Vol. 46 (2026)
No. 2

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

Banach 空间几何性质与凸泛函四重不等式

谢子秀, 马 涛

(中南民族大学数学与统计学学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 本文研究了 Banach 空间上的凸泛函四重不等式, 该不等式联系于 Banach 空间中的凸泛函的几何性质及凸函数的光滑性条件. 具体地, 研究了凸函数 f 满足一定条件下的单调性和凹凸性, 并在 $1 \le p \le 2$ 时的 p 一致光滑 Banach 空间上, 建立了四重不等式, 即对任意 $y, z, k, w \in X$, 有

$$f(\|y-k\|) + f(\|z-w\|) \le f(\|y-w\|) + f(\|w-k\|) + Cf(\|z-k\|) + Cf(\|y-z\|).$$

并且给出了该结论在 L_p 空间和非交换的 L_p 空间以及某些内插空间上的应用. 这一工作是 Enflo 关于圆度不等式及 Schötz 在 Hilbert 空间上的凸泛函四重不等式在 Banach 空间框架下的推广.

关键词: Banach 空间几何; 四重不等式; p 一致光滑性; Clarkson 不等式; 凸泛函

MR(2010) **主题分类号**: 26B25; 46B20 **中图分类号**: O177.2

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2026)02-0086-11

1 引言

为了回答 Lindenstrauss 在文献 [1] 中提出的猜想, 即当 $p_1 \ne p_2$, $1 \le p_1$, $p_2 \le 2$ 时, 无限维的 $L_{p_1}(\mu)$ 和 $L_{p_2}(\mu)$ 不是一致同胚的, Enflo 在文献 [2] 中引入了度量空间中“圆度”(roundness) 的几何概念：设 (X, d) 是度量空间, 集合 $\Re \subset [0, \infty)$. 对任意 $p \in \Re$ 以及任意 $y, z, k, w \in X$, 满足如下的四重不等式

$$d^p(y,k) - d^p(y,w) - d^p(z,k) + d^p(z,w) \le d^p(k,w) + d^p(y,z). \tag{1.1}$$

我们称集合 $\Re$ 的上确界为 (X, d) 的圆度.

在任何度量空间中, 当 $p = 1$ 时, 根据三角形不等式, (1.1) 式总成立. 若 X 是 Hilbert 空间且 $p = 2$, 通过平行四边形法则也容易得到 (1.1) 式. Enflo 在文献 [2] 中证明了 L_p 空间 $(1 \le p \le 2)$ 的圆度正好为 p. 这使得不同 p 值的 L_p 空间在一致同胚映射下无法满足小于 p_1/p_2 阶的 Lipschitz 条件, 从而证明当 $1 \le p_1 \ne p_2 \le 2$ 时 $L_{p_1}(\mu)$ 和 $L_{p_2}(\mu)$ 空间不是同构的, 给出了 Lindenstrauss 猜想的肯定回答. 随后 Enflo 对圆度及其推广概念做了一系列研究, 如在文献 [3] 中, Enflo 证明了若 Banach 空间的圆度为 p, 则当 $1 \le q \le p$, 不等式 (1.1) 成立. 并指出对一般的度量空间, 该性质不成立. 利用圆度的概念, Enflo 还刻画了拓扑群和 Banach 空间结构之间的关系 (参见文献 [2–5]). 我们注意到, Lennard 等研究了 Banach 空间的圆度概念与几何概念余型之间的关系 [6]; 他们还证明了当 $2 < p < \infty$ 时, L_p 空间具有圆度 p', 其中 $1/p + 1/p' = 1$ [7].

*收稿日期: 2025-04-12 接收日期: 2025-06-27

基金项目: 国家自然科学基金资助 (12071358).

作者简介: 谢子秀 (1999–), 女, 贵州黔南, 硕士生, 主要研究方向: 泛函分析及其应用.

E-mail: 2023110262@mail.scuec.edu.cn.

事实上, 圆度及其推广概念在度量几何的研究中起着重要作用. Enflo 的工作已被大量扩展到许多其他特殊类别的度量空间, 例如, 超度量空间 [6, 8–11], 测地空间 [12, 13] 以及 p 型度量空间 [6, 8, 9, 14] 等. 值得注意的是, 在 Banach 空间的设定下, 圆度与其他几何概念紧密地联系在一起, 包括 Banach 空间的型和余型、一致光滑性和一致凸性. 如前所述, Enflo 关于圆度的第一项工作是关于经典的 L_p 空间, 这些空间具有丰富的几何性质. Enflo 在 [15] 中还证明了, Banach 空间 X 具有圆度 $p_0 > 1$ 当且仅当 X 对于某个 $p > 1$ 是 p 一致光滑的. 在文献 [16] 中, Amini-Harandi 证明了如果 Banach 空间具有大于 1 的最大圆度, 那么它是一致光滑的；另一方面, 如果它的最小余圆度是有限的, 那么它是一致凸的.

