

一类生态流行病模型的稳定性分析

罗文静^{1,2}, 王辉¹, 苏有慧²

(1. 伊犁师范大学数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000)

(2. 徐州工程学院数学与统计学院, 江苏 徐州 221018)

摘要: 本文研究了一类带有扩散项的生态流行病模型解的稳定性问题. 利用特征值法获得了非负常值平衡点的局部稳定性; 通过构建合适的 Lyapunov 函数, 推广了半共存平衡点和全共存平衡点的全局稳定性; 最后, 用数值模拟验证了全共存平衡点的全局稳定性. 本研究为理解疾病在生态系统中的调控作用提供了数学理论支持.

关键词: 捕食系统; 生态流行病模型; 反应扩散方程; 稳定性; Lyapunov 函数

MR(2010) 主题分类号: 35B35; 35K57 中图分类号: O175

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2026)01-039-10

1 引言

生态流行病学作为生物数学的重要分支, 它致力于研究种群动力学与疾病传播的交互机制. Anderson 和 May^[1] 的开创性工作奠定了该领域的理论基础, 此后生态流行病学逐渐成为热点的研究领域. 近年来, 大量学者展开了深入的研究. Venturino^[2] 系统分析了疾病对 Lotka-Volterra 系统的调控机制. 陈兰荪、肖燕妮^[3] 等人对猎物染病的生态流行病模型做出了进一步的研究.

大量实证研究表明, 疾病会使患病猎物的行为发生改变, 从而导致捕食者更容易捕食到患病的猎物. 例如 Lafferty^[4] 等人发现被寄生虫感染的鱼会靠近海面, 捕食者鸟更容易捕捉到染病的鱼; Williams^[5] 在刺鱼中观察到类似现象. 2001 年 Chattopadhyay^[6] 等人发现 Salton 海中患病的鱼更容易成为鸟的捕食目标, 受到这个现象和文献^[4-5] 的启发, 建立了“捕食者只捕捉患病猎物”的生态流行病模型

$$\begin{cases} S_t = rS \left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta_1 SI, \\ I_t = \beta_1 SI - \frac{mIP}{\alpha+I} - \mu I, \\ P_t = \frac{\omega IP}{\alpha+I} - dP. \end{cases} \quad (1.1)$$

2014 年翁佩萱^[7] 等人把模型 (1.1) 的功能反应函数替换为比率依赖 Michaelis - Menten 型并考虑空间异质性, 建立了一类带有扩散的生态流行病模型, 他们使用线性化方法和 Lyapunov 函数法得到了平衡点的局部稳定性和全局稳定性. 在翁等人的研究基础上, 2017

*收稿日期: 2025-03-31 接收日期: 2025-06-20

基金项目: 国家自然科学基金项目资助 (12426515).

作者简介: 罗文静 (2000-), 女, 河南漯河, 研究生, 主要研究方向: 偏微分方程及其应用 (生物数学).

E-mail: 1768133191@qq.com

通讯作者: 王辉, 男, 教授, 主要研究方向: 偏微分方程及其应用 (生物数学).

年杨文生^[8]提出了带有 Beddington - DeAngelis 型功能反应函数的生态流行病模型, 他们利用类似的方法研究了平衡点的局部稳定性和全局稳定性, 其研究结果补充了翁等人的成果.

在现实的生态系统中, 捕食者与猎物种群会同时遭受传染病, 有不少的学者研究了这一领域. 1989 年 Haderler^[9] 等人研究了一个捕食者和猎物均染病的生态流行病模型, 他们使用 Perron-Frobenius 定理分析了周期轨道的持久性问题, 并给出了流行病的阈值. 2013 年高旭彬^[10] 等人研究了一个捕食者和猎物均染病的生态流行病模型, 其中患病捕食者不消耗猎物, 其方程为 $W_t = -m_2W + \beta_2PW$, 高等人通过基本再生数来讨论平衡点的稳定性并且进行了数值模拟. 2024 年 Mekonen^[11] 研究了一个捕食者和猎物均染病的生态流行病模型, 其中患病捕食者既不参与捕食又不消耗猎物, 模型中患病捕食者的方程同文献^[10] 一致, 他们研究了平衡点的稳定性和基本再生数, 并运用最优控制理论求解了染病群体的最优治疗策略. 关于捕食者和猎物均染病的生态流行病模型的更多研究可以参考文献 [12-16].

