

## 最优再保险策略：基于保险人的角度

李家骥

(武汉大学数学与统计学院, 湖北 武汉 430072)

**摘要:** 本文从保险人的角度研究了最优再保险策略问题, 并给出了此时的最优再保险策略. 进一步, 我们从保险人和被保险人综合效益出发研究了该问题, 并给出了此时最优再保险策略的形式以及对应的充分条件. 本文在期望效用理论的框架下, 通过二阶随机占优来刻画不同的再保险策略对总财富期望效用的影响. 本文所获结果是对 Arrow 定理的一种补充.

**关键词:** 风险度量; Arrow 定理; 随机占优; 免赔额; 最优再保险

MR(2010) 主题分类号: 91B16; 91B30; 97M30

中图分类号: O211.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2026)01-031-08

### 1 引言

在学术界, 最优再保险策略一直是一个热门课题. Borch<sup>[1]</sup> 从投保人的角度证明了停止损失再保险在一定条件下是最优的再保险策略. Kaluszka<sup>[2]</sup> 考虑了标准差原则和方差原则, 深化扩展了 Borch 的结论. Young<sup>[3]</sup> 根据王的保费原则最大化了保险公司财富的期望效用. 与此同时, 还有相当数量的论文讨论了停止损失再保险的性质, 从各个角度讨论了停止损失再保险的最优性 (Kahn<sup>[4]</sup>, Vajda<sup>[5]</sup>, Olhin<sup>[6]</sup>, Lemaire<sup>[7]</sup>).

Arrow<sup>[8]</sup> 证明了停止损失再保险对风险厌恶者的最优性. 然后 Raviv<sup>[9]</sup> 研究帕累托最优合约并拓展了这个结果. Arrow 通过最优控制理论和变分计算证明了 Arrow 定理. 而 Zilcha、Chew<sup>[10]</sup> 以及 Karni<sup>[11]</sup> 则使用随机占优来比较不同保险方案的优劣, 他们还证明了对于风险厌恶投资人而言, 期望效用最大化准则与二阶随机占优偏好准则是等价的. Gollier<sup>[12]</sup> 结合了 Arrow<sup>[13]</sup>, Bühlmann 和 Jewell<sup>[14]</sup>, Blazenko<sup>[15]</sup> 等人在期望效用理论框架下研究的最优再保险策略, 将自己原有的结果<sup>[16,17]</sup> 进行了增补修正. Gollier 和 Schlesinger<sup>[18]</sup> 同样从随机占优的角度给出了 Arrow 定理的另一个证明. Guerra et al.<sup>[19]</sup> 从投保人的角度, 在最大可能索赔原则下计算了被保险人的保费, 并说明了停止损失再保险可以最大化被保险人的预期效用和稳定性.

另外, 很多学者以平衡再保险公司与保险公司二者的共同利益为出发点, 讨论了此框架下的最优再保险策略. 刘红丽<sup>[20]</sup> 以保险人和被保险人风险支出 VaR 的凸组合作为目标函数, 研究了不同保费准则下的最优再保险策略; 徐洋<sup>[21]</sup> 在其基础上, 将风险度量准则改为 CTE, 然后研究了带上限的止损再保险与变换损失再保险. Cai et al.<sup>[22]</sup> 研究了保险人和被保险人的联合生存概率, 在一般保费原则下给出了存在最优再保险策略的充分条件. 还有很多学者站在保险人和被保险人的立场进行了最优再保险策略的研究, 如 Cai et al.<sup>[23]</sup>, 黄娅等<sup>[24]</sup>, 孙星<sup>[25]</sup>, 王霞<sup>[26]</sup>.

\*收稿日期: 2022-06-01

接收日期: 2022-09-16

作者简介: 李家骥 (1998-), 男, 湖北荆门, 硕士, 研究方向: 保险精算. E-mail: lijiaqi@whu.edu.cn.

