

压缩秩 1 投影对联合数值域的映射

李 阳, 陈少波

(重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 本文主要给出了压缩秩 1 投影对联合数值域的映射 Φ 的完全刻画. 利用投影对的联合数值域自身所具有的性质得到了 Φ 保持双边保正交性, 并且在 Hilbert 空间维数为 2 时 Φ 保持秩 1 投影对的联合数值域, 由此我们得到了压缩秩 1 投影对联合数值域的满射由一个酉算子或反酉算子诱导, 从而推广了邓年、钱文华和吴文明在有限维 Hilbert 空间上保持秩 1 投影对联合数值域映射的结果.

关键词: 投影对; 压缩联合数值域; 酉算子; 反酉算子

MR(2010) 主题分类号: 47A12; 47A13

中图分类号: O177.2

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2026)02-0120-05

1 引言

算子数值域的研究可以追溯到 1919 年 F. Hausdorff 与 O. Toeplitz 的工作 (见文献 [1, 2]). 设 \mathcal{H} 为复 Hilbert 空间, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 为 \mathcal{H} 上全体有界线性算子构成的集合. 对任意的 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, A 的数值域定义为

$$W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \}.$$

Hausdorff-Toeplitz 定理 (见文献 [1, 2]) 指出, 算子的数值域总是一个凸集; 此外, 当 \mathcal{H} 为有限维 Hilbert 空间时, 矩阵的数值域是紧集. 矩阵的数值域总是包含其谱集, 但通常比谱集大得多. 例如, 若 A 是正规矩阵, 则 $W(A)$ 是其谱集的凸包. 1964 年, P. R. Halmos 提出了算子的 k -数值域和算子组的联合数值域的概念. 当 $k \leq \dim \mathcal{H}$ 时, 有界线性算子 $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ 的 k -数值域定义为

$$W_k(A) = \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \langle Ax_i, x_i \rangle : x_1, \dots, x_k \in \mathcal{H} \text{ 是相互正交的单位向量} \right\}.$$

文献 [3] 表明对任意 n 阶矩阵 A , $W_k(A)$ 也是凸集. 设 $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^m$, 算子组 \mathbf{A} 的联合数值域定义为

$$W(\mathbf{A}) = \{ (\langle A_1 x, x \rangle, \dots, \langle A_m x, x \rangle) : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1 \}.$$

*收稿日期: 2025-08-12 接收日期: 2025-09-16

基金项目: 重庆市自然科学基金资助 (CSTB2025NSCQLZX0057).

作者简介: 李阳 (2000-), 女, 四川万源, 研究生, 主要研究方向: 算子代数.

E-mail: 2023110510010@stu.cqnu.edu.cn.

通讯作者: 陈少波 (1993-), 男, 湖北天门, 研究生, 主要研究方向: 算子代数.

Email: 2024010510002@stu.cqnu.edu.cn.

算子组的联合数值域同样具有单个算子数值域所具有的一些性质. 例如, 如果 \mathbf{A} 是交换的正规算子组, 那么 $W(\mathbf{A})$ 是凸的, 并且 \mathbf{A} 的数值域的闭包等于 \mathbf{A} 的谱集的凸包 (见文献 [4]).