受文献^[6-8]“捕食者捕捉患病猎物”的模型假设和文献^[11]的启发; 本文提出一类带有扩散的捕食者和猎物均染病的生态流行病模型

$$\begin{cases} S_t = \Delta S + rS \left(1 - \frac{S}{K}\right) - \beta_1 SI, & x \in \Omega, t > 0, \\ I_t = \Delta I - bI + \beta_1 SI - lIP, & x \in \Omega, t > 0, \\ P_t = \Delta P - m_1P - \beta_2PW + \theta lIP, & x \in \Omega, t > 0, \\ W_t = \Delta W - m_2W + \beta_2PW, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \nu} = \frac{\partial I}{\partial \nu} = \frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

模型 (1.2) 满足初值条件

$$S(x, 0) = S_0(x) \geq 0, I(x, 0) = I_0(x) \geq 0, P(x, 0) = P_0(x) \geq 0, W(x, 0) = W_0(x) \geq 0.$$

其中 S, I, P, W 分别代表健康猎物; 患病猎物; 健康捕食者; 患病捕食者的种群密度. b, m_1, m_2 分别代表患病猎物; 健康捕食者; 患病捕食者的死亡率. 患病捕食者受疾病的影响, 死亡率升高, 所以 $m_2 > m_1$. r 代表健康猎物种群的内禀增长率, β_1, β_2 分别代表猎物种群和捕食者种群的疾病发生率, l 代表捕食系数, θ 代表从猎物到捕食者的能量转化系数 ($0 < \theta \leq 1$). K 代表环境容纳量. 模型 (1.2) 经典解的局部存在和唯一性可以用 Amann 理论^[17] 获得, 使用上下解方法和比较原理^[18] 可以证明解的全局存在和有界性. 本文的研究旨在通过稳定性分析来揭示疾病的传播对生态系统的影响, 主要论述非负常值平衡点的稳定性问题.

本文的结构如下: 第 2 节分析非负常值平衡点的存在性和计算基本再生数; 第 3 节利用特征值法探讨平衡点的局部稳定性; 第 4 节通过构造 Lyapunov 函数证明平衡点的全局渐近稳定性; 第 5 节进行数值模拟; 第 6 节总结并讨论生态学意义.

2 平衡点的存在性与基本再生数

通过对模型 (1.2) 的稳态方程进行求解, 可得其非负常值平衡点及其存在条件如下: 全灭绝平衡点 $L_0 = (0, 0, 0, 0)$ 和猎物无病平衡点 $L_1 = (s_1, 0, 0, 0)$ 恒存在; 其中 $s_1 = K$. 当 $K\beta_1 - b > 0$ 时, 猎物疾病平衡点 $L_2 = (s_2, i_2, 0, 0)$ 存在; 其中

$$s_2 = \frac{b}{\beta_1}, i_2 = \frac{r(K\beta_1 - b)}{K\beta_1^2}, \quad (2.1)$$

当 $\beta_1 K(r l \theta - \beta_1 m_1) - r l \theta b > 0$ 时, 捕食者无病平衡点 $L_3 = (s_3, i_3, p_3, 0)$ 存在; 其中

$$s_3 = \frac{K(r l \theta - \beta_1 m_1)}{r l \theta}, i_3 = \frac{m_1}{l \theta}, p_3 = \frac{\beta_1 K(r l \theta - \beta_1 m_1) - r l \theta b}{r l^2 \theta}, \quad (2.2)$$

当 $\theta l r(K \beta_1 \beta_2 - b \beta_2 - l m_2) - m_1 K \beta_1^2 \beta_2 > 0$ 时, 全共存平衡点 $L_4 = (s_4, i_4, p_4, w_4)$ 存在; 其中

$$s_4 = \frac{b \beta_2 + l m_2}{\beta_1 \beta_2}, i_4 = \frac{r(K \beta_1 \beta_2 - b \beta_2 - l m_2)}{K \beta_1^2 \beta_2}, p_4 = \frac{m_2}{\beta_2}, \quad (2.3)$$

$$w_4 = \frac{\theta l r(K \beta_1 \beta_2 - b \beta_2 - l m_2) - m_1 K \beta_1^2 \beta_2}{K \beta_1^2 \beta_2^2}. \quad (2.4)$$

接下来, 采用下一代矩阵方法^[11] 计算捕食者种群和猎物种群疾病的基本再生数 R_0 和 R_1

记 $A = \beta_1 K r l \theta - \beta_1^2 K m_1 - r l \theta b$, 从模型 (1.2) 的第四个方程可以获得, 捕食者新感染项为 $F_1 = \beta_2 P W$, 捕食者移除感染仓室项为 $V_1 = m_2 W$, 对 F_1, V_1 分别关于 W 求偏导数并结合平衡点 L_3 知, $F = \frac{\partial F_1}{\partial W}(L_3) = \beta_2 p_3 = \frac{\beta_2 A}{r l^2 \theta}, V = \frac{\partial V_1}{\partial W}(L_3) = m_2$. 由基本再生数定义得, 捕食者种群疾病的“基本再生数”为 $R_0 = \rho(F V^{-1}) = \frac{A \beta_2}{m_2 r l^2 \theta}$. 同理, 考虑模型 (1.2) 的第二个方程并结合平衡点 L_1 可以得到猎物种群疾病的“基本再生数”为 $R_1 = \frac{\beta_1 K}{b}$.