最近, 在论文 [17] 中, Schötz 推广了 Hilbert 空间上的四重不等式, 建立在平行四边形法则和 Cauchy-Schwarz 不等式上, 他将 (1.1) 式中的 d^p 替换成 $f(d)$, 这里的 f 是任一具有凹导数的非负非减的凸函数 (见下面的命题 1.1). 实际上这一不等式在任何满足 Cauchy-Schwarz 不等式的度量空间上成立, 包括所有的 CAT(0) 空间. Schötz[18] 指出这一不等式可以应用到证明这些度量空间中广义 Fréchet 均值的收敛速率问题.

设 S 是具有凹导数的非负、单调增加的凸函数构成的集合, 且 $S_0 = \{f \in S : f(0) = 0\}$. 在 [17] 中, Schötz 在内积空间中的关键结果如下：

命题 1.1 [17] 设 $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个内积空间, d 是由内积诱导的距离, 且 $f \in S_0$. 则对任意 $y, z, k, w \in V$, 有

$$f(d(y,k)) - f(d(y,w)) - f(d(z,k)) + f(d(z,w)) \le f(d(k,w)) + f(d(y,z)). \tag{1.2}$$

最新的文献 [19] 中指出命题 1.1 中的集合 S 中的函数 f 等价于 f 是非减、凸且 3 凹的, 并且相关概念已被广泛研究 (参见 [20–23]), 并且作者把该不等式推广到一般的 Banach 空间框架下.

在 Banach 空间中有诸多反映几何性质的不等式, 如 Clarkson 不等式, Hanner 不等式, Pisier 的 p 光滑模和 q 凸性模不等式等. 在 [6] 中, Lennard 从 [2] 推导出具有圆度 p 的 Banach 空间具有 p 型. 显然, 在 Banach 空间的框架下 (1.2) 是否成立与 Banach 空间的几何性质密切相关. 此外, 我们也必须考虑凸函数 f 满足的合适条件. 在本文中, 我们主要讨论了 p 一致光滑的 Banach 空间上的凸泛函不等式, 主要结果如下.

定理 1.2 设 $1 \le p \le 2$. 设 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是非负、非减且凸的函数, 且 $t \mapsto f(t)/t^p$ 是非增的. 设 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是 p 一致光滑的. 那么存在 $C > 0$, 使得对于任意四个点 $y, z, k, w \in X$, 有

$$f(\|y-k\|) + f(\|z-w\|) \le f(\|y-w\|) + f(\|w-k\|) + Cf(\|z-k\|) + Cf(\|y-z\|). \tag{1.3}$$

定理 1.2 中 f 满足的条件保证了结论的成立, 我们将在第二节详细证明涉及该凸函数的泛函不等式. 由于我们的结果联系于 Banach 空间的几何性质, 我们将在第三节介绍涉及 Banach 空间几何性质的概念和不等式, 并证明本文的主要结果及其它一些相关结论.

2 一致光滑的凸函数

本节我们阐述一些关于凹 (或凸) 函数的有用性质. 首先, 若函数 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 满足对任意 $x, y \in [0,\infty)$, 有 $f(x+y) \le f(x) + f(y)$, 则称函数 f 是次可加的.

下面的引理是关于凹函数的一个基本事实.

引理 2.1 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是凹函数, 且 $a,b\in\big(0,\infty\big),a\geq b$. 那么对于 $x\geq 0$, 函数 $x\mapsto f\left(a+x\right)+f\left(b-x\right)$ 是非增的. 此外, 若 $f(0)\geq 0$, 则 f 是次可加的.

以下关于凹函数的泛函不等式的引理在 Schötz[17] 工作中至关重要. 为了内容的完整性, 我们将给出一个更详细的证明.

引理 2.2 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是非负、非减且凹的函数. 取 $x_1,\cdots,x_6\in[0,\infty)$, 并假设 $\max\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\leq\max\left(x_5,x_6\right)$ 且 $x_5+x_6\leq x_1+x_2+x_3+x_4$. 那么

$$f\left(x_5\right)+f\left(x_6\right)\leq f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right). \tag{2.1}$$

证 我们假设 $x_1\geq x_2\geq x_3\geq x_4$ 且 $x_5\leq x_6$. 根据条件 $\max\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\leq\max\left(x_5,x_6\right)$, 必然有 $x_1\leq x_6$. 接下来我们考虑两种情形.

情形一: $x_5\leq x_1$. 在这种情形下, 我们有 $x_5\leq x_1\leq x_6$. 我们将 x_5 增大到 $x_5^{'}$, 同时将 x_6 减小到 $x_6^{'}$, 并且保持 $x_5+x_6=x_5^{'}+x_6^{'}$, 直到 $x_5^{'}$ 或者 $x_6^{'}$ 与某个 $x_j,1\leq i\leq 4$ 相等.

