_{X_t}\},$$

这里 $A > 2$.

首先, 我们证明算子 $D(u)(x, t)$ 关于时间 t 连续, 对任意的 $t_1, t_2 \in [0, T]$ 和 $x \in V$, 由于

$$\sum_{y \in V} \mu(y)p(t, x, y) \leq 1,$$

所以

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_1}^{t_2} \sum_{y \in V} \mu(y)p(t-s, x, y)h(y)f(u(y, s)) ds \right| \\ & \leq h_1 \left| \int_{t_1}^{t_2} \sum_{y \in V} \mu(y)p(t-s, x, y)(f(u(y, s)) - f(0)) ds \right| \\ & \leq h_1 \left| \int_{t_1}^{t_2} \sum_{y \in V} \mu(y)p(t-s, x, y)L\|u\|_{X_t} ds \right| \\ & \leq h_1 L\|u\|_{X_t}|t_2 - t_1| \\ & \leq h_1 L(A+1)\|u_0\|_{X_t}|t_2 - t_1|. \end{aligned}$$

又因为 $\sum_{y \in V} \mu(y)p(t, x, y)u_0(y)$ 关于时间 t 连续, 结合上式可知算子 $D(u)(x, t)$ 关于时间 t 连续.

其次, 证明 $D(u)(x, t)$ 是闭的. 对于任意的 $u \in B(u_0, A\|u_0\|_{X_t})$, 有

$$\|D(u)(x, t) - u_0\| \leq \|D(u)(x, t)\| + \|u_0\|_{X_t} \leq 2\|u_0\|_{X_t} + h_1 L(A+1)\|u_0\|_{X_t} T \leq A\|u_0\|_{X_t},$$

其中

$$T \leq \frac{A-2}{h_1 L(A+1)},$$

所以有 $D(u)(x, t) \in B(u_0, A\|u_0\|_{X_t})$.

最后, 证明算子 $D(u)(x, t)$ 是一个压缩映射, 对于任意 $u, v \in B(u_0, A\|u_0\|_{X_t})$,

$$\begin{aligned} \|D(u) - D(v)\|(x, t) & \leq \int_0^t \sum_{y \in V} \mu(y)p(t-s, x, y)h(y)|f(u(y, s)) - f(v(y, s))| ds \\ & \leq h_1 \int_0^t \sum_{y \in V} \mu(y)p(t-s, x, y)|f(u(y, s)) - f(v(y, s))| ds \\ & \leq h_1 L T \|u - v\|_{X_t}. \end{aligned}$$

这里 $h_1 LT < 1$.

所以由压缩映射原理可知积分方程

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{y \in V} \mu(y) p(t, x, y) u_0(y) + \int_0^t \sum_{y \in V} \mu(y) p(t-s, x, y) h(y) f(u(y, s)) ds, \\ (t, x) \in [0, T] \times V, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in V. \end{cases} \quad (3.1)$$

存在唯一解 $u \in B(u_0, A \|u_0\|_{X_t})$, 即方程 (1.1) 存在唯一温和解.

定理 3.2 假设 $G(V, E)$ 是一个局部有限连通加权图, 图上的内蕴度量 ρ 具有有限跳跃和有限球性质, 存在一个顶点 $x_0 \in V$, 使得初值 $u_0(x_0) > 0$, 函数 f 满足 (a1) – (a5). 令

$$F(r) = \int_r^{+\infty} \frac{1}{h_0 f(\tau)} d\tau,$$

如果存在一个实数 δ 且 $0 < \frac{2}{\delta+1} < 1$, 使得

$$F(t^{-1}) \leq t^{\frac{2}{m(\delta+1)}}. \quad (3.2)$$

那么 (1.1) 的非负温和解 u 在有限时间内爆破.

证 我们利用反证法来证明定理 3.2: 假设方程 (1.1) 存在一个非负温和解 u , 定义

$$J_t(x, s) = P_{t-s}(u(\cdot, s)(x)) = \sum_{y \in V} \mu(y) p(t-s, x, y) u(y, s),$$

$$K_t(s, x) = P_{t-s}(h(x) f(u(x, s))) = \sum_{y \in V} \mu(y) p(t-s, x, y) h(y) f(u(y, s)).$$

令

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & x \in B_\rho(x_0, k), \\ 0, & x \notin B_\rho(x_0, k), \end{cases}$$

由 η_k 的定义可得

$$\begin{aligned} P_{t-s}(P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau))) \cdot \eta_k &\leq P_{t-s}(P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau))) \cdot \eta_{k+1}, \\ P_{t-s}(P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau))) \cdot \eta_k &\leq P_{t-\tau} h(x) f(u(x, \tau)) \\ &\leq h_1 |f(u) - f(0)| \\ &\leq h_1 L(A+1) \|u_0\|_{X_t}, \end{aligned}$$

