

## $\mathcal{B}(H)$ 上可加导子的新刻画

张 婷, 余志强, 胥 兵, 齐霄霏  
(山西大学数学与统计学院, 山西 太原 030006)

**摘要:** 令  $H$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的 Hilbert 空间,  $\mathcal{B}(H)$  表示  $H$  上所有有界线性算子构成的代数,  $C, D \in \mathcal{B}(H)$  是任意两个固定算子. 本文研究了  $\mathcal{B}(H)$  上可加导子的局部刻画问题. 利用算子分解的方法, 证明了可加映射  $\phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ,  $AB = C$  蕴涵  $\phi(A)B + A\phi(B) = D$  成立当且仅当存在  $\mathcal{B}(H)$  上的可加导子  $\delta$  与数  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\phi(C) + \lambda C = D$  且  $\phi(A) = \delta(A) + \lambda A$  对所有  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立. 该结果推广改进了已有的一些相关成果.

**关键词:** 可加导子; 局部导子; 有界线性算子; Hilbert 空间

MR(2010) 主题分类号: 47B47; 47B49

中图分类号: O177.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2025)03-0271-12

### 1 引言

导子是环与代数上的重要映射之一, 其与上调理论有着密切的联系. 令  $\mathcal{R}$  是环或代数. 假设  $\delta$  是  $\mathcal{R}$  上的可加或线性映射. 回忆, 若  $\delta$  满足  $\delta(AB) = \delta(A)B + A\delta(B)$  对所有  $A, B \in \mathcal{R}$  成立, 则称  $\delta$  是导子; 特别地, 若存在  $T \in \mathcal{R}$  使得  $\delta(A) = AT - TA$  对所有  $A \in \mathcal{R}$  成立, 则称  $\delta$  是内导子. 显然, 内导子一定是导子, 反之不一定成立. 关于不同环与代数上导子与内导子关系的刻画, 吸引了国内外许多学者对其展开研究. 譬如, Herstein 在文献 [1] 中证明了满足一定条件的素环上的可加导子一定是内导子. Kadison 在文献 [2] 中证明了 von Neumann 代数上的线性导子也是内导子. 令  $\mathcal{A}$  是  $C^*$ -代数,  $\mathcal{M}$  是  $\mathcal{A}$  上的 Hilbert  $C^*$ -模,  $\text{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$  是  $\mathcal{M}$  上的有界线性  $\mathcal{A}$ -同态全体构成的 Banach 代数. 在一些条件的假设下, Moghadam 和 Miri 等人在文献 [3] 中得到  $\text{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}$  上的线性导子也是内导子. 关于其它相关成果, 可参见文献 [4-6] 及其里面的参考文献.

注意到, 在许多情形, 我们只能得到关于映射的部分信息. 这样, 一个自然的问题是, 如何从这些部分信息中获得映射的完整信息. 近三十多年来, 国内外学者致力于研究在何种条件下, 环与代数上的导子可以完全由这类映射的某种局部行为来决定. Kadison 与 Larson, Sourour 分别在文献 [7] 和 [8] 中独立地引入了局部导子的概念, 即称  $\delta$  是局部导子, 若  $\delta$  满足对任意  $A \in \mathcal{R}$ , 总存在可加或线性导子  $\theta_A: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  使得  $\delta(A) = \theta_A(A)$  成立. Kadison 在文献 [7] 中得到了从任意 von Neumann 代数到其对偶 Banach 双模的连续线性局部导子一定是导子. Larson 和 Sourour 在文献 [8] 中证明了  $\mathcal{B}(X)$  (Banach 空间  $X$  上所有有界线性

\*收稿日期: 2024-11-13 接收日期: 2024-12-09

基金项目: 国家自然科学基金资助 (12171290, 12301152); 山西省自然科学基金资助 (202203021222018).

作者简介: 张婷 (1991-), 女, 山西忻州, 讲师, 主要研究方向: 算子理论与算子代数,

E-mail: zt142232@sxu.edu.cn.

通讯作者: 齐霄霏 (1991-), E-mail: qixf1981@sxu.edu.cn.