然后, 我们去掉这个相等的点, 由于 $x_5+x_6\leq x_1+x_2+x_3+x_4$ 这个条件, 剩下的点可以表示为 $x_5^1\leq x_1+x_2+x_3$. 根据引理 2.1, 我们有

$$f\left(x_5\right)+f\left(x_6\right)\leq f\left(x_5^{'}\right)+f\left(x_6^{'}\right).$$

因为 f 是非减且次可加的, 结合上述不等式, 则得到不等式

$$f\left(x_5\right)+f\left(x_6\right)\leq f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right).$$

情形二: $x_5>x_1$. 则有 $x_1<x_5\leq x_6$. 令 $s:=(x_s+x_6)/2$. 由 f 的凸性, 可得

$$f\left(x_5\right)+f\left(x_6\right)\leq 2f\left(s\right).$$

再次利用本引理的条件可得 $x_1\leq s,2s\leq x_1+x_2+x_3+x_4$. 接下来, 只需证明

$$2f\left(s\right)\leq f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right).$$

现在, 我们考虑在闭区间 $[0,s]$ 上的凹函数 f. 如果 $s-x_1\geq x_4$, 根据引理 2.1, 我们得到

$$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right)\geq f\left(x_1+x_4\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(0\right).$$

由于 $x_2\leq s,2s\leq x_1+x_2+x_3+x_4$, 则 $s-\left(x_1+x_4\right)\leq x_3$. 因此

$$f\left(x_1+x_4\right)+f\left(x_3\right)\geq f\left(s\right)+f\left(x_1+x_3+x_4-s\right).$$

此外, 显然 $s-x_2\leq x_1+x_3+x_4-s$, 故

$$f\left(x_1+x_3+x_4-s\right)+f\left(x_2\right)\geq f\left(s\right)+f\left(x_1+x_2+x_3+x_4-2s\right)\geq f\left(s\right)+f\left(0\right).$$

结合以上三个不等式, 可以得到

$$2f\left(s\right)+2f\left(0\right)\leq f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_3\right)+f\left(x_4\right).$$

如果 $s-x_1\leq x_4$, 我们可以在区间 $[0,s]$ 上进行与上述类似的讨论. 那么同样可以得到上述不等式. 因此, 由 $f(0)\geq 0$ 可以得出结论.

利用 Schötz 的巧妙想法, 我们可以将前面的引理推广到更一般的情形.

引理 2.3 设 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是非负、非减且凹的函数. 取 $x_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_1,\ y_2\in[0,\infty)$, 并假设 $\max(x_1,\cdots,x_n)\leq\max(y_1,y_2)$ 且 $y_1+y_2\leq x_1+\cdots+x_n$. 那么

$$f\left(y_2\right)+f\left(y_1\right)\leq f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right). \tag{2.2}$$

证 我们始终假设 $x_1\geq x,\geq\cdots\geq x_n$ 且 $y_1\geq y_2$.

当 $n=2$ 时, 根据条件, 设 $y_1\geq x_1\geq x_2\geq y_2$, 因此我们有 $y_1-x_1\leq x_2-y_2$. 则这个结果可以直接从引理 2.1 得出. 当 $n=3$ 时, 如同前面的引理一样, 我们只讨论情形二, 即 $x_1\leq y_2$. 由于 $s:=(y_1+y_2)/2$, 可得 $s-x_1\leq x_3, s-x_2\leq x_1+x_3-s$. 因此

$$\begin{aligned}&f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\geq f(s)+f(x_2)+f(x_1+x_3-s)\\ \geq&f(s)+f(s)+f(x_1+x_2+x_3-2s)\geq 2f(s)+f(0)\geq f(y_2)+f(y_1)\end{aligned}.$$

对于任意给定的 $n>4$, 我们仍然只讨论 $x_1\leq y_2$ 的情况. 故 $2s=y_1+y_2\leq x_1+\cdots+x_n$.

设 $m=\inf\{k:x_1+x_n+x_{n-1}\cdots+x_k<s, 3\leq k\leq n\}$. 则这样的设定意味着 $x_1+x_n+\cdots+x_m+x_{m-1}\geq s$. 我们反复应用引理 2.1, 然后得到以下不等式

$$f\left(x_1\right)+f\left(x_n\right)+\cdots+f\left(x_m\right)\geq f\left(x_1+x_n+\cdots+x_m\right)+\left(n-m+1\right)f\left(0\right). \tag{2.3}$$

由于 $x_{m-1}\geq s-(x_1+x_n+\cdots+x_m)$, 我们有

$$f(x_1+x_n+\cdots+x_m)+f(x_{m-1})\geq f(s)-f(x_1+x_n+\cdots+x_m-s). \tag{2.4}$$

我们进一步考虑以下两种情形.