本文在假定保险人与被保险人是风险厌恶的基础上,从保险人的角度出发,在期望效用理论的框架下研究了最优再保险策略.基于保险人和被保险人利益相互冲突的事实,本文以兼顾双方收益为目标来研究.我们提出了两组充分条件,可以分别使得停止损失再保险和超额损失再保险成为此时的最优再保险策略.

## 2 准备工作

本文假设保险人的初始财富为  $w > 0$ , 保费为  $p$ , 设  $X$  为概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  中的非负连续型随机变量. 我们用  $X$  代表保险人的损失并设其有本性上确界  $w$ . 在本文中, 索赔函数用  $I(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  表示, 且假设  $I(\cdot)$  是几乎处处可导的, 则保险人终端财富  $Z$  可表示为

$$Z = w + p - I(X). \quad (2.1)$$

本文站在风险厌恶投资人的立场寻找最优的索赔函数  $I(x)$  的形式. 设个体的效用函数为  $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 鉴于风险厌恶投资人拥有凹的效用函数, 故我们假设  $u(\cdot)$  二阶可导, 且为凹函数. 当  $X$  为非负连续型随机变量时, 定义  $X$  的期望效用如下

$$U(X) \triangleq \int_0^{\infty} u(t) dF_X(t). \quad (2.2)$$

其中  $F_X(x) \triangleq P(X \leq x)$ .

**定义 2.1** 设有两个随机变量  $X, Y$ , 称  $X$  比  $Y$  二阶随机占优 (Second-order Stochastic dominance), 若

$$\int_{-\infty}^t [F_Y(x) - F_X(x)] dx \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

记为  $X \geq_{SSD} Y$ . 易知, 若  $X \geq_{SSD} Y$ , 则有  $U(X) \geq U(Y)$ .

下面给出本文的一些基本假设. 对于风险头寸  $X$  与索赔额  $I(X)$ , 本文假设保费的数额非负且小于损失额:

$$0 \leq I(x) \leq x. \quad (2.3)$$

以及随着  $x$  的增长,  $I(x)$  也增长, 但增长速度不会超过  $x$ :

$$0 \leq I'(x) \leq 1. \quad (2.4)$$

为了保证保险人的收益, 本文假设

$$p - f(E[I(X)]) \geq 0, \quad (2.5)$$

$E(I(X))$  为  $I(X)$  的数学期望,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为交易成本函数. 此时, 有如下性质:

$$f(EI) \geq EI, \quad f'(EI) \geq 1, \quad (2.6)$$

## 3 保险人角度的最优再保险策略

**定理 3.1** 在目标函数由 (2.1) 式表示时,  $I$  的最优策略  $I^*$  具有如下形式:

$$I^*(x) = \min(x, d),$$

其中  $d \geq 0$ .

在定理 3.1 的证明之前, 本文先介绍两个引理.

**引理 1** 假设保险人的终端财富  $Z$  的数学期望是固定的, 则  $Z = w + p - I^*(X)$  中的最优再保险策略  $I^*(x) = \min(x, d)$ , 其中  $d = w + p - \underline{z}$ ,  $\underline{z} \in [p, w + p]$  且满足下式

$$\underline{z}H_Y(\underline{z}) + \int_{\underline{z}}^{w+p} ydH_Y(y) = EZ. \quad (3.1)$$

这里,  $Y \triangleq w + p - X$ ,  $H_Y$  是随机变量  $Y$  的分布函数.

**证明** 先证明 (3.1) 式中  $\underline{z}$  的存在性和唯一性. 定义函数  $g(x)$

$$g(x) = xH_Y(x) + \int_x^{w+p} ydH_Y(y) - EZ.$$

我们希望证明  $g(x)$  的零点存在且唯一. 因为  $X$  是连续性随机变量,  $w, p$  都是常数, 故  $Y = w + p - X$  是连续性随机变量, 设其概率密度函数为  $h_Y(\cdot)$ , 则

$$\begin{aligned} g'(x) &= H_Y(x) + xh_Y(x) + (-xh_Y(x)) \\ g'(x) &= H_Y(x) \geq 0. \end{aligned}$$

注意到  $P(p < Y < w + p) = 1$ , 所以当  $x > p$  时,  $g'(x) = H_Y(x) > 0$ . 另一方面, 我们有

$$\begin{aligned} g(p) &= pH_Y(p) + \int_p^{w+p} ydH_Y(y) - EZ \\ &= EY - EZ \\ &= E(I^*(X) - X) \leq 0, \\ g(w + p) &= (w + p)H_Y(w + p) - EZ \\ &= E(I^*(X)) > 0. \end{aligned}$$

于是  $g(x) = 0$  在  $[p, w + p]$  上有解且唯一.