设 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 为 \mathcal{H} 上所有投影所构成的集合, $\mathcal{P}_n(\mathcal{H})$ 为 \mathcal{H} 上所有秩 n 投影所构成的集合, $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{H})$ 为 \mathcal{H} 上所有秩与余秩均为无穷的投影所构成的集合. 2004 年, P. Šemrl 在文献 [5] 中证明了 $\mathcal{P}_n(\mathcal{H})$ (或 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{H})$) 上保持双边正交性的双射由一个酉算子或反酉算子诱导. 2016 年, G. P. Gehér 和 P. Šemrl 在文献 [6] 中进一步证明了 $\mathcal{P}_n(\mathcal{H})$ 上保持双边正交性的满射由一个酉算子或反酉算子诱导. 2018 年, G. P. Gehér 和 P. Šemrl 在文献 [7] 中证明了 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{H})$ 上的等距满射 Φ 具有形式 $\Phi(P) = U^*PU$ 或 $\Phi(P) = U^*(I - P)U$, 其中 U 是 \mathcal{H} 上的酉算子或反酉算子. 根据自伴算子的性质 (详见式 (2.1)), 保持投影对联合数值域的映射一定是等距映射. 因此, 在 $\mathcal{P}_n(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{P}_\infty(\mathcal{H})$ 上保持投影对联合数值域的满射已经被完全刻画. 一个自然的问题是: 如何刻画 $\mathcal{P}_n(\mathcal{H})$ 上压缩投影对联合数值域的映射?

2025 年, 邓年、钱文华和吴文明证明了如果 \mathcal{H} 的维数有限, 那么 $\mathcal{P}(\mathcal{H})$ 上压缩投影对联合数值域的满射由一个酉算子或反酉算子诱导. 基于此, 本文主要刻画了 $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 上压缩投影对联合数值域的映射.

2 压缩秩 1 投影算子对联合数值域的映射

设 $\{e_i : i \in \Lambda\}$ 是 \mathcal{H} 的一组标准正交基, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. 定义 $\text{Tr}(A) = \sum_{i \in \Lambda} \langle Ae_i, e_i \rangle$, 称 $\text{Tr}(A)$ 为算子 A 的迹. 记 $P \wedge Q$ 为从 \mathcal{H} 到 $P(\mathcal{H}) \cap Q(\mathcal{H})$ 上的投影, $P \vee Q$ 为从 \mathcal{H} 到 $\overline{P(\mathcal{H}) + Q(\mathcal{H})}$ 上的投影, 投影对 (P, Q) 的联合数值域为

$$W(P, Q) = \{(\langle Px, x \rangle, \langle Qx, x \rangle) : x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

下面我们给出本文的主要定理:

定理 2.1 设 \mathcal{H} 为复 Hilbert 空间, $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 为 \mathcal{H} 上所有秩 1 投影构成的集合, $\Phi : \mathcal{P}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 压缩秩 1 投影算子对的联合数值域, 即 $W(\Phi(P), \Phi(Q)) \subseteq W(P, Q)$ 对任意 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 成立. 如果 $\dim(\mathcal{H}) > 2$ 且 Φ 是满射, 那么存在一个酉算子或反酉算子 U , 使得 $\Phi(P) = U^*PU$ 对任意 $P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 成立. 如果 $\dim(\mathcal{H}) = 2$, 那么 Φ 为满射, 此时, 存在一个酉算子或反酉算子 U , 使得 $\Phi(P) = U^*PU$ 对任意 $P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 成立.

为证明主要定理我们先给出本节的几个主要引理:

引理 2.1 设 \mathcal{H} 是复 Hilbert 空间, $\dim \mathcal{H} \geq 2$, $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, 则以下结论成立:

- (1) $P \wedge Q = 0$ 当且仅当 $(1, 1) \notin W(P, Q)$;
- (2) $P \vee Q = I$ 当且仅当 $(0, 0) \notin W(P, Q)$;
- (3) $PQ = 0$ 当且仅当 $a + b \leq 1, \forall (a, b) \in W(P, Q)$;
- (4) $P = Q$ 当且仅当 $a = b, \forall (a, b) \in W(P, Q)$;
- (5) $P + Q = I$ 当且仅当 $a + b = 1, \forall (a, b) \in W(P, Q)$.

证明: 由投影对联合数值域本身所具有的性质即可得证.