算子构成的代数)上的线性局部导子是导子. Johnson 在文献 [9] 中证明了任意  $C^*$ -代数到其 Banach 双模的连续线性局部导子也是导子. 上世纪九十年代末到本世纪初, 国内外学者从另一角度展开对导子的研究, 并取得了丰富的研究成果. 譬如, Brešar 在文献 [10] 中证明了含非平凡幂等元的素环  $\mathcal{R}$  上的可加映射  $\delta$  若满足条件对任意元  $A, B \in \mathcal{R}$ ,  $AB = 0$  蕴涵  $\delta(A)B + A\delta(B) = 0$  成立, 则  $\delta(A) = d(A) + \lambda A$  对所有  $A \in \mathcal{R}$  成立, 其中  $d: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  是可加导子,  $\lambda$  是  $\mathcal{R}$  的扩展中心中的元. 令  $X$  是维数大于 2 的实或复 Banach 空间,  $\mathcal{L}$  是  $X$  上的  $\mathcal{J}$ -子空间格且  $\text{Alg}\mathcal{L}$  是  $\mathcal{J}$ -子空间格代数. Hou 和 Qi 在文献 [11] 中证明了  $\text{Alg}\mathcal{L}$  上的线性映射  $\delta$  满足对任意  $A, B \in \text{Alg}\mathcal{L}$ ,  $AB = I$  (单位算子) 蕴涵  $\delta(A)B + A\delta(B) = \delta(I)$  成立当且仅当  $\delta$  是导子. 令  $\mathcal{A}$  是含单位元和非平凡幂等元  $P$  的 Banach 代数且  $\mathcal{M}$  是含单位元的  $\mathcal{A}$  双模. 在一些条件的假设下, Ghahramani 在文献 [12] 中证明了可加映射  $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}$  若满足对任意  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $AB = P$  蕴涵  $\delta(A)B + A\delta(B) = \delta(P)$ , 那么  $\delta$  是导子. Zhu 和 Xiong 等人在文献 [13] 中证明了  $\mathcal{B}(H)$  ( $H$  为任意 Hilbert 空间) 上的线性映射  $\delta$  若满足对任意  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ,  $AB = C$  蕴涵  $\delta(A)B + A\delta(B) = \delta(C)$  成立 (其中  $C \in \mathcal{B}(H)$  为任意固定算子), 则  $\delta$  是导子当且仅当  $C \neq 0$ . 令  $\mathcal{A}$  是任意  $C^*$ -代数,  $X$  是本性 Banach  $\mathcal{A}$  双模. 近来, Garcés 和 Khrypchenko 在文献 [14] 中证明了有界线性映射  $\delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $AB = 0$  蕴涵  $\delta(A)B + A\delta(B) = 0$  成立当且仅当存在线性导子  $d: \mathcal{A} \rightarrow X^{**}$  和  $\xi \in X^{**}$  ( $X^{**}$  表示  $X$  的二次共轭空间) 使得  $a\xi = \xi a$  且  $\delta(a) = d(a) + \xi a$  对所有  $a \in \mathcal{A}$  成立. 对于其它相关研究成果, 可参见文献 [15–22] 及其里面的参考文献.

2018 年, Catalano 在文献 [23] 中将上述研究导子局部行为的问题进行了更一般化的讨论. 假设  $\mathcal{R}$  是特征不为 2 的除环,  $C, D \in \mathcal{R}$  是任意两个固定元且  $C \neq 0$ . Catalano 证明了,  $\mathcal{R}$  上的可加映射  $\delta$  若满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{R}$ ,  $AB = C$  蕴涵  $\delta(A)B + A\delta(B) = D$  成立, 那么  $\delta(A) = d(A) + ZA$  对所有  $A \in \mathcal{R}$  成立, 其中  $d: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  是可加导子,  $Z \in \mathcal{R}$  是中心元.

受以上工作的启发, 本文将继续研究  $\mathcal{B}(H)$  上导子的局部行为与导子之间的关系. 下面是本文的主要结果.

**定理 1** 令  $H$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的 Hilbert 空间,  $C, D \in \mathcal{B}(H)$  是任意两个固定算子. 假设  $\phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  是可加映射. 则  $\phi$  满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ,

$$AB = C \text{ 蕴涵 } \phi(A)B + A\phi(B) = D \text{ 成立,}$$

当且仅当存在可加导子  $\delta: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  与  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\phi(C) + \lambda C = D$  且  $\phi(A) = \delta(A) + \lambda A$  对所有  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立.

注意到, 当  $H$  是无限维 Hilbert 空间时,  $\mathcal{B}(H)$  上的可加导子一定是内导子 [24]. 利用定理 1, 立得下面的结论.