现在来验证 (3.1) 式的合理性. 因为  $Y = w + p - X$ ,  $\underline{z} = w + p - d$ , 由全期望公式, 有

$$\begin{aligned} EZ &= E(w + p - I^*(X)|X < d)P(X < d) + E(w + p - I^*(X)|X \geq d)P(X \geq d) \\ &= E(w + p - X|X < d)P(X < d) + E(w + p - d|X \geq d)P(X \geq d) \\ &= E(Y|Y > \underline{z})P(Y > \underline{z}) + E(\underline{z}|Y \leq \underline{z})P(Y \leq \underline{z}) \\ &= \int_{\underline{z}}^{w+p} ydH_Y(y) + \underline{z}H_Y(\underline{z}). \end{aligned}$$

于是引理 1 得证.

**引理 2**  $G^*$  是  $Z^* \triangleq w + p - I^*(X)$  的分布函数, 其中

$$G^*(z) \triangleq \begin{cases} 0, & z < \underline{z}, \\ H_Y(z), & z \geq \underline{z}. \end{cases}$$

$\underline{z}$  即为引理中定义的  $\underline{z}$ .

**证明** 由  $I^*(x) = \min(x, d) \leq d$ , 有  $w + p - I^* \geq w + p - d$ , 即  $Z^* \geq \underline{z}$ . 所以  $\forall z < \underline{z}, G^*(z) = P(Z^* \leq z) = 0$ .

$$G^*(\underline{z}) = P(Z^* \leq \underline{z}) = P(Z^* = \underline{z}) = P(I^*(X) = d) = P(X \geq d) = P(Y \leq \underline{z}) = H_Y(\underline{z}).$$

当  $z > \underline{z}$  时,  $G^*(z) = G^*(\underline{z}) + P(\underline{z} < Z^* \leq z)$ , 又因为有:

$$Z^* > \underline{z} \iff I^*(X) < d \iff I^*(X) = X \iff Z^* = Y.$$

所以在随机变量  $Z^*$  取值大于  $\underline{z}$  时,  $Z^*$  与  $Y$  具有相同的分布, 于是  $P(\underline{z} < Z^* \leq z) = P(\underline{z} < Y \leq z)$ .

于是有当  $z > \underline{z}$  时,  $G^*(z) = G^*(\underline{z}) + P(\underline{z} < Y \leq z) = H_Y(\underline{z}) + P(\underline{z} < Y \leq z) = H_Y(z)$ .

综上所述, 命题得证. 下面, 我们证明定理 3.1.

**证明** 我们用  $G$  表示  $Z$  的分布函数, 用  $G^*$  表示  $Z^* = w + p - I^*(X)$  的分布函数. 定义集合  $Q = \{G | 0 \leq I(x) \leq x, 0 \leq I'(x) \leq 1\}$ , 表示所有满足要求的  $Z$  的分布函数.

$\forall G \in Q$ , 当  $Z^* \geq \underline{z}$  时, 有  $I^*(X) = X, I(X) \leq X = I^*(X), Z \geq Z^*$ .

所以在  $\underline{z}$  的右侧,  $Z$  比  $Z^*$  一阶随机占优, 即  $G^*(z) \geq G(z), \forall z > \underline{z}$ . 在维持  $EZ$  不变的情况下,  $\exists z < \underline{z}, s.t. G^*(z) \leq G(z)$ . 这样  $Z$  成为了  $Z^*$  的均值保留展式 (mean-preserving spread), 即  $Z^*$  比  $Z$  二阶随机占优 (详见 Rothschild et al<sup>[27]</sup>). 于是拥有更大的期望效用.