引理 2.2 设 \mathcal{H} 为复 Hilbert 空间且 $\dim(\mathcal{H}) = 2$, $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 为 \mathcal{H} 上所有秩 1 投影构成的集合. 如果 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 且 $\text{Tr}(PQ) = t$, 其中 $t \in [0, 1]$, 那么

$$W(P, Q) = \left\{ (x, y) : \left(\sqrt{tx} - \sqrt{(1-t)(1-x)} \right)^2 \leq y \leq \left(\sqrt{tx} + \sqrt{(1-t)(1-x)} \right)^2, 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

证 令

$$D = \left\{ (x, y) : \left(\sqrt{tx} - \sqrt{(1-t)(1-x)} \right)^2 \leq y \leq \left(\sqrt{tx} + \sqrt{(1-t)(1-x)} \right)^2, 0 \leq x \leq 1 \right\}.$$

接下来我们证明 $W(P, Q) = D$.

当 $\text{Tr}(PQ) = 1$ 时, 有 $P = Q$. 于是我们有

$$W(P, Q) = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\}.$$

当 $\text{Tr}(PQ) = 0$ 时, 有 $PQ = 0$. 因为 $\dim(\mathcal{H}) = 2$ 且 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 所以 $P + Q = I$. 于是对于任意的 $(x, y) \in W(P, Q)$, 我们有 $x + y = 1$. 由于 $PQ = 0$, 于是 $(1, 0), (0, 1) \in W(P, Q)$. 由 $W(P, Q)$ 的凸性可知

$$W(P, Q) = \{(x, y) : x + y = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

当 $\text{Tr}(PQ) = t \in (0, 1)$ 时, 由 Halmos 双投影定理 [8] 可知 P, Q 可表示成如下形式:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} t & \sqrt{t-t^2} \\ \sqrt{t-t^2} & 1-t \end{pmatrix}.$$

定义 $e_P = (1, 0)^T$, $e_Q = (\sqrt{t}, \sqrt{1-t})^T$. 于是 $P = e_P \otimes e_P$ 且 $Q = e_Q \otimes e_Q$. 对任意的 $(x, y) \in W(P, Q)$, 存在单位向量 $(a_1, a_2)^T \in \mathcal{H}$, 使得

$$x = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = |a_1|^2,$$

$$y = \left\langle \begin{pmatrix} t & \sqrt{t-t^2} \\ \sqrt{t-t^2} & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = t|a_1|^2 + 2\sqrt{t-t^2}\text{Re}(a_1\bar{a}_2) + (1-t)|a_2|^2.$$

因为 $|a_2|^2 = 1 - |a_1|^2$, 所以

$$\begin{aligned} y &\leq t|a_1|^2 + 2\sqrt{t-t^2}|a_1||a_2| + (1-t)|a_2|^2 = \left(\sqrt{t}|a_1| + \sqrt{1-t}|a_2| \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{t}|a_1| + \sqrt{1-t}\sqrt{1-|a_1|^2} \right)^2 = \left(\sqrt{tx} + \sqrt{(1-t)(1-x)} \right)^2, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} y &\geq t|a_1|^2 - 2\sqrt{t-t^2}|a_1||a_2| + (1-t)|a_2|^2 = \left(\sqrt{t}|a_1| - \sqrt{1-t}|a_2| \right)^2 \\ &= \left(\sqrt{t}|a_1| - \sqrt{1-t}\sqrt{1-|a_1|^2} \right)^2 = \left(\sqrt{tx} - \sqrt{(1-t)(1-x)} \right)^2. \end{aligned}$$

因此 $W(P, Q) \subseteq D$.