**定理 2** 令  $H$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的无限维 Hilbert 空间,  $C, D \in \mathcal{B}(H)$  是任意两个固定算子. 假设  $\phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  是可加映射. 则  $\phi$  满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ,

$$AB = C \text{ 蕴涵 } \phi(A)B + A\phi(B) = D \text{ 成立,}$$

当且仅当存在  $T \in \mathcal{B}(H)$  与  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\phi(C) + \lambda C = D$  且  $\phi(A) = AT - TA + \lambda A$  对所有  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立.

当  $H$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的有限维 Hilbert 空间时, 不妨假设  $\dim H = n$ , 则通过固定  $H$  的一组基,  $\mathcal{B}(H)$  同构于  $\mathbb{C}$  上的矩阵代数  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . 根据文献 [24] 对  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  上可加导子刻画的结果, 定理 1 可表述为:

**定理 3** 假设  $\phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  是可加映射且  $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  是任意两个固定矩阵. 则  $\phi$  满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

$$AB = C \text{ 蕴涵 } \phi(A)B + A\phi(B) = D \text{ 成立,}$$

当且仅当存在  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , 可加导子  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  与  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\phi(C) + \lambda C = D$  且  $\phi(A) = AT - TA + (f(a_{ij})) + \lambda A$  对所有  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  成立, 其中  $A = (a_{ij})$ .

特别地, 由以上结果可立得下面的推论, 即文献 [13] 中的结论.

**推论 4** 令  $H$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的 Hilbert 空间,  $C \in \mathcal{B}(H)$  是任意固定算子. 假设  $\phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  是可加映射. 则  $\phi$  满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ,

$$AB = C \text{ 蕴涵 } \phi(A)B + A\phi(B) = \phi(C) \text{ 成立,}$$

当且仅当下列表述成立:

(1) 若  $\dim H = \infty$ , 则存在  $T \in \mathcal{B}(H)$  与  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\lambda C = 0$  且  $\phi(A) = AT - TA + \lambda A$  对所有  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立.

(2) 若  $\dim H = n < \infty$ , 则存在  $T \in \mathcal{B}(H) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , 可加导子  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  与  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\lambda C = 0$  且  $\phi(A) = AT - TA + (f(a_{ij})) + \lambda A$  对所有  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  成立.

**注** 由定理 1 的结论可以看出,  $C$  与  $D$  之间存在某种联系, 且  $C = 0$  定蕴涵  $D = 0$ ; 但反过来,  $D = 0$  并不一定蕴涵  $C = 0$ . 因此, 我们的结论是对相关已有结果的进一步推广与改进.

## 2 主要结果的证明

本节将主要给出本文定理 1 的证明.

为证明定理 1, 首先引入一个命题.

**命题 2.1** ([23, 命题 2.0]) 令  $\mathcal{F}$  是域且  $|\mathcal{F}| \geq 3$ ,  $\mathcal{V}$  是  $\mathcal{F}$  上的向量空间. 对任意固定元  $u, v, w \in \mathcal{V}$ , 定义  $p(t) = ut^2 + vt + w, t \in \mathcal{F}$ . 如果  $p(t) = 0$  在  $\mathcal{F}$  中有三个不同的根, 则  $u = v = w = 0$ .

**定理 1 的证明** 定理的充分性显然. 对于必要性, 我们分两种情形来证明之.

**情形 1**  $\overline{\text{ran}C} \neq H$  且  $\overline{\text{ran}C} \neq 0$ .

令  $P$  是  $C$  的值域投影. 那么  $P$  是非平凡的, 且满足  $C = PC$ . 记  $Q = I - P$ ,  $\mathcal{B}_{11} = PB(H)P$ ,  $\mathcal{B}_{12} = PB(H)Q$ ,  $\mathcal{B}_{21} = QB(H)P$ ,  $\mathcal{B}_{22} = QB(H)Q$ . 则  $\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}_{11} + \mathcal{B}_{12} + \mathcal{B}_{21} + \mathcal{B}_{22}$ . 显然, 对任意算子  $A \in \mathcal{B}(H)$  均可以表示为  $A = \sum_{i,j=1,2} A_{ij}$ , 其中  $A_{ij} \in \mathcal{B}_{ij}$ .

记  $C = C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22}$ . 利用条件  $C = PC$  可得  $C = C_{11} + C_{12}$ .