最后, 将平衡点的存在条件与基本再生数的关系总结如下, 平衡点 L_2 的存在条件等价于 $R_1 > 1$; 平衡点 L_3 的存在条件隐含了 $R_1 > 1$; 平衡点 L_4 的存在条件等价于 $R_0 > 1$, 并且平衡点 L_4 的存在条件隐含了 $R_1 > 1$. 这些关系为进一步分析平衡点的全局稳定性提供了重要依据.

3 局部稳定性分析

下面, 将通过雅可比矩阵来分析平衡点 L_0 和 L_1 的局部稳定性. 模型 (1.2) 在任意一个平衡点 $L(S, I, P, W)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J(L) = \begin{bmatrix} r - \frac{2r}{K} S - \beta_1 I & -\beta_1 S & 0 & 0 \\ \beta_1 I & -b + \beta_1 S - l P & -l I & 0 \\ 0 & \theta l P & -m_1 - \beta_2 W + \theta l I & -\beta_2 P \\ 0 & 0 & \beta_2 W & -m_2 + \beta_2 P \end{bmatrix}$$

定理 1 平衡点 L_0 和 L_1 恒存在且满足下面的结论

(1) 模型 (1.2) 的平衡点 L_0 是不稳定的.

(2) 当 $b < K \beta_1$ 时, 模型 (1.2) 的平衡点 L_1 是不稳定的; 当 $b > K \beta_1$ 时, 模型 (1.2) 的平衡点 L_1 是局部渐近稳定的.

证 在平衡点 L_0 处, 其 Jacobian 矩阵的特征方程为 $(\lambda - r)(\lambda + b)(\lambda + m_1)(\lambda + m_2) = 0$. 解得特征值为 $\lambda_1 = r > 0, \lambda_2 = -b, \lambda_3 = -m_1, \lambda_4 = -m_2$, 因为, λ_1 是正值, 故平衡点 L_0 是不稳定的.

对于平衡点 L_1 , 其 Jacobian 矩阵的特征方程为 $(\lambda + r)(\lambda - \beta_1 K + b)(\lambda + m_1)(\lambda + m_2) = 0$. 解得特征值为 $\lambda_1 = -r, \lambda_2 = -m_1, \lambda_3 = -m_2, \lambda_4 = \beta_1 K - b$, 显然, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是负值, 当 $b < K \beta_1$ 时, λ_4 是正值, 此时平衡点 L_1 是不稳定的; 当 $b > K \beta_1$ 时, λ_4 是负值, 此时平衡点 L_1 是局部渐近稳定的.

4 全局稳定性分析

本节通过构造合适的 Lyapunov 函数, 并结合 Lyapunov-LaSalle 不变原理来证明平衡点 L_1, L_2, L_3, L_4 的全局渐近稳定性.

定理 2 设平衡点满足存在条件, 那么下面的结论成立

- (1) 当 $R_1 < 1$ 时, 模型 (1.2) 的平衡点 L_1 是全局渐近稳定的;
- (2) 当 $A < 0$ 时, 模型 (1.2) 的平衡点 L_2 是全局渐近稳定的;
- (3) 当 $R_0 < 1$ 时, 模型 (1.2) 的平衡点 L_3 是全局渐近稳定的;
- (4) 模型 (1.2) 的平衡点 L_4 是全局渐近稳定的.

证 (1) 构建如下的 Lyapunov 函数

$$V_1(t) = \theta \int_{\Omega} \left(S - s_1 - s_1 \ln \frac{S}{s_1} \right) dx + \theta \int_{\Omega} I dx + \int_{\Omega} P dx + \int_{\Omega} W dx.$$

其中 $t > 0, V_1(t) \geq 0$. 对 Lyapunov 函数求导, 并结合模型 (1.2) 则有

$$\begin{aligned} \theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(S - s_1 - s_1 \ln \frac{S}{s_1} \right) dx &= \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s_1}{S} \right) S_t dx \\ &= \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s_1}{S} \right) \left(\Delta S + rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \beta_1 SI \right) dx. \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} I dx = \theta \int_{\Omega} (\Delta I - bI + \beta_1 SI - lIP) dx. \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} P dx = \int_{\Omega} (\Delta P - m_1 P - \beta_2 PW + \theta lIP) dx. \quad (4.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W dx = \int_{\Omega} (\Delta W - m_2 W + \beta_2 PW) dx. \quad (4.4)$$