根据单调收敛定理可得, 当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$P_{t-s}(P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau))) \cdot \eta_k \rightarrow P_{t-\tau} h(x) f(u(x, \tau)),$$

从而根据控制收敛原理得

$$\int_0^s P_{t-s}(P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau))) \cdot \eta_k d\tau \rightarrow \int_0^s P_{t-\tau} h(x) f(u(x, \tau)) d\tau.$$

类似地, 当 $k \rightarrow \infty$ 时

$$P_{t-s} \left(\int_0^s P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau)) d\tau \cdot \eta_k \right) \rightarrow P_{t-s} \left(\int_0^s P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau)) d\tau \right),$$

又因为

$$P_{t-s} \left(\int_0^s P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau)) d\tau \cdot \eta_k \right) = \int_0^s P_{t-s} (P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau))) \cdot \eta_k d\tau,$$

根据极限的唯一性有

$$P_{t-s} \left(\int_0^s P_{s-\tau} h(x) f(u(x, \tau)) d\tau \right) = \int_0^s P_{t-\tau} h(x) f(u(x, \tau)) d\tau.$$

由 (2.1) 式可得

$$J_t(x, s) = P_t(u_0)(x) + \int_0^s K_t(x, \tau) d\tau,$$

对上式关于 s 求导

$$\partial_s J_t(x, s) = K_t(x, s) = P_{t-s} h(x) f(u(x, s)) \geq h_0 P_{t-s} f(u(x, s)),$$

利用 Jensen's 不等式和图 G 的随机完备性, 可以得到

$$\begin{aligned} P_{t-s} f(u(x, s)) &= \sum_{y \in V} \mu(y) p(t-s, x, y) f(u(y, s)) \\ &\geq f \left(\sum_{y \in V} \mu(y) p(t-s, x, y) u(y, s) \right) \\ &= f(P_{t-s} u(x, s)), \end{aligned}$$

即有

$$\partial_s J_t(x, s) \geq h_0 f(J_t(x, s)). \quad (3.3)$$

考虑如下辅助函数:

$$Q(s) = \frac{F(J_t(x, 0)) - F(J_t(x, s))}{h_0} = \int_{J_t(x, 0)}^{J_t(x, s)} \frac{1}{h_0 f(\tau)} d\tau, \quad (3.4)$$

由于 u 是一个非负温和解, 由 (3.1), 对于任意的 $(x, t) \in V \times [0, T)$, 有

$$u(x, t) \geq \mu(x_0) p(t, x, x_0) u_0(x_0) + \int_0^t \sum_{y \in V} \mu(y) p(t-s, x, y) h(y) f(u(y, s)) ds,$$

当 $t > 0$ 时, $p(t, x, x_0) > 0$, $u_0(x_0) > 0$, f 非负, 所以

$$\int_0^t \sum_{y \in V} \mu(y) p(t-s, x, y) h(y) f(u(y, s)) ds \geq 0,$$

从而 $u(x, t) > 0$, 因此 $J_t(x, s) > 0$. 由 (3.4) 式可知, 对任意的 $s \in [0, t)$, 有 $Q'(s) = \partial_s J_t(x, s) \frac{1}{h_0 f(J_t(x, s))} \geq 1$, 易知 $Q(0) = 0$, 对任意 $0 < \epsilon < t$, 利用中值定理得到

$$\frac{Q(t - \epsilon) - Q(0)}{t - \epsilon} = Q'(s), s \in (0, t - \epsilon),$$

进而有

$$Q(t - \epsilon) \geq t - \epsilon. \quad (3.5)$$

因为对于任意 $s > 0$ 都有 $f(s) > 0$, 故 $F(J_t(x, s)) > 0$, 所以有

$$F(J_t(x, 0)) > F(J_t(x, 0)) - F(J_t(x, t - \epsilon)) = Q(t - \epsilon) \geq t - \epsilon,$$

让 $\epsilon \rightarrow 0$, 就有

$$F\left(\sum_{y \in V} \mu(y) p(t - s, x, y) u_0(y, s)\right) > t.$$

当 $r_0 > 0$, $r \geq r_0$, $x \in V$ 时, 由多项式增长条件 $V_\rho(x, r) \leq Cr^m$ 有

$$p(t, x, x) \geq \frac{1}{4C^m} \left(t^{\frac{1}{2}} \log t\right)^{-m},$$

进而

$$\sum_{y \in V} \mu(y) p(t - s, x, y) u_0(y) \geq \mu(x) p(t, x, x) u_0(x) \geq \tilde{C} \left(t^{\frac{1}{2}} \log t\right)^{-m},$$