任取可逆元  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$ , 任取  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ ,  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$  以及非零有理数  $t$ . 直接计算可得

$$(A_{11} + tA_{11}A_{12})(A_{11}^{-1}C - A_{12}A_{22} + t^{-1}A_{22}) = C.$$

根据假设条件, 我们有  $\phi(A_{11} + tA_{11}A_{12})(A_{11}^{-1}C - A_{12}A_{22} + t^{-1}A_{22}) + (A_{11} + tA_{11}A_{12})\phi(A_{11}^{-1}C -$

$A_{12}A_{22} + t^{-1}A_{22}) = D$ . 利用  $\phi$  的可加性, 上式整理得到

$$\begin{aligned} D = & \phi(A_{11})A_{11}^{-1}C - \phi(A_{11})A_{12}A_{22} + A_{11}\phi(A_{11}^{-1}C) \\ & - A_{11}\phi(A_{12}A_{22}) + \phi(A_{11}A_{12})A_{22} + A_{11}A_{12}\phi(A_{22}) \\ & + t[\phi(A_{11}A_{12})A_{11}^{-1}C - \phi(A_{11}A_{12})A_{12}A_{22} + A_{11}A_{12}\phi(A_{11}^{-1}C) - A_{11}A_{12}\phi(A_{12}A_{22})] \\ & + t^{-1}[\phi(A_{11})A_{22} + A_{11}\phi(A_{22})]. \end{aligned}$$

根据命题 2.1, 可得

$$\begin{aligned} D = & \phi(A_{11})A_{11}^{-1}C - \phi(A_{11})A_{12}A_{22} + A_{11}\phi(A_{11}^{-1}C) \\ & - A_{11}\phi(A_{12}A_{22}) + \phi(A_{11}A_{12})A_{22} + A_{11}A_{12}\phi(A_{22}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\phi(A_{11}A_{12})A_{11}^{-1}C - \phi(A_{11}A_{12})A_{12}A_{22} + A_{11}A_{12}\phi(A_{11}^{-1}C) - A_{11}A_{12}\phi(A_{12}A_{22}) = 0 \quad (2.2)$$

与

$$\phi(A_{11})A_{22} + A_{11}\phi(A_{22}) = 0. \quad (2.3)$$

特别地, 在等式 (2.3) 中取  $A_{11} = P, A_{22} = Q$ , 得到

$$P\phi(Q)P = 0. \quad (2.4)$$

另一方面, 由于  $A_{11}(A_{11}^{-1}C) = C$ , 由题设条件可知  $D = \phi(A_{11})A_{11}^{-1}C + A_{11}\phi(A_{11}^{-1}C)$ . 结合该式与等式 (2.1), 可得

$$\phi(A_{11}A_{12})A_{22} + A_{11}A_{12}\phi(A_{22}) = \phi(A_{11})A_{12}A_{22} + A_{11}\phi(A_{12}A_{22}). \quad (2.5)$$

在等式 (2.2) 中, 利用  $2A_{11}$  来代替  $A_{11}$ , 有

$$\phi(A_{11}A_{12})A_{11}^{-1}C - 2\phi(A_{11}A_{12})A_{12}A_{22} + A_{11}A_{12}\phi(A_{11}^{-1}C) - 2A_{11}A_{12}\phi(A_{12}A_{22}) = 0.$$

比较上式和等式 (2.2), 即得

$$\phi(A_{11}A_{12})A_{11}^{-1}C + A_{11}A_{12}\phi(A_{11}^{-1}C) = 0$$

与

$$\phi(A_{11}A_{12})A_{12}A_{22} + A_{11}A_{12}\phi(A_{12}A_{22}) = 0. \quad (2.6)$$

现令  $M = Q\phi(Q)P - P\phi(Q)Q$ , 并定义映射  $\tau: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  为  $\tau(A) = \phi(A) - (AM - MA)$  对任意  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立. 易证  $\tau$  是可加的; 满足条件对任意  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ,

$$AB = C \Rightarrow \tau(A)B + A\tau(B) = D', \quad \text{其中 } D' = D - (CM - MC);$$

且对任意可逆元  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  以及任意元  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$ , 等式 (2.2)–(2.3), 等式 (2.5)–(2.6) 对映射  $\tau$  也成立. 此外, 等式 (2.4) 蕴涵

$$\tau(Q) = \phi(Q) - (P\phi(Q)Q + Q\phi(Q)P) = Q\phi(Q)Q \in \mathcal{B}_{22}. \quad (2.7)$$

以下分几个断言证明  $\tau$  是广义导子, 即  $\tau$  满足  $\tau(AB) = \tau(A)B + A\tau(B) - \lambda AB$  对所有  $A, B \in \mathcal{B}(H)$  成立.