联立 (4.1)-(4.4) 并代入 $s_1 = K$ 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= -\theta K \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx + \theta r \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{K} S^2 + 2S - K \right) dx + \theta (\beta_1 K - b) \int_{\Omega} I dx \\ &\quad - m_1 \int_{\Omega} P dx - m_2 \int_{\Omega} W dx. \end{aligned}$$

当 $R_1 < 1$ 时, 有 $\beta_1 K - b < 0$ 成立. 由计算可得, $-\frac{1}{K} S^2 + 2S - K \leq -\frac{1}{K} K^2 + 2K - K = 0$, 所以 $\frac{dV_1}{dt} \leq 0$. 由 Lyapunov-LaSalle 不变原理, 当 $R_1 < 1$ 时, 平衡点 L_1 是全局渐近稳定的.

(2) 构建如下的 Lyapunov 函数

$$V_2(t) = \theta \int_{\Omega} \left(S - s_2 - s_2 \ln \frac{S}{s_2} \right) dx + \theta \int_{\Omega} \left(I - i_2 - i_2 \ln \frac{I}{i_2} \right) dx + \int_{\Omega} P dx + \int_{\Omega} W dx,$$

其中 $t > 0, V_2(t) \geq 0$. 对 Lyapunov 函数求导, 并结合模型 (1.2) 则有

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(S - s_2 - s_2 \ln \frac{S}{s_2} \right) dx = \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s_2}{S} \right) \left(\Delta S + rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \beta_1 SI \right) dx. \quad (4.5)$$

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(I - i_2 - i_2 \ln \frac{I}{i_2} \right) dx = \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{i_2}{I} \right) (\Delta I - bI + \beta_1 SI - lIP) dx. \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} P dx = \int_{\Omega} (\Delta P - m_1 P - \beta_2 PW + \theta lIP) dx. \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W dx = \int_{\Omega} (\Delta W - m_2 W + \beta_2 PW) dx. \quad (4.8)$$

联立 (4.5)-(4.8) 并化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} = & -s_2 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_2 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - \frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} S^2 dx + \theta \left(r + \frac{s_2 r}{K} - i_2 \beta_1 \right) \int_{\Omega} S dx \\ & + (\theta s_2 \beta_1 - \theta b) \int_{\Omega} I dx + (i_2 \theta l - m_1) \int_{\Omega} P dx - m_2 \int_{\Omega} W dx + (i_2 b \theta - s_2 r \theta) \int_{\Omega} 1 dx. \end{aligned}$$

把 (2.1) 代入下面式子并计算得,

$$\begin{aligned} \theta \left(r + \frac{s_2 r}{K} - i_2 \beta_1 \right) = \frac{2\theta r b}{K \beta_1}, \quad \theta s_2 \beta_1 - \theta b = 0, \quad i_2 b \theta - s_2 r \theta = -\frac{r b^2 \theta}{\beta_1^2 K}, \\ i_2 \theta l - m_1 = \frac{r \theta l K \beta_1 - r \theta l b - m_1 \beta_1^2 K}{\beta_1^2 K}. \end{aligned}$$

当 $A < 0$ 时有 $i_2 \theta l - m_1 < 0$ 成立, 所以可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dV_2}{dt} = & -s_2 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_2 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - \frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} S^2 dx + \frac{2\theta r b}{K \beta_1} \int_{\Omega} S dx \\ & + (i_2 \theta l - m_1) \int_{\Omega} P dx - m_2 \int_{\Omega} W dx - \frac{r b^2 \theta}{\beta_1^2 K} \int_{\Omega} 1 dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

由计算得,

$$\frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} (-S^2 + \frac{2b}{\beta_1} S) dx - \frac{r b^2 \theta}{\beta_1^2 K} \int_{\Omega} 1 dx \leq \frac{r b^2 \theta}{\beta_1^2 K} \int_{\Omega} 1 dx - \frac{r b^2 \theta}{\beta_1^2 K} \int_{\Omega} 1 dx = 0. \quad (4.10)$$

把 (4.10) 代入 (4.9) 得

$$\frac{dV_2}{dt} = -s_2 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_2 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx + (i_2 \theta l - m_1) \int_{\Omega} P dx - m_2 \int_{\Omega} W dx \leq 0. \quad (4.11)$$

由 Lyapunov-LaSalle 不变原理, 当 $A < 0$ 时, 平衡点 L_2 是全局渐近稳定的.