情形一: $s-x_2\leq x_1+x_n+\cdots+x_m-s$. 结合不等式 (2.3) 和 (2.4), 可以得到

$$\begin{aligned}&f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\\ \geq&f(x_1)+f(x_2)+f(x_{m-1})+f(x_m)+\cdots+f(x_n)\\ \geq&f(x_2)+f(x_1+x_n+\cdots+x_{m-1}-s)+f(s)+(n-m+1)f(0)\\ \geq&2f(s)+f(x_1+x_n+\cdots+x_{m-1}-s)+(n-m+1)f(0)\\ \geq&2f(s)+(n-m+2)f(0)\geq 2f(s)\geq f(y_2)+f(y_1).\end{aligned}$$

情形二: $s-x_2\geq x_1+x_n+\cdots+x_m-s$. 在这种情形下, 有

$$f(x_2)+f(x_1+x_n+\cdots+x_{m-1}-s)\geq f(x_1+x_2+x_n+\cdots+x_{m-1}-s)+f(0). \tag{2.5}$$

此外, 由于 $x_1+\cdots+x_n\geq 2s$, 我们可以在 x_i 中找到一个最大的数的下标 $3\leq i\leq n$, 记为 l, 使得

$$x_1+x_2+x_n\cdots+x_l\geq 2s\,,$$

这意味着 $x_1+x_2+x_n+\cdots+x_{l+2}<2s$. 基于此, 结合不等式 (2.3, 2.4 和 2.5), 则可得

$$\begin{aligned}
&f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)\\
\geq& f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+f\left(x_l\right)+\cdots+f\left(x_{m-1}\right)+\cdots+f\left(x_n\right)\\
\geq& f\left(x_l\right)+\cdots+f\left(x_1+x_2+x_n+\cdots+x_{m-1}-s\right)+f(s)+(n-m+2) f(0)\\
\geq& f\left(x_l\right)+f\left(x_1+x_2+x_n+\cdots+x_{l+1}-s\right)+f(s)+(n-l+2) f(0)\\
\geq& 2 f(s)+f\left(x_1+x_2+x_n+\cdots+x_l-s\right)+(n-l+2) f(0)\\
\geq& 2 f(s)+(n-l+3) f(0) \geq f\left(y_2\right)+f\left(y_1\right).
\end{aligned}$$

至此, 引理 2.3 得证.

引理 2.3 建立的泛函不等式在我们的证明中起到关键作用. 从一个凸函数出发, 在一定条件下, 它和幂函数的复合函数可以构造一个新的凹函数, 具体反映为如下引理.

引理 2.4 设 $1 \leq p<\infty$, $f:[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负、非减的凸函数. 若 $t \mapsto f(t) / t^p$ 是非增的, 则 $t \mapsto f(t^{1/p}), t \in[0,+\infty)$, 是非负、非减且凹的.

证 由于 $f:[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负且非减的, 显然 $t \mapsto f(t^{1/p}), t \in[0,+\infty)$ 是非负且非减的. 我们知道, 若 $f\left(t^{1/p}\right)/t$ 关于 t 是非增的且 $f(0) \geq 0$, 则 $t \mapsto f\left(t^{1/p}\right)$ 是凹的. 通过变量代换, 容易得到 $f\left(t^{1/p}\right)/t$ 关于 t 是非增的当且仅当 $t \mapsto f(t)/t^p$ 是非增的. 故该引理得证.

注 2.5 在引理 2.4 中, $f(t)/t^p$ 是非增的条件反映了凸函数 f 与 $t \mapsto t^p$ 之间的比较, 我们可以称该函数 f 是 p 一致光滑的. 如果假设函数 f 是一阶或二阶可微的, 那么我们还有以下推论 2.6 和推论 2.8.

推论 2.6 设 $f:[0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ 是非负、非减的凸函数, 且 $t \mapsto f'(t)/t^{p-1}$ 非增, 那 $t \mapsto f\left(t^{1/p}\right)$ 是非负、非减且凹的.

证 按照引理 2.4 的证明思路, 我们只需要证明 $t \mapsto \frac{d}{dt} f\left(t^{1/p}\right)$ 是非增的. 由于

$$\frac{d}{dt} f\left(t^{1/p}\right)=\frac{1}{p} f'\left(t^{1/p}\right) t^{1/p-1}.$$

再通过变量代换 $t=u^p$ 可得结论成立.

当函数 f 二阶可微时, 以上结论可以在更强的条件下成立, 该条件联系于通常定义的 Orlicz 函数的上行指标. 在此, 我们给出 Orlicz 函数的相关定义.

定义 2.7 若函数 $\Phi:[0,+\infty) \rightarrow[0,+\infty)$ 满足以下条件, 则称其为 Orlicz 函数,

- Φ 是连续的、凸的且非减的函数, 且 $\Phi(0)=0$;
- $\lim\limits_{t \rightarrow 0^{+}} \frac{\Phi(t)}{t}=0$, 且 $\lim\limits_{t \rightarrow+\infty} \frac{\Phi(t)}{t}=+\infty$.

通常对 Φ 函数, 令 $p_{\Phi}=\sup_{t>0} \frac{t \Phi'(t)}{\Phi(t)}$, 称 p_{Φ} 为 Φ 的上行指标. 利用上行指标概念, 我们有如下推论.

推论 2.8 设 $f:[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是非负、非减且二阶可微的. 那么若 $p_{f'} \leq p-1$, 则 $t \mapsto f\left(t^{1/p}\right)$ 是非负、单调递增且凹的.