**断言 1**  $\tau(\mathcal{B}_{22}) \subseteq \mathcal{B}_{22}$ .

在等式 (2.3) 中取  $A_{22} = Q$ , 得到  $\tau(A_{11})Q + A_{11}\tau(Q) = 0$  对任意可逆元  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  成立. 该式结合等式 (2.7), 可得  $\tau(A_{11})Q = A_{11}\tau(Q) = 0$  对任意可逆元  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  成立. 上式与等式 (2.3) 又蕴涵

$$\tau(A_{11})A_{22} = A_{11}\tau(A_{22}) = 0 \text{ 对任意可逆元 } A_{11} \in \mathcal{B}_{11} \text{ 与任意 } A_{22} \in \mathcal{B}_{22} \text{ 成立.} \quad (2.8)$$

特别地, 我们有

$$\tau(P)Q = 0 \quad (2.9)$$

与

$$P\tau(A_{22}) = 0 \text{ 对任意元 } A_{22} \in \mathcal{B}_{22} \text{ 成立.} \quad (2.10)$$

在等式 (2.5) 中取  $A_{11} = P$ , 则有

$$P\tau(A_{12}A_{22}) = \tau(A_{12})A_{22} + A_{12}\tau(A_{22}) - \tau(P)A_{12}A_{22} \quad (2.11)$$

对所有元  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$  成立. 在等式 (2.11) 的右边乘以  $P$ , 可得

$$P\tau(A_{12}A_{22})P = A_{12}\tau(A_{22})P.$$

特别地, 在上式中取  $A_{22} = Q$ , 并结合等式 (2.7), 得到

$$P\tau(A_{12})P = A_{12}\tau(Q)P = 0 \text{ 对任意元 } A_{12} \in \mathcal{B}_{12} \text{ 成立.} \quad (2.12)$$

因此, 对任意  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$ , 我们有

$$A_{12}\tau(A_{22})P = P\tau(A_{12}A_{22})P = A_{12}A_{22}\tau(Q)P = 0,$$

即

$$PAQ\tau(A_{22})P = 0 \text{ 对任意的 } A \in \mathcal{B}(H) \text{ 成立.}$$

注意到  $\mathcal{B}(H)$  是素代数. 上式蕴涵  $Q\tau(A_{22})P = 0$ . 结合该式与等式 (2.10), 即得  $\tau(A_{22}) \in \mathcal{B}_{22}$ .

**断言 2** 存在数  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\tau(P) = \lambda P$  且  $\tau(Q) = \lambda Q$ .

对任意的  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ , 等式 (2.11) 成立. 在该式中取  $A_{22} = Q$ , 并左边乘以  $P$  且右边乘以  $Q$ , 得到

$$P\tau(A_{12})Q = P\tau(A_{12})Q + A_{12}\tau(Q)Q - P\tau(P)A_{12},$$

即得

$$P\tau(P)A_{12} = A_{12}\tau(Q)Q \text{ 对任意的 } A_{12} \in \mathcal{B}_{12} \text{ 成立.} \quad (2.13)$$

进而, 对任意  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$ , 等式 (2.13) 蕴涵

$$A_{12}\tau(Q)A_{22} = P\tau(P)A_{12}A_{22} = A_{12}A_{22}\tau(Q)Q,$$

即

$$PA(Q\tau(Q)A_{22} - A_{22}\tau(Q)Q) = 0 \text{ 对任意的 } A \in \mathcal{B}(H) \text{ 成立.}$$

利用  $\mathcal{B}(H)$  的素性,  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$  的任意性以及断言 1, 知存在数  $\lambda \in \mathbb{C}$  使得  $\tau(Q) = \lambda Q$ . 该式与等式 (2.13) 结合, 可得  $P\tau(P)P = \lambda P$ .