(3) 构建如下的 Lyapunov 函数

$$V_3(t) = \theta \int_{\Omega} \left(S - s_3 - s_3 \ln \frac{S}{s_3} \right) dx + \theta \int_{\Omega} \left(I - i_3 - i_3 \ln \frac{I}{i_3} \right) dx + \int_{\Omega} \left(P - p_3 - p_3 \ln \frac{P}{p_3} \right) dx + \int_{\Omega} W dx.$$

其中 $t > 0$, $V_3(t) \geq 0$. 对 Lyapunov 函数求导, 并结合模型 (1.2) 则有

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(S - s_3 - s_3 \ln \frac{S}{s_3} \right) dx = \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s_3}{S} \right) \left(\Delta S + rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \beta_1 SI \right) dx. \quad (4.12)$$

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(I - i_3 - i_3 \ln \frac{I}{i_3} \right) dx = \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{i_3}{I} \right) (\Delta I - bI + \beta_1 SI - lIP) dx. \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(P - p_3 - p_3 \ln \frac{P}{p_3} \right) dx = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{p_3}{P} \right) (\Delta P - m_1 P - \beta_2 PW + \theta lIP) dx. \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} W dx = \int_{\Omega} (\Delta W - m_2 W + \beta_2 PW) dx. \quad (4.15)$$

联立 (4.12)–(4.15) 并化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dt} &= -s_3\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_3\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - p_3 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx - \frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} S^2 dx \\ &\quad + \theta \left(r + \frac{s_3 r}{K} - i_3 \beta_1 \right) \int_{\Omega} S dx + \theta (s_3 \beta_1 - b - p_3 l) \int_{\Omega} I dx + (i_3 \theta l - m_1) \int_{\Omega} P dx \\ &\quad + (p_3 \beta_2 - m_2) \int_{\Omega} W dx + (i_3 b \theta - s_3 r \theta + p_3 m_1) \int_{\Omega} 1 dx. \end{aligned}$$

把 (2.2) 代入下面式子并计算得,

$$\theta \left(r + \frac{s_3 r}{K} - i_3 \beta_1 \right) = \frac{2(r l \theta - \beta_1 m_1)}{l}, \quad \theta (s_3 \beta_1 - b - p_3 l) = 0, \quad i_3 \theta l - m_1 = 0,$$

$$p_3 \beta_2 - m_2 = \frac{\theta l r (K \beta_1 \beta_2 - b \beta_2 - l m_2) - m_1 K \beta_1^2 \beta_2}{r l^2 \theta}, \quad i_3 b \theta - s_3 r \theta + p_3 m_1 = -\frac{K (r l \theta - \beta_1 m_1)^2}{r l^2 \theta},$$

当 $R_0 < 1$ 时有 $p_3 \beta_2 - m_2 < 0$ 成立. 所以有

$$\begin{aligned} \frac{dV_3}{dt} &= -s_3\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_3\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - p_3 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx - \frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} S^2 dx \\ &\quad + \frac{2(r l \theta - \beta_1 m_1)}{l} \int_{\Omega} S dx + (p_3 \beta_2 - m_2) \int_{\Omega} W dx - \frac{K (r l \theta - \beta_1 m_1)^2}{r l^2 \theta} \int_{\Omega} 1 dx. \end{aligned} \quad (4.16)$$

由计算得

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(-\frac{\theta r}{K} S^2 + \frac{2(r l \theta - \beta_1 m_1)}{l} S \right) dx - \frac{K (r l \theta - \beta_1 m_1)^2}{r l^2 \theta} \int_{\Omega} 1 dx \\ &\leq \frac{K (r l \theta - \beta_1 m_1)^2}{r l^2 \theta} \int_{\Omega} 1 dx - \frac{K (r l \theta - \beta_1 m_1)^2}{r l^2 \theta} \int_{\Omega} 1 dx = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

把 (4.17) 代入 (4.16) 得

$$\frac{dV_3}{dt} = -s_3\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_3\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - p_3 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx + (p_3 \beta_2 - m_2) \int_{\Omega} W dx \leq 0.$$

由 Lyapunov-LaSalle 不变原理, 当 $R_0 < 1$ 时, 平衡点 L_3 是全局渐近稳定的.