证 令 $\phi(t)=f\left(t^{1/p}\right)$. 我们有

$$\phi'(t)=\frac{1}{p} f'(t^{1/p}) t^{1/p-1}.$$

则

$$\begin{aligned}\phi^{''}(t) &= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}f^{''}(t^{1/p})t^{2/p-2} + \left(\frac{1}{p}-1\right)f^{'}(t^{1/p})t^{1/p-2}\right)\\ &= \frac{t^{1/p-2}}{p}\left(\frac{1}{p}f^{''}(t^{1/p})t^{1/p} - \left(\frac{p-1}{p}\right)f^{'}(t^{1/p})\right)\\ &= \frac{t^{1/p-2}(p-1)}{p^2}\left(\frac{1}{(p-1)}f^{''}(t^{1/p})t^{1/p} - f^{'}(t^{1/p})\right).\end{aligned}$$

由 $f'(0) \geq 0$ 以及 $p_{f'} \leq p-1$, 则有

$$\frac{1}{p-1}f''\left(t^{1/p}\right)t^{1/p} \leq f'\left(t^{1/p}\right).$$

至此, 证明完毕.

注 2.9 满足以上条件的具体例子如 $t^\alpha, (1+x^\alpha)^{1/\alpha}-1$ $(\alpha \leq p)$ 等. 引理 2.4 给出的凸函数条件是我们的主要定理 1.2 中凸函数满足的主要条件, 而推论 2.6 和 2.8 分别给出了在一阶可微和二阶可微情形更具体的条件.

3 主要结果及证明

我们的主要结果建立了 Banach 空间几何性质与凸泛函的四重不等式之间的联系. 在这一小节, 我们首先介绍一些与 Banach 空间几何性质相关的概念. 这些几何概念主要参考 [24] (也可参考 Pisier 专著 [25] 中的第 10 章). 然后, 给出我们的一些主要结果和证明.

设 $1 \leq p \leq 2$. 我们称一个 Banach 空间 $(X, \|\cdot\|)$ 是 p 一致光滑的, 当且仅当存在 $A > 0$ 使得

$$\forall u, v \in X,\ \|u\|^p + A\|v\|^p \geq \frac{\|u+v\|^p + \|u-v\|^p}{2}\,. \tag{3.1}$$

如果取 $A \geq 1$, 则容易看到当 Banach 空间 X 具有圆度 p 时, 那么 X 是 p 一致光滑的. Enflo 给出了一个逆命题 [15] : 如果 Banach 空间 X 是 p 一致光滑的, 那么 X 的圆度大于 1.

设 $2 \leq q < +\infty$. 我们称 Banach 空间 X 是 q 一致凸的, 当且仅当存在 $A > 0$ 使得

$$\forall u, v \in X,\ \frac{\|u\|^q + \|v\|^q}{2} \geq \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^q + A^{-1}\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^q. \tag{3.2}$$

众所周知, 一致光滑性与一致凸性是对偶的. 那么, 对于 $1 < p \leq 2 \leq q < +\infty, q = p/(p-1)$, Banach 空间 X 是 p 一致光滑的当且仅当它的对偶空间 X^* 是 q 一致凸的 [15].

为了阐明 Banach 空间的几何性质, 我们经常考察具体的例子 $X = L_p(\Omega, \sigma, \mu)$, 简记为 L_p, 其中 (Ω, σ, μ) 是任意测度空间.

以下引理中给出的不等式反映了 L_p 空间上一致光滑性和一致凸性的一些基本事实, 这些不等式通常被称为 Clarkson 不等式.

引理 3.1 [26] 设 $1 < p \leq 2 \leq q < +\infty$, 则我们有

$$\forall u, v \in L_p,\ 2^{p-1}\left(\|u\|_p^p + \|v\|_p^p\right) \leq \|u+v\|_p^p + \|u-v\|_p^p; \tag{3.3}$$

$$\forall u, v \in L_q,\ 2^{q-1}\left(\|u\|_q^q + \|v\|_q^q\right) \geq \|u+v\|_q^q + \|u-v\|_q^q. \tag{3.4}$$

注 3.2 当 $1 \le p \le 2$ 时, L_p 空间是一致光滑的; 当 $2 \le q \le +\infty$ 时, L_p 空间是一致凸的. 我们的第一个主要结果定理 1.2 是关于 p 一致光滑 Banach 空间上的四重不等式 (1.3).

与 Clarkson 不等式相关, 我们关于 L_p 空间的主要结果如下.