#### 4 双方角度的最优再保险策略

Arrow 定理从投保人的角度下 (此时财富可表示为  $w - p - X + I(X)$ ) 证明了最优的再保险策略是  $I(x) = \max(x - d, 0)$ ; 在定理 3.1 中我们从保险人的角度下 (此时财富可表示为  $w + p - I(X)$ ) 证明了最优的再保险策略是  $I(x) = \min(x, d)$ . 在本节中, 我们同时考虑投保人和保险人的利益, 以双方的效用凸组合函数为最优目标函数, 研究最优再保险策略问题.

假设被保险人终端财富为  $Z_1$ , 保险人的终端财富为  $Z_2$ ,  $U$  为 (2.2) 式定义的期望效用函数. 本节我们探讨如下模型的最优再保险策略.

$$\lambda U(Z_1) + (1 - \lambda)U(Z_2). \quad (4.1)$$

在介绍本节具体内容前, 先介绍一些符号. 我们分别用  $w_1, w_2$  表示投保人和保险人的初始财富, 用  $Z_1$  和  $Z_2$  表示投保人和保险人的终端财富.  $I^*$  为最优再保险策略,  $Z_1^*, Z_2^*$  为投保人和保险人在最优再保险策略  $I^*$  时的终端财富, 即  $Z_1, Z_2, Z_1^*, Z_2^*, I, I^*$  具有如下关系:

$$\begin{aligned} Z_1^* &= w_1 - p - X + I^*(X), Z_2^* = w_2 + p - I^*(X), \\ Z_1 &= w_1 - p - X + I(X), Z_2 = w_2 + p - I(X). \end{aligned} \quad (4.2)$$

**定理 4.1** 针对 (4.1) 式, 存在  $d$ , 使得  $I^*(x) = \max(x - d, 0)$  是模型 (4.1) 的最优再保险策略, 在如下条件下:

$$\lambda \geq \frac{1}{2}, \quad w_1 < w_2, \quad p \ll w_1. \quad (4.3)$$

**证明** 定义如下函数

$$\begin{aligned} z_1^*(x) &\triangleq w_1 - p - x + I^*(x), & z_2^*(x) &\triangleq w_2 + p - I^*(x), \\ z_1(x) &\triangleq w_1 - p - x + I(x), & z_2(x) &\triangleq w_2 + p - I(x). \end{aligned}$$

从而有

$$Z_1^* = z_1^*(X), Z_2^* = z_2^*(X), Z_1 = z_1(X), Z_2 = z_2(X).$$

定义函数  $q(x) \triangleq u^{-1}[\lambda u(z_1(x)) + (1 - \lambda)u(z_2(x))]$ , 其中  $u^{-1}$  为  $u$  的反函数, 以及定义  $Q \triangleq q(X)$ . 对应地, 同样定义  $q^*(x) \triangleq u^{-1}[\lambda u(z_1^*(x)) + (1 - \lambda)u(z_2^*(x))]$ ,  $Q^* \triangleq q^*(X)$ . 容易验证  $U(Q) = \lambda U(Z_1) + (1 - \lambda)U(Z_2)$ .

现在我们给出  $d$  的存在性, 假设  $Q$  的期望是固定的, 则  $I^*(x) = \max(x - d, 0)$  中的  $d$  是方程  $h_1(x) = 0$  的解, 函数  $h_1(x)$  定义如下:

$$\begin{aligned} h_1(x) &\triangleq \int_0^x u^{-1}(\lambda u(w_1 - p - t) + (1 - \lambda)u(w_2 + p))dF_X(t) \\ &\quad + \int_x^\infty u^{-1}(\lambda u(w_1 - p - x) + (1 - \lambda)u(w_2 + p - t + x))dF_X(t) - EQ. \end{aligned}$$

容易验证  $h_1(x) = 0$  的解是存在的.