(4) 构建如下的 Lyapunov 函数

$$V_4(t) = \theta \int_{\Omega} \left(S - s_4 - s_4 \ln \frac{S}{s_4} \right) dx + \theta \int_{\Omega} \left(I - i_4 - i_4 \ln \frac{I}{i_4} \right) dx \\ + \int_{\Omega} \left(P - p_4 - p_4 \ln \frac{P}{p_4} \right) dx + \int_{\Omega} \left(W - w_4 - w_4 \ln \frac{W}{w_4} \right) dx.$$

其中 $t > 0$, $V_4(t) \geq 0$. 对 Lyapunov 函数求导, 并结合模型 (1.2) 则有

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(S - s_4 - s_4 \ln \frac{S}{s_4} \right) dx = \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s_4}{S} \right) \left(\Delta S + rS \left(1 - \frac{S}{K} \right) - \beta_1 SI \right) dx. \quad (4.18)$$

$$\theta \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(I - i_4 - i_4 \ln \frac{I}{i_4} \right) dx = \theta \int_{\Omega} \left(1 - \frac{i_4}{I} \right) \left(\Delta I - bI + \beta_1 SI - lIP \right) dx. \quad (4.19)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(P - p_4 - p_4 \ln \frac{P}{p_4} \right) dx = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{p_4}{P} \right) \left(\Delta P - m_1 P - \beta_2 PW + \theta lIP \right) dx. \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(W - w_4 - w_4 \ln \frac{W}{w_4} \right) dx = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{w_4}{W} \right) \left(\Delta W - m_2 W + \beta_2 PW \right) dx. \quad (4.21)$$

联立 (4.18)–(4.21) 并化简整理得

$$\frac{dV_4}{dt} = -s_4 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_4 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - p_4 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx - w_4 \int_{\Omega} \frac{|\nabla W|^2}{W^2} dx - \frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} S^2 dx \\ + \theta \left(r + \frac{s_4 r}{K} - i_4 \beta_1 \right) \int_{\Omega} S dx + \theta (s_4 \beta_1 - b - p_4 l) \int_{\Omega} I dx + (p_4 \beta_2 - m_2) \int_{\Omega} W dx \\ + (i_4 \theta l - m_1 - w_4 \beta_2) \int_{\Omega} P dx + (i_4 b \theta - s_4 r \theta + p_4 m_1 + w_4 m_2) \int_{\Omega} 1 dx. \quad (4.22)$$

把 (2.3) 和 (2.4) 代入下面式子并计算得,

$$\theta (s_4 \beta_1 - b - p_4 l) = 0, \quad p_4 \beta_2 - m_2 = 0, \quad i_4 \theta l - m_1 - w_4 \beta_2 = 0. \quad (4.23)$$

$$\theta \left(r + \frac{s_4 r}{K} - i_4 \beta_1 \right) = \frac{2\theta r (\beta_2 b + l m_2)}{K \beta_1 \beta_2}, \quad i_4 b \theta - s_4 r \theta + p_4 m_1 + w_4 m_2 = -\frac{r \theta (b \beta_2 + l m_2)^2}{K \beta_1^2 \beta_2^2}. \quad (4.24)$$

把 (4.23) 和 (4.24) 代入 (4.22) 得,

$$\frac{dV_4}{dt} = -s_4 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_4 \theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - p_4 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx - w_4 \int_{\Omega} \frac{|\nabla W|^2}{W^2} dx \\ - \frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} S^2 dx + \frac{2\theta r (\beta_2 b + l m_2)}{K \beta_1 \beta_2} \int_{\Omega} S dx - \frac{r \theta (b \beta_2 + l m_2)^2}{K \beta_1^2 \beta_2^2} \int_{\Omega} 1 dx. \quad (4.25)$$

由计算得

$$\frac{\theta r}{K} \int_{\Omega} \left(-S^2 + \frac{2(\beta_2 b + l m_2)}{\beta_1 \beta_2} S \right) dx - \frac{r \theta (b \beta_2 + l m_2)^2}{K \beta_1^2 \beta_2^2} \int_{\Omega} 1 dx \\ \leq \frac{r \theta (b \beta_2 + l m_2)^2}{K \beta_1^2 \beta_2^2} \int_{\Omega} 1 dx - \frac{r \theta (b \beta_2 + l m_2)^2}{K \beta_1^2 \beta_2^2} \int_{\Omega} 1 dx = 0. \quad (4.26)$$

把 (4.26) 代入 (4.25) 得

$$\frac{dV_4}{dt} = -s_4\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx - i_4\theta \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx - p_4 \int_{\Omega} \frac{|\nabla P|^2}{P^2} dx - w_4 \int_{\Omega} \frac{|\nabla W|^2}{W^2} dx \leq 0.$$

由 Lyapunov-LaSalle 不变原理, 当平衡点 L_4 满足存在条件时, 平衡点 L_4 是全局渐近稳定的.