定理 3.3 设 $1 \le p \le 2$. 设 $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ 是非负、非减的凸函数, 且 $t \mapsto f(t)/t^p$ 是非增的. 那么对于任意四个点 y, z, k, $w \in L_p$, 有

$$f\left(\|y-k\|_p\right)+f\left(\|z-w\|_p\right) \le f\left(\|y-w\|_p\right)+f\left(\|w-k\|_p\right)+f\left(\|z-k\|_p\right)+f\left(\|y-z\|_p\right). \tag{3.5}$$

注 3.4 不等式 (3.5) 中对凸函数 f 的设定对应于 Schötz 在 [17] 的主要定理中对函数 f 设定的条件 (Schötz 证明了函数 $t \mapsto f\left(t^{1/2}\right)$ 是非负、非减且凹的), 由引理 2.4, 我们可以得出函数 $t \mapsto f\left(t^{1/p}\right)$ 也是非负、非减且凹的. 最简单的例子是 $f(t)=t^\alpha$, $\alpha \le p$. 如果我们进一步要求函数 f 是一阶或二阶可微的, 那么我们可以给出 f 满足的更具体的条件, 见推论 2.6 和推论 2.8.

定理 3.3 的证明参考 [17, Theorem 3] 的证明思路, 其证明思想来源于 [3, Proposition 4.2].

定理 3.3 的证明 设 $u, v \in L_p(\Omega)$. 取

$$x_1=x_2=\|u+v\|_p^p, x_3=x_4=\|(u-v)/2\|_p^p, x_5=\|u\|_p^p, x_6=\|v\|_p^p.$$

实际上, 以 $(0,(u+v)/2,u,(u-v)/2)$ 为顶点构成了一个平行四边形, 而对角线为 u 和 v. 容易看到, 该平行四边形最大的边长一定小于最大的对角线长, 即得 $\max(x_1,x_2,x_3,x_4) \le \max(x_5,x_6)$.

根据引理 3.1, 即对任意 $u, v \in L_p(\Omega), 1<p \le 2$, 有

$$2^{p-1}\left(\|u\|_p^p+\|v\|_p^p\right) \le \|u+v\|_p^p+\|u-v\|_p^p,$$

则得

$$\|u\|_p^p+\|v\|_p^p \le 2\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p^p\right).$$

这对应于 $x_5+x_6 \le x_1+x_2+x_3+x_4$. 至此, 我们给出了引理 2.2 的条件. 故根据引理 2.2, 得

$$f\left(\|u\|_p\right)+f\left(\|v\|_p\right) \le 2\left(f\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p\right)+f\left(\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p\right)\right). \tag{3.6}$$

根据 Minkowski 不等式, 对于任意 $x \in X$, 有

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p \le \frac{\|v+x\|_p+\|u-x\|_p}{2}, \text{有 } \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p \le \frac{\|x\|_p+\|u-v-x\|_p}{2}.$$

由于 f 是非减且凸的, 则得到

$$f\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_p\right) \le f\left(\frac{\|v+x\|_p+\|u-x\|_p}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(f\left(\|v+x\|_p\right)+f\left(\|u-x\|_p\right)\right), \tag{3.7}$$

并且

$$f\left(\left\|\frac{u-v}{2}\right\|_p\right) \leq f\left(\frac{\|x\|_p+\|u-v-x\|_p}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\Big(f\left(\|x\|_p\right)+f\left(\|u-v-x\|_p\right)\Big). \tag{3.8}$$

综合以上不等式 (3.9), (3.7) 和 (3.8), 得

$$f\left(\|u\|_p\right)+f\left(\|v\|_p\right) \leq f\left(\|v+x\|_p\right)+f\left(\|u-x\|_p\right)+f\left(\|x\|_p\right)+f\left(\|u-v-x\|_p\right).$$

最后, 我们再将上面的结果推广到任意四个点 $y,\ z,\ k,\ w \in L_p$, 通过在上述不等式中选取特定值 $u=k-y,\ v=z-w$ 以及 $x=k-z$, 得到如下结果

$$f\left(\|y-k\|_p\right)+f\left(\|z-w\|_p\right) \leq f\left(\|y-w\|_p\right)+f\left(\|w-k\|_p\right)+f\left(\|z-k\|_p\right)+f\left(\|y-z\|_p\right).$$

定理 3.3 得证.

注 3.5 除了经典的 L_p 空间, 实际上还有其他一些重要的空间也具有 Clarkson 不等式的类似形式. 例如, 某些非交换 $L_p(M)$ 空间和也满足 Clarkson 不等式 (参见 Pisier 和 Xu 的 [27], 至少是 Schatten p- 类 S_p). 我们在这里再提及一个通过复插值方法得到的 Banach 空间. 设 B 是 Banach 空间, H 等距同构于一个 Hibert 空间, $(B,H)_\theta$ $0<\theta<1$ 是由 B 和 H 经内插方法得到的 Banach 空间 (参见 Pisier [28]). 我们可以看到, 当 $1/p=\theta/1+(1-\theta)/2$, 即 $q=2/\theta$ 时, 这样的空间 X 满足 Clarkson 不等式 (3.3) 和 (3.4). 因此, 空间 $(B,H)_\theta$ 具有定理 3.3 中相同的结论.

接下来我们来证明本文的主要定理 1.2.