对任意 $x \in [0, 1]$, 取 $\xi = (\sqrt{x}, \sqrt{1-x})^T$, 我们有

$$\langle P\xi, \xi \rangle = x, \quad \langle Q\xi, \xi \rangle = \left(\sqrt{tx} + \sqrt{(1-t)(1-x)} \right)^2.$$

于是 $(x, (\sqrt{tx} + \sqrt{(1-t)(1-x)})^2) \in W(P, Q)$. 取 $\eta = (\sqrt{x}, -\sqrt{1-x})^T$, 我们有

$$\langle P\eta, \eta \rangle = x, \quad \langle Q\eta, \eta \rangle = (\sqrt{tx} - \sqrt{(1-t)(1-x)})^2.$$

于是 $(x, (\sqrt{tx} - \sqrt{(1-t)(1-x)})^2) \in W(P, Q)$. 由 $W(P, Q)$ 的凸性可知 $D \subseteq W(P, Q)$. 综上所述, $W(P, Q) = D$.

注 由引理 2.2 以及 [9, Theorem 1.5] 可知, 当 $0 < t < \frac{1}{2}$ 时, $W(P, Q)$ 是以 $(\frac{1+\sqrt{1-2t}}{2}, \frac{1-\sqrt{1-2t}}{2})$ 和 $(\frac{1-\sqrt{1-2t}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-2t}}{2})$ 为焦点, 短轴长等于 $\sqrt{2t}$ 的椭圆盘, 其边界方程为 $\frac{(x-y)^2}{1-t} + \frac{(x+y-1)^2}{t} = 1$. 当 $\frac{1}{2} < t < 1$ 时, $W(P, Q)$ 是以 $(\frac{1-\sqrt{2t-1}}{2}, \frac{1-\sqrt{2t-1}}{2})$ 和 $(\frac{1+\sqrt{2t-1}}{2}, \frac{1+\sqrt{2t-1}}{2})$ 为焦点, 短轴长等于 $\sqrt{2(1-t)}$ 的椭圆盘, 其边界方程为 $\frac{(x-y)^2}{1-t} + \frac{(x+y-1)^2}{t} = 1$. 当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $W(P, Q)$ 是以 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为圆心, 半径等于 $\frac{1}{2}$ 的圆盘, 其边界方程为 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.

引理 2.3 设 \mathcal{H} 为复 Hilbert 空间, $\mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 为 \mathcal{H} 上所有秩 1 投影构成的集合, $\Phi: \mathcal{P}_1(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 为压缩秩 1 投影对的联合数值域的映射. 若 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$, 则以下结论成立:

- (1) 若 $P \wedge Q = 0$, 则 $\Phi(P) \wedge \Phi(Q) = 0$;
- (2) Φ 是单射;
- (3) $PQ = 0$ 当且仅当 $\Phi(P)\Phi(Q) = 0$;
- (4) 如果 $\dim(\mathcal{H}) = 2$, 那么 $W(\Phi(P), \Phi(Q)) = W(P, Q)$.

证 (1) 若 $P \wedge Q = 0$, 则由引理 2.1 以及 Φ 压缩投影对的联合数值域可知 $\Phi(P) \wedge \Phi(Q) = 0$.

(2) 假设 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 且 $P \neq Q$, 此时 $P \wedge Q = 0$. 由 (1) 知 $\Phi(P) \wedge \Phi(Q) = 0$, 从而 $\Phi(P) \neq \Phi(Q)$, 因此 Φ 是单射.

(3) 若 $P, Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 且 $PQ = 0$, 则由引理 2.1 以及 Φ 压缩投影对的联合数值域可知 $\Phi(P)\Phi(Q) = 0$.

反之, 当 $\Phi(P)\Phi(Q) = 0$ 时, 存在单位向量 $x \in \Phi(Q)(\mathcal{H})$, 使得 $\Phi(P)x = 0$ 且 $\Phi(Q)x = x$, 于是 $(0, 1) \in W(\Phi(P), \Phi(Q))$. 由 Φ 压缩投影对的联合数值域可知 $(0, 1) \in W(P, Q)$, 从而存在单位向量 $y \in \mathcal{H}$, 使得 $Py = 0$ 且 $Qy = y$. 于是 $PQy = Py = 0$. 从而由 $Q \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H})$ 知 $PQ = 0$.