5 数值模拟

在本节, 使用有限差分法和 Matlab 软件对模型 (1.2) 进行数值模拟, 通过模拟的结果来验证定理 2 的稳定性结论. 本节主要展示平衡点 L_4 的时空演化图和各种群密度随时间变化的曲线图, 取模型 (1.2) 中的参数如下,

$$r = 1.5, K = 12, \beta_1 = 0.25, \beta_2 = 0.18, b = 0.35, l = 0.3, m_1 = 0.15, m_2 = 0.4, \theta = 0.7.$$

此时, $R_0 \approx 3.44 > 1$, $R_1 \approx 8.57 > 1$, $L_4 = (4.067, 3.967, 2.222, 3.794)$, 由定理 2 知, 模型 (1.2) 的平衡点 L_4 是全局渐近稳定的. 数值模拟结果验证了上述稳定性结论, 模拟结果如下图所示

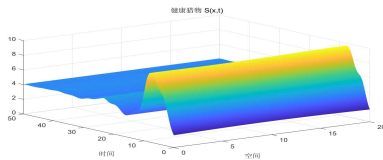


图 a: 健康猎物随时空的演化

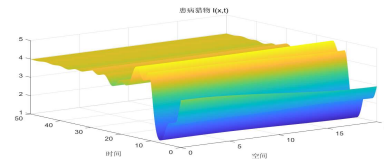


图 b: 患病猎物随时空的演化

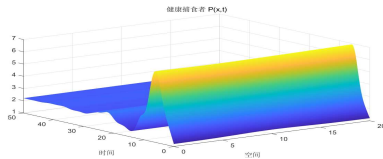


图 c: 健康捕食者随时空的演化

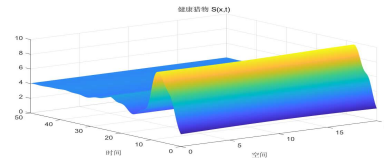


图 d: 患病捕食者随时空的演化

下面给出种群密度随时间的变化, 从图 e 和图 f 知, 由于猎物种群发生疾病, 健康猎物密度短期迅速下降, 患病的猎物短期快速增长. 在疾病的作用下, 健康猎物种群的密度长期稳定在 4 附近; 捕食者捕食患病猎物, 所以患病猎物的密度增长到峰值 6 附近时迅速下降, 在疾病和捕食的共同作用下, 患病猎物种群的密度长期稳定在 4 附近. 从图 g 和图 h 知, 刚开始时健康捕食者种群的密度逐渐增加, 增加到峰值之后, 受限于疾病和自身的死亡而下降, 最后稳定到 2.2 附近. 患病捕食者种群的密度先增长到峰值然后随着时间的推移稳定到 3.7 附近. 曲线图清晰地表明, 在疾病和捕食的共同作用下, 所有种群密度均在环境容纳量 12 以下波动, 并最终都趋于稳定.

6 总结

本文通过理论分析和数值模拟研究了一类带有扩散的捕食者和猎物均染病的生态流行病模型的稳定性问题. 我们的研究表明: 系统的稳定性与疾病传播阈值 (基本再生数 R_0)

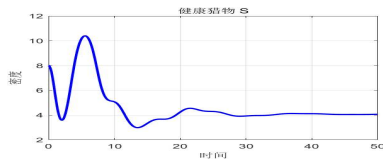


图 e: 健康猎物随时间的变化

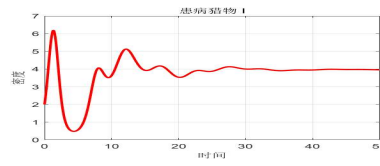


图 f: 患病猎物随时间的变化

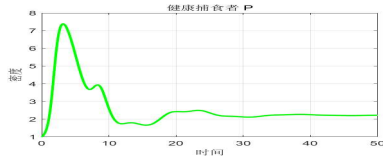


图 g: 健康捕食者随时间的变化

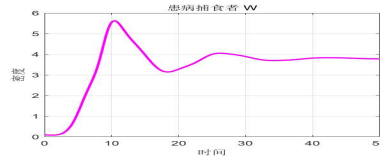


图 h: 患病捕食者随时间的变化

和 R_1) 密切相关, 当 $R_1 < 1$ 时, 猎物无病平衡点 L_1 全局渐近稳定, 此时猎物种群的疾病自然消亡; 当 $R_1 > 1$ 和 $A < 0$ 时猎物疾病平衡点 L_2 全局渐近稳定, 此时猎物种群的疾病持续存在; 当 $R_0 < 1$ 和 $R_1 > 1$ 时捕食者无病平衡点 L_3 全局渐近稳定, 此时捕食者种群疾病消失, 猎物种群的疾病持续存在; 当 $R_0 > 1$ 和 $R_1 > 1$ 时全共存平衡点 L_4 全局渐近稳定, 此时捕食者种群疾病和猎物种群的疾病都持续存在. 数值模拟的结果验证了全共存平衡点的稳定性, 当 $R_0 > 1$ 和 $R_1 > 1$ 时, 各种群密度均在环境容纳量范围内波动并最终趋于稳定状态 (如图 e- 图 h), 扩散项的引入有效量化了空间异质性和对稳态收敛的促进作用 (如图 a- 图 d).