定理 1.2 的证明 由于 X 是 p 一致光滑的, 则有不等式 (3.1), 即存在常数 $A>0$, 使得对任意 $u,v\in X$, 有

$$\|u\|^p+\|v\|^p \leq 2\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p+A\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p\right).$$

设 $C=[A]+1$, 并取

$$x_1=x_2=\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p, x_3=\cdots\cdots=x_{2C+2}=\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p, y_1=\|u\|^p, y_2=\|v\|^p.$$

由于函数 f 是非负、非减的凸函数, 且 $t\mapsto f(t)/t^p$ 是非增的, 由引理 2.4 得出 $t\mapsto f\left(t^{1/p}\right)$ 是非负、单调递增且凹的. 再根据引理 2.3, 得

$$f(\|u\|)+f(\|v\|) \leq 2\left(f\left(\left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right)+Cf\left(\left\|\frac{u-v}{2}\right\|\right)\right). \tag{3.9}$$

接下来类似于定理 3.3 的证明, 建立在 f 是非减, 凸的且次可加的条件下, 由上式并对任意 $x\in X$, 我们有

$$f(\|u\|)+f(\|v\|) \leq f(\|v+x\|)+f(\|u-x\|)+Cf(\|x\|)+Cf(\|u-v-x\|).$$

而对任意四个点 $y,\ z,\ k,\ w\in X$, 选取特定值 $u=k-y,\ v=z-w$ 以及 $x=k-z$, 由上式即得

$$f\left(\|y-k\|\right)+f\left(\|z-w\|\right)\le f\left(\|y-w\|\right)+f\left(\|w-k\|\right)+Cf\left(\|z-k\|\right)+Cf\left(\|y-z\|\right).$$

定理 1.2 证明完毕.

注 3.6 定理 1.2 和定理 3.3 实际上都联系于 Banach 空间的 p 一致光滑性条件, 此时 $1\le p\le 2$. 而当 $2\le q<\infty$ 时, $L_q(\Omega)$ 空间和非交换的 $L_q(M)$ 空间都是 q 一致凸的. 并有如下估计 (参见 Pisier 和 Xu 在专著 [27] 中的 Theorem 5.3(ii)). 也就是说, 建立在下面的一个重要引理的基础上, 可以证明 q 一致凸的 Banach 空间 $L_q(M)$ 是 2 一致光滑的.

引理 3.7 设 $q\in[2,\infty)$, 存在常数 C_q, C_q 仅仅依赖于 q, 则

$$\left(\frac{\|x+y\|_q^2+\|x-y\|_q^2}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\le\left(\|x\|_q^2+C_q\|y\|_q^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad x,y\in L_q(M)$$

由此我们可以得到以下不等式.

$$\frac{\|x+y\|_q^2+\|x-y\|_q^2}{2}\le\|x\|_q^2+C_q\|y\|_q^2.$$

建立在以上结论上, 类似于定理 1.2 和定理 3.3 的证明, 或直接建立在命题 1.1 (参见 [17] 中 Schötz 的 Theorem 3) 的基础上, 可以得到如下的 2 一致光滑性的结论.

推论 3.8 设 $q\in[2,\infty)$ 且 $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ 是非负、非减且凸的函数使得 $f(0)=0$. 则存在常数 $C_q>0$, 使得对任意 $y,z,k,w\in L_q(M)$, 有

$$f\left(\|y-k\|_q\right)+f\left(\|z-w\|_q\right)\le f\left(\|y-w\|_q\right)+f\left(\|w-k\|_q\right)+C_qf\left(\|z-k\|_p\right)+C_qf\left(\|y-z\|_q\right).$$

4 结语

该文完成了在 Banach 空间上对四重不等式的证明, 它推广了 Enflo 的圆度不等式 [2,3] 及 Schötz 在 Hilbert 空间上的凸泛函四重不等式 [17]. 一方面, 我们明确了不等式的成立联系于 Banach 空间的几何性质, 特别地, 我们的主要结论紧密联系于 Banach 空间的 p 一致光滑性. 另一方面, 我们凸泛函不等式的成立也密切联系于凸函数的一致光滑性, 我们借助函数及其导数满足的凸凹性, 推导出关键引理, 其在定理证明中发挥关键作用. 具体联系于交换和非交换的 L_p 空间, 建立在 Clarkson 不等式上, 推导出更具体的结果, 非富了 L_p 空间理论内涵. 研究成果在理论上有助于深化对 Banach 空间理解, 并为凸几何提供解决问题新支持.

参 考 文 献

[1] Lindenstrauss J. On non-linear projections in Banach spaces[J]. Michigan Mathematical Journal, 1964, 11(3): 263–287.

[2] Enflo P. On the nonexistence of uniform homeomorphisms between Lp spaces[J]. Arkiv för Matematik, 1970, 8(2): 103–105.

[3] Enflo P. Uniform structures and square roots in topological groups II[J]. Israel Journal of Mathematics, 1970, 8: 253–272.

[4] Enflo P. On a problem of Smirnov[J]. Arkiv för Matematik, 1969, 8(2): 107–109.

[5] Enflo P. Uniform structures and square roots in topological groups I[J]. Israel Journal of Mathematics, 1970, 8: 230–252.