这里 $\tilde{C} = \frac{\mu(x) u_0(x)}{4C^m} > 0$, 由于 F 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减, 因此

$$F\left(\tilde{C} \left(t^{\frac{1}{2}} \log t\right)^{-m}\right) > t. \quad (3.6)$$

另一方面, 当 $\delta > 0$ 时 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{C}^{-\frac{1}{m}} \log t}{t^{\frac{\delta}{2}}} = 0$, 所以存在一个 $t_1 > 0$, 当 $t > t_1$ 时, 有 $\tilde{C}^{-\frac{1}{m}} t^{\frac{1}{2}} \log t < t^{\frac{\delta+1}{2}}$, 进而当 $t > t_1$ 时, 由 (3.2) 式有

$$F\left(\tilde{C} \left(t^{\frac{1}{2}} \log t\right)^{-m}\right) < F\left(t^{-\frac{m(\delta+1)}{2}}\right) < t.$$

与 (3.6) 式矛盾.

参 考 文 献

- [1] Fujita H. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ [J]. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A. Math., 1966, 13(2): 109–124.
- [2] Meier P. Blow-up of solutions of semilinear parabolic differential equations[J]. Z. Angew. Math. Phys., 1988, 39(2): 135–149.
- [3] Meier P. On the critical exponent for reaction-diffusion equations[J]. Arch. Rational Mech. Anal., 1990, 109(1): 63–71.

- [4] Nabongo D, Koffi N, Augustin T K. Blow-up time of solutions for some nonlinear parabolic equations[J]. *Int. J. Appl. Math.*, 2016, 29(1): 31–52.
- [5] 凌征球, 覃思乾, 周泽文. Robin 边界条件下的抛物方程爆破分析 [J]. *数学杂志*, 2020, 40(2): 219–227.
- [6] 杜玉阁, 田书英. 一类带粘性项的抛物方程解的存在性和爆破性 [J]. *数学杂志*, 2022, 42(1): 73–83.
- [7] Weber A. Analysis of the physical Laplacian and the heat flow on a locally finite graph[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, 370(1): 146–158.
- [8] Xin Qiao, Xu L, Mu Chunlai. Blow-up for the ω -heat equation with Dirichlet boundary conditions and a reaction term on graphs[J]. *Appl. Anal.*, 2014, 93(8): 1691–1701.
- [9] Lin Yong, Wu Yiting. On-diagonal lower estimate of heat kernels on graphs[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, 456(2): 1040–1048.
- [10] Lin Yong, Wu Yiting. The existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation on graphs[J]. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2017, 56(4): 1–22.
- [11] Lin Yong, Wu Yiting. Blow-up problems for nonlinear parabolic equations on locally finite graphs[J]. *Acta. Math. Sci.*, 2018, 38(3): 843–856.
- [12] Liu Yang. Existence and nonexistence of global solutions to the parabolic equations on locally finite graphs[J]. *Results Math.*, 2024, 79(4): 164.
- [13] Lin Yong, Liu Shuang, Wu Yiting. Blow-up phenomenon to the semilinear heat equation for unbounded Laplacians on graphs[J]. *Rev. Mat. Complut.*, 2025, 38(1): 281–294.
- [14] Wojciechowski R K. Heat kernel and essential spectrum of infinite graphs[J]. *Indiana Univ. Math. J.*, 2009, 58(3): 1419–1441.
- [15] Horn P, Lin Yong, Liu Shuang, Shing-Tung Yau. Volume doubling, Poincaré inequality and Gaussian heat kernel estimate for non-negatively curved graphs[J]. *J. Reine Angew. Math.*, 2019, 2019(757): 89–130.

THE EXISTENCE OF SOLUTIONS AND BLOW-UP PHENOMENON TO THE PARABOLIC EQUATION FOR UNBOUNDED LAPLACIANS ON THE GRAPHS

ZHU Liping, HUANG Dawei

(College of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: In this paper, we study the existence and blow-up of solutions to a nonlinear parabolic equation with unbounded Laplace operators on locally finite graphs: $u_t = \Delta u + h(x)f(u(x, t))$. First, the existence and uniqueness of mild solutions in a short time interval are established using the Banach fixed-point theorem. Then, by skillfully constructing auxiliary functions and under appropriate conditions concerning polynomial growth of the graph and the nonlinearity f , the finite-time blow-up of mild solutions is proved via heat kernel estimates. These results extend those in the literature [13].

Keywords: unbounded Laplacians operator; blow-up; parabolic equation

2010 MR Subject Classification: 35R02; 35K08; 35B44; 35K55.