计算  $u(q(x))$  对  $x$  的偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(q(x))}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(\lambda u(z_1(x)) + (1 - \lambda)u(z_2(x))) \\ &= \lambda u'(z_1(x))(-1 + I'(x)) + (1 - \lambda)u'(z_2(x))(-I'(x)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

最后一步是由于  $u$  为凹函数, 所以有  $u' > 0$ ; 又因为  $0 \leq I'(x) \leq 1$ , 所以  $(-1 + I'(x)) \leq 0, (-I'(x)) \leq 0$ . 所以偏导数非正.

另一方面,  $\forall x < d, I^*(x) = 0$ , 此时我们有

$$\begin{aligned} u(q(x)) - u(q^*(x)) &= [\lambda u(z_1(x)) + (1 - \lambda)u(z_2(x))] - [\lambda u(z_1^*(x)) + (1 - \lambda)u(z_2^*(x))] \\ &= \lambda(u(z_1(x)) - u(z_1^*(x))) + (1 - \lambda)(u(z_2(x)) - u(z_2^*(x))) \\ &= \lambda(u(z_1^*(x) + I(x)) - u(z_1^*(x))) - (1 - \lambda)(u(z_2^*(x)) - u(z_2^*(x) - I(x))). \end{aligned}$$

又由于  $w_1 < w_2, p \ll w_1$ , 所以有  $z_1^*(x) \leq z_2^*(x) - I(x)$ , 又因为  $u$  是凹函数, 以及  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ , 我们有  $u(z_1^*(x) + I(x)) - u(z_1^*(x)) \geq u(z_2^*(x)) - u(z_2^*(x) - I(x)) \geq 0$ ,  $\lambda \geq (1 - \lambda) > 0$ . 所以  $\lambda(u(z_1^*(x) + I(x)) - u(z_1^*(x))) - (1 - \lambda)(u(z_2^*(x)) - u(z_2^*(x) - I(x))) \geq 0$ .

于是  $\forall x < d, u(q(x)) \geq u(q^*(x))$ , 因为  $u$  是单调递增的, 所以  $q(x) \geq q^*(x)$ . 又因为  $q(x)$  关于  $x$  单调不减, 所以  $x < d$  即  $q(x) > q(d)$ . 于是  $\forall X < d, Q$  比  $Q^*$  一阶随机占

优, 即  $\forall q \geq q(d), F_{Q^*}(q) \geq F_Q(q)$ , 这里  $F_{Q^*}, F_Q$  代表  $Q^*, Q$  的分布函数. 为保证  $EQ$  不变,  $\exists q \leq Q(d), F_{Q^*}(q) < F_Q(q)$ . 使得  $Q$  成为  $Q^*$  的均值保留展式, 于是  $Q^*$  比  $Q$  二阶随机占优, 所以有更大的期望效用.

**定理 4.2** 针对 (4.1) 式, 存在  $d$ , 使得  $I^*(x) = \min(x, d)$  是模型 (4.1) 的最优再保险策略, 在如下条件下:

$$\lambda \leq \frac{1}{2}, \quad w_1 > w_2, \quad p \ll w_2. \quad (4.4)$$

**证明** 如同定理 4.1 中证明过程一样定义  $z_1, z_2, z_1^*, z_2^*, q, Q, q^*, Q^*$ , 则  $Q(x)$  同样关于  $x$  单调不减. 此时  $d$  是方程  $h_2(x) = 0$  的解, 函数  $h_2(x)$  定义如下:

$$\begin{aligned} h_2(x) \triangleq & \int_0^x u^{-1}(\lambda u(w_1 - p - t) + (1 - \lambda)u(w_2 + p))dF_X(t) \\ & + \int_x^\infty u^{-1}(\lambda u(w_1 - p - x) + (1 - \lambda)u(w_2 + p - t + x))dF_X(t) - EQ. \end{aligned}$$