本研究构建的带有反应扩散的生态流行病学模型, 不仅量化了空间异质性对系统稳定性的影响, 还揭示了疾病在生态系统中的调控作用. 捕食者对患病猎物的选择性捕食增加了患病猎物的死亡率, 有助于控制疾病的传播; 同时, 患病捕食者的存在也限制了捕食者种群的无限增长, 从而维持了生态系统的稳定性.

参 考 文 献

- [1] Anderson R M, May R M. Regulation and stability of host-parasite population interactions[J]. *Journal of Animal Ecology*, 1978, 47(1): 219–247.
- [2] Venturino E. The influence of diseases on Lotka-Volterra systems[J]. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1993, 24(1): 381–402.
- [3] Xiao Yanni, Chen Lansun. Analysis of a three species eco-epidemiological model[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, 258(2): 733–754.
- [4] Lafferty K D, Morris A K. Altered behavior of parasitized killifish increases susceptibility to predation by bird final hosts[J]. *Ecology*, 1996, 77(5): 1390–1397.
- [5] Williams H H. Helminth diseases of fish[J]. *Helminth Abstr*, 1967, 36: 261–295.
- [6] Chattopadhyay J, Bairagi N. Pelicans at risk in Salton sea an eco-epidemiological model[J]. *Ecological Modelling*, 2001, 136(2–3): 103–112.
- [7] Zhang Xueli, Huang Yehui, Weng Peixuan. Permanence and stability of a diffusive predator-prey model with disease in the prey[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2014, 68(10): 1431–1445.
- [8] Yang Wensheng. Dynamical behaviors of a diffusive predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response and disease in the prey[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2017, 10(08): 1750119.

- [9] Hadeler K P, Freedman H I. Predator–prey populations with parasitic infection[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1989, 27(6): 609–631.
- [10] Gao Xubin, Pan Qiuhui, He Mingfeng, Kang Yibin. A predator–prey model with diseases in both prey and predator[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2013, 392(23): 5898–5906.
- [11] Mekonen K G, Bezabih A F, Rao K P. Mathematical modeling of infectious disease and predator–prey interaction with optimal control[J]. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2024, 2024(1): 5444627.
- [12] 刘细究, 李必文, 陈伯山. 食饵带疾病的捕食模型的全局稳定性 [J]. *数学杂志*, 2015, 35(01): 85–94.
- [13] 李爽, 王小攀. 关于捕食者种群具有阶段结构和疾病的捕食 - 被捕食模型 [J]. *数学杂志*, 2010, 30(03): 449–457.
- [14] Das K P. A study of harvesting in a predator–prey model with disease in both populations[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2016, 39(11): 2853–2870.
- [15] Hsieh Y H, Hsiao C K. Predator–prey model with disease infection in both populations[J]. *Mathematical Medicine and Biology: a Journal of the IMA*, 2008, 25(3): 247–266.
- [16] Pada D K, Kundu K, Chattopadhyay J. A predator–prey mathematical model with both the populations affected by diseases[J]. *Ecological Complexity*, 2011, 8(1): 68–80.
- [17] Amann H. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems[J]. *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis*, 1993, 133: 9–126.
- [18] 叶其孝, 李正元, 王明新. 反应扩散方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.

STABILITY ANALYSIS OF A CLASS OF ECOLOGICAL EPIDEMIC MODELS

LUO Wen-jing^{1,2}, WANG Hui¹, SU You-hui²

(1.School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining 835000, China)

(2.School of Mathematics and Statistics, Xuzhou Institute of Technology, Xuzhou 221018, China)

Abstract: In this paper, the stability of a class of ecoepidemiological model solutions with diffusion terms is studied. The eigenvalue method was used to obtain the local stability of the non-negative constant equilibrium point. By constructing a suitable Lyapunov function, the global stability of the semi-coexistence equilibrium point and the full coexistence equilibrium point is generalized, and finally, the global stability of the total coexistence equilibrium point is verified by numerical simulation. This study provides mathematical support for understanding the regulatory role of disease in the ecosystem.

Keywords: predatory system; ecological epidemic model; reaction diffusion equation; stability; Lyapunov function

2010 MR Subject Classification: 35B35; 35K57