(4) 由引理 2.2 知当 $\text{Tr}(P_1Q_1) \neq \text{Tr}(P_2Q_2)$ 时, $W(P_1, Q_1)$ 与 $W(P_2, Q_2)$ 之间不存在包含关系. 因此当 $W(\Phi(P), \Phi(Q)) \subseteq W(P, Q)$ 时, 必有 $\text{Tr}(PQ) = \text{Tr}(\Phi(P)\Phi(Q))$, 从而 $W(\Phi(P), \Phi(Q)) = W(P, Q)$.

定理 2.1 的证明 由引理 2.3 知 Φ 保持双边正交性. 如果 $\dim(\mathcal{H}) > 2$ 且 Φ 是满射, 由文献 [6, Theorem 1.2] 可知, 存在一个酉算子或反酉算子 U , 使得

$$\Phi(P) = U^*PU, \quad \forall P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H}).$$

如果 $\dim(\mathcal{H}) = 2$, 由引理 2.3 可知 Φ 保持秩 1 投影对的联合数值域. 又因为对任意 $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, 我们有

$$\begin{aligned} \|P - Q\| &= \sup\{|\langle (P - Q)x, x \rangle| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{H}\} \\ &= \sup\{|\langle Px, x \rangle - \langle Qx, x \rangle| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{H}\} \\ &= \sup\{|a - b| : (a, b) \in W(P, Q)\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

所以 Φ 为等距映射. 由 [6, Theorem 1.1] 可知, 存在一个酉算子或反酉算子 U , 使得

$$\Phi(P) = U^*PU, \forall P \in \mathcal{P}_1(\mathcal{H}).$$

参 考 文 献

- [1] Hausdorff F. Der wertvorrat einer bilinearform [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1919, 3(1): 314–316.
- [2] Toeplitz O. Das algebraische analogon zu einem satze von Fejér [J]. *Mathematische Zeitschrift*, 1918, 2(1): 187–197.
- [3] Halmos P R. *A Hilbert space problem book*, 2nd ed. [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [4] Dash A T. Joint numerical range [J]. *Glasnik Matematicki*, 1972, 7(1): 75–81.
- [5] Šemrl P. Orthogonality preserving transformations on the set of n -dimensional subspaces of a Hilbert space [J]. *Illinois Journal of Mathematics*, 2004, 48(2): 567–573.
- [6] Gehér G P, Šemrl P. Isometries of Grassmann spaces [J]. *Journal of Functional Analysis*, 2016, 270(4): 1585–1601.
- [7] Gehér G P, Šemrl P. Isometries of Grassmann spaces II [J]. *Advances in Mathematics*, 2018, 332: 287–310.
- [8] Halmos P R. Two subspaces [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1969, 144: 381–389.
- [9] Gau H L, Wu P Y. *Numerical ranges of Hilbert space operators* [M]. New York: Cambridge University Press, 2021.

MAPPINGS SHRINKING THE JOINT NUMERICAL RANGE OF ANY PAIR OF RANK 1 PROJECTIONS

LI Yang, CHEN Shao-bo

(*School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China*)

Abstract: This paper characterizes the map Φ which shrinks the joint numerical range of any pair of rank 1 projections. By using the intrinsic properties of the joint numerical range of pairs of projections, this paper demonstrates that Φ preserves orthogonality in both directions and Φ preserves the joint numerical range of any pair of rank 1 projections when the Hilbert space is two-dimensional. It follows that a surjective mapping shrinking the joint numerical range of any pair of rank 1 projections is induced by a unitary or anti-unitary operator, thereby generalizing the results of Deng Nian, Qian Wenhua, and Wu Wenming on mappings that preserve the joint numerical range of any pair of rank 1 projections on finite-dimensional Hilbert spaces.

Keywords: pair of projection; shrinking joint numerical range; unitary; anti-unitary

2010 MR Subject Classification: 47A12; 47A13