容易验证  $h_2(x) = 0$  的解是存在的.  $\forall x < d, I^*(x) = x$ , 此时:

$$\begin{aligned} & u(q(x)) - u(q^*(x)) \\ &= (\lambda u(z_1(x)) + (1 - \lambda)u(z_2(x))) - (\lambda u(z_1^*(x)) + (1 - \lambda)u(z_2^*(x))) \\ &= \lambda(u(z_1(x)) - u(z_1^*(x))) + (1 - \lambda)(u(z_2(x)) - u(z_2^*(x))) \\ &= (1 - \lambda)[u(z_2^*(x) + (x - I(x))) - u(z_2^*(x))] - \lambda[u(z_1^*(x)) - u(z_1^*(x) - (x - I(x)))]. \end{aligned}$$

另一方面, 因为  $w_1 > w_2, p \ll w_2$ , 所以  $z_2^*(x) \leq z_1^*(x) - (x - I(x))$ , 又因为  $u$  是凹函数, 且  $x - I(x) \geq 0, \lambda \leq \frac{1}{2}$ , 所以  $u(z_2^*(x) + (x - I(x))) - u(z_2^*(x)) \geq u(z_1^*(x)) - u(z_1^*(x) - (x - I(x)))$ ,  $(1 - \lambda) \geq \lambda > 0$ . 因此  $(1 - \lambda)[u(z_2^*(x) + (x - I(x))) - u(z_2^*(x))] - \lambda[u(z_1^*(x)) - u(z_1^*(x) - (x - I(x)))] \geq 0$ .

于是  $\forall x < d, u(q(x)) \geq u(q^*(x))$ , 仿照定理 4.1 的证明过程即知结论成立.

## 5 结合实际意义并总结

Arrow 定理证明, 在被保险人角度下的最优再保险策略是停止损失再保险  $I(x) = \max(0, x - d)$ , 而本文证明了, 在保险人角度下的最优再保险策略为超额损失再保险  $I(x) = \min(x, d)$ . 这里我们给出一个简单的展示 (图 1), 从图中可以明显感受到被保险人和保险人利益的冲突性, 这两种再保险策略是关于一条直线对称的.

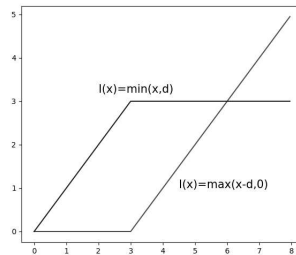


图 1 两个再保险策略的对比

在考虑保险人与被保险人的效用凸组合的情况下, 我们找出了两组充分条件分别使得两种再保险策略成为最优. 从具体条件可以看出, 我们的结果是符合直观感受的: 同样在保费远小于双方初始财富的情况下 (即保费  $p$  对财富  $w$  的变化影响很小), 当保险人的财富小于被保险人, 且保险人的效用凸组合中所占权重更大时, 最优的再保险策略与只考虑保险人效用 (即  $\lambda = 0$ ) 的情况下相同; 而当保险人的财富远大于被保险人, 且被保险人的效用在凸组合中权重更大时, 最优的再保险策略与只考虑被保险人效用 (即  $\lambda = 1$ ) 的情况下相同. 这是因为在风险厌恶假设下, 效用函数是凹函数, 而凹函数的边际效益是递减的. 若同时财富少的一方在组合效用中所占的比例更大的话, 结果就与  $\lambda$  为极端值的情形相同了.