[6] Lennard C, Tonge A, Weston A. Roundness and metric type[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 252(2): 980–988.

[7] Lennard C, Tonge A, Weston A. Generalized roundness and negative type[J]. Michigan Math. J, 1997, 44(1): 37–45.

[8] Doust I, Sánchez S, Weston A. The asymptotic enhanced negative type of finite ultra-metric spaces[J]. arXiv preprint arXiv: 130811852013.

[9] Doust I, Sánchez S, Weston A. Asymptotic negative type properties of finite ultra-metric spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 446(2): 1776–1793.

[10] Faver T, Kochalski K, Murugan M, Verheggen H, Wesson E, Weston A. Classifications of ultra-metric spaces according to roundness[J]. arXiv preprint arXiv: 12016669.

[11] Faver T, Kochalski K, Murugan M, Verheggen H, Wesson E, Weston A. Roundness properties of ultra-metric spaces[J]. Glasgow Mathematical Journal, 201456(3): 519–535.

[12] Berg, Nikolaev I G. Characterization of aleksandrov spaces of curvature bounded above by means of the Metric Cauchy-Schwarz inequality[J]. Michigan Mathematical Journal, 2018, 67(2): 289–332.

[13] Lafont J, Prassidis S. Roundness properties of groups[J]. Geometriae Dedicata, 2006, 117: 137–160.

[14] Sánchez S. The p-negative type behaviour of finite metric spaces[J]. UNSW Sydney, 2014.

[15] Enflo P. On infinite-dimensional topological groups[J]. Séminaire Maurey-Schwartz, 1978, 11: 1–11.

[16] Amini-Harandi A, Doust I, Robertson G. Roundness properties of Banach spaces[J]. Journal of Functional Analysis, 2021, 281(10): 109–230.

[17] Schötz C. Quadruple Inequalities: between Cauchy-Schwarz and Triangle[J]. Mathematical Inequalities & applications, 2024, 27(4): 809–832.

[18] Schötz C. Convergence rates for the generalized Fréchet mean via the quadruple inequality[J]. Electronic Journal of Statistics, 2019, 13: 4280–4345.

[19] Niculescu C P. Functional inequalities in the framework of Banach spaces[J]. arXiv preprint arXiv: 240520097.

[20] Khalid S, Pečarić J, Praljak M. 3-convex functions and generalizations of an inequality of Hardy-Littlewood-Pólya[J]. Glasnik Matematički, 2013, (48)(2): 335–356.

[21] Marinescu D, Niculescu C P. Old and new on the 3-convex functions[J]. arXiv preprint arXiv: 230504353, 2023.

[22] Niaz T, Khan K A, Pečarić J. On refinement of Jensen's inequality for 3 – convex function at a point[J]. Turkish J Ineq. 2020, 4(1): 70–80.

[23] Petrov P P. Three-convex approximation by free knot splines in C[0, 1][J]. Constructive Approximation, 1998, 14: 247–258.

[24] Pisier G. Martingales with values in uniformly convex spaces[J]. Israel Journal of Mathematics, 1975, 20: 326–350.

[25] Pisier G. Martingales in Banach spaces[M]. New York: Cambridge University Press, 2016.

[26] Clarkson J A. Uniformly convex spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1936, 40: 396–414.

[27] Pisier G, Xu Quanhua. Non-commutative Lp-spaces[J]. Handbook of the geometry of Banach spaces, 2003, 2: 1459–1517.

[28] Pisier G. Some applications of the complex interpolation method to Banach lattices[J]. Journal d'Analyse Mathématique, 1979, 35(1): 264–281.

GEOMETRIC PROPERTIES OF BANACH SPACES AND THE QUADRUPLE INEQUALITY FOR CONVEX FUNCTIONALS

XIE Zi-xiu , MA Tao

(*School of Mathematics and Statistics, Central South Minzu University, Wuhan 430074, China*)

Abstract: In this paper, we delve into the quadruple inequality for convex functionals in Banach spaces. This inequality is intricately linked to the geometric characteristics of convex functionals within Banach spaces and the smoothness conditions of convex functions. Specifically, we explore the monotonicity and concavity-convexity of the convex function f under specific conditions. For a p-uniformly smooth Banach space with $1 \leq p \leq 2$, we establish a quadruple inequality. Precisely, for any $y, z, k, w \in X$, the following inequality holds:

$$f(\|y-k\|)+f(\|z-w\|) \leq f(\|y-w\|)+f(\|w-k\|)+Cf(\|z-k\|_p)+Cf(\|y-z\|).$$

Furthermore, we present the applications of this conclusion in L_p spaces, non - commutative L_p spaces, and certain interpolation spaces. This research represents a generalization of the roundness inequality and Schötz's quadruple inequality for convex functionals on Hilbert spaces.

Keywords: The geometry of banach spaces; quadruple inequality; p-uniform smoothness; Clarkson's inequality; Convex functional

2010 MR Subject Classification: 26B25; 46B20