### 参 考 文 献

- [1] Borch K. An attempt to determine the optimum amount of stop loss reinsurance[M]. Brussels: International Congress of Actuaries, 1960.
- [2] Kaluszka M. Optimal reinsurance under mean-variance premium principles[J]. Insurance: Mathematics and Economics 2001, 28(1): 61–67.
- [3] Young V R. Optimal insurance under Wang’s premium principle[J]. Insurance: Mathematics and Economics 1999, 25(2): 109–122.
- [4] Kahn P M. Some remarks on a recent paper by borch[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1961, 1(5): 265–272.
- [5] Vajda S. Minimum variance reinsurance[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1962, 2(2): 257–260.
- [6] Ohlin J. On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1969, 5(2): 249–266.
- [7] Lemaire J. Sur la détermination d’un contrat optimal de réassurance[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1973, 7(2): 165–180.
- [8] Arrow K J. Uncertainty and the welfare economics of medical care[J]. Uncertainty in economics. Academic Press, 1978, 345–375
- [9] Raviv A. The design of an optimal insurance policy[J]. The American Economic Review, 1979, 69(1): 84–96.
- [10] Zilcha I, Chew S H. Invariance of the efficient sets when the expected utility hypothesis is relaxed[J]. Journal of Economic Behavior & Organization, 1990, 13(1): 125–131.
- [11] Karni E. Optimal insurance: A nonexpected utility analysis[J]. Contributions to Insurance Economics, 1992: 217–238.
- [12] Gollier C. Economic theory of risk exchanges: A review[J]. Contributions to Insurance Economics, 1992: 3–23.
- [13] Arrow K J. Optimal insurance and generalized deductibles[J]. Scandinavian Actuarial Journal, 1974, 1974(1): 1–42.
- [14] Bühlmann H, Jewell W S. Optimal risk exchanges[J]. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 1979, 10(3): 243–262.
- [15] Blazenko G. Optimal indemnity contracts[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1985, 4(4): 267–278.
- [16] Gollier C. The design of optimal insurance contracts without the nonnegativity constraint on claims[J]. The Journal of Risk and Insurance, 1987, 54(2): 314–324.

- [17] Gollier C. Pareto-optimal risk sharing with fixed costs per claim[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1987, 1987(1-2): 62–73.
- [18] Gollier C, Schlesinger H. Arrow's theorem on the optimality of deductibles: a stochastic dominance approach[J]. *Economic Theory*, 1996, 7(2): 359–363.
- [19] Guerra M, Centeno M L. Optimal reinsurance policy: The adjustment coefficient and the expected utility criteria[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42(2): 529–539.
- [20] 刘红丽. 基于保险人和再保险人双方的最优再保险研究 [D]. 山东: 山东师范大学, 2017.
- [21] 徐洋. 基于保险人和再保险人视角的最优再保险 [D]. 山东: 曲阜师范大学, 2019.
- [22] Cai J, Fang Y, Li Z, et al. Optimal reciprocal reinsurance treaties under the joint survival probability and the joint profitable probability[J]. *Journal of Risk and Insurance*, 2013, 80(1): 145–168.
- [23] Cai J, Liu H, Wang R. Pareto-optimal reinsurance arrangements under general model settings[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2017, 77: 24–37.
- [24] 黄娅, 王京, 周杰明, 邓迎春. 风险相依下再保险双方的联合最优再保险问题 [J]. *运筹学学报*, 2019, 23(04): 13–33.
- [25] 孙星. 基于保险人和再保险人双方视角的最优再保险策略研究 [D]. 江西: 江西财经大学, 2021.
- [26] 王霞. 一般保费原则下的帕累托最优再保险策略的研究 [D]. 山东: 山东师范大学, 2017.
- [27] Rothschild M, Stiglitz J E. Increasing risk: I. A definition[J]. *Journal of Economic Theory*, 1970, 2(3): 225–243.

## THE OPTIMAL REINSURANCE STRATEGY: BASED ON THE INSURER'S PERSPECTIVE

LI Jia-qi

(*School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China*)

**Abstract:** This paper studies the problem of the optimal reinsurance strategy from the perspective of the insurer, and provides the optimal reinsurance strategy under this circumstance. Furthermore, we investigate this problem based on the comprehensive benefits of both the insurer and the insured, and present the form of the optimal reinsurance strategy in this scenario as well as the corresponding sufficient conditions. Within the framework of the expected utility theory, this paper employs second-order stochastic dominance(SSD) to characterize the impact of different reinsurance strategies on the expected utility of total wealth. The results obtained in this paper serve as a supplement to Arrow's theorem.

**Keywords:** risk measurements; Arrow's theorem; stochastic dominance; deductible; optimal reinsurance

**2010 MR Subject Classification:** 91B16; 91B30; 97M30