**断言 3** 对任意的  $A_{22}, B_{22} \in \mathcal{B}_{22}$ , 我们有  $\tau(A_{22}B_{22}) = \tau(A_{22})B_{22} + A_{22}\tau(B_{22}) - \lambda A_{22}B_{22}$ . 任取  $A_{22}, B_{22} \in \mathcal{B}_{22}$ . 对任意的  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ , 利用等式 (2.11), 有

$$P\tau(A_{12}A_{22}B_{22}) = \tau(A_{12})A_{22}B_{22} + A_{12}\tau(A_{22}B_{22}) - \tau(P)A_{12}A_{22}B_{22} \quad (2.14)$$

与

$$\begin{aligned} & P\tau(A_{12}A_{22}B_{22}) \\ &= \tau(A_{12}A_{22})B_{22} + A_{12}A_{22}\tau(B_{22}) - \tau(P)A_{12}A_{22}B_{22} \\ &= P\tau(A_{12}A_{22})B_{22} + A_{12}A_{22}\tau(B_{22}) - \tau(P)A_{12}A_{22}B_{22} \\ &= [\tau(A_{12})A_{22} + A_{12}\tau(A_{22}) - \tau(P)A_{12}A_{22}]B_{22} + A_{12}A_{22}\tau(B_{22}) - \tau(P)A_{12}A_{22}B_{22}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

比较等式 (2.14) 和等式 (2.15), 并利用断言 2, 可得

$$A_{12}(\tau(A_{22}B_{22}) - \tau(A_{22})B_{22} - A_{22}\tau(B_{22}) + \lambda A_{22}B_{22}) = 0$$

对所有  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  成立. 现再次利用  $\mathcal{B}(H)$  的素性, 即得

$$\tau(A_{22}B_{22}) = \tau(A_{22})B_{22} + A_{22}\tau(B_{22}) - \lambda A_{22}B_{22}.$$

**断言 4** 对任意的  $A_{11}, B_{11} \in \mathcal{B}_{11}$ , 我们有

$$\tau(A_{11}B_{11}) = \tau(A_{11})B_{11} + A_{11}\tau(B_{11}) - \lambda A_{11}B_{11}.$$

任取可逆元  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$ . 对任意的  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ , 在等式 (2.5) 中令  $A_{22} = Q$ , 并结合断言 2, 知

$$\tau(A_{11}A_{12})Q = \tau(A_{11})A_{12} + A_{11}\tau(A_{12}) - \lambda A_{11}A_{12}.$$

注意到  $\mathcal{B}_{11}$  中的每个元  $A_{11}$ , 均存在正整数  $n$  使得  $nP - A_{11}$  在  $\mathcal{B}_{11}$  中是可逆的. 利用这一事实以及  $\tau$  的可加性, 上式蕴涵

$$\tau(A_{11}A_{12})Q = \tau(A_{11})A_{12} + A_{11}\tau(A_{12}) - \lambda A_{11}A_{12} \quad (2.16)$$

对所有  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  和  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  成立. 进而, 对任意元  $A_{11}, B_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  与任意元  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ , 根据等式 (2.12) 和等式 (2.16), 可得

$$\begin{aligned} A_{11}\tau(B_{11}A_{12}) &= A_{11}\tau(B_{11}A_{12})Q \\ &= A_{11}\tau(B_{11})A_{12} + A_{11}B_{11}\tau(A_{12}) - \lambda A_{11}B_{11}A_{12}. \end{aligned}$$

结合上式与等式 (2.16), 我们有

$$\tau(A_{11}B_{11}A_{12})Q = \tau(A_{11}B_{11})A_{12} + A_{11}B_{11}\tau(A_{12}) - \lambda A_{11}B_{11}A_{12} \quad (2.17)$$

与

$$\begin{aligned} & \tau(A_{11}B_{11}A_{12})Q \\ = & \tau(A_{11})B_{11}A_{12} + A_{11}\tau(B_{11}A_{12}) - A_{11}B_{11}A_{12}\tau(Q) \\ = & \tau(A_{11})B_{11}A_{12} + A_{11}\tau(B_{11})A_{12} + A_{11}B_{11}\tau(A_{12}) - 2\lambda A_{11}B_{11}A_{12}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

比较等式 (2.17) 和等式 (2.18), 得到

$$\tau(A_{11}B_{11})A_{12} = \tau(A_{11})B_{11}A_{12} + A_{11}\tau(B_{11})A_{12} - \lambda A_{11}B_{11}A_{12},$$

进而得到

$$\tau(A_{11}B_{11}) = A_{11}\tau(B_{11}) + \tau(A_{11})B_{11} - \lambda A_{11}B_{11}$$

对所有元  $A_{11}, B_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  成立. 该断言成立.

**断言 5**  $\tau(\mathcal{B}_{11}) \subseteq \mathcal{B}_{11}$ .

由断言 4 知,

$$\tau(A_{11}B_{11}) = \tau(A_{11})B_{11} + A_{11}\tau(B_{11}) - \lambda A_{11}B_{11}$$

对所有  $A_{11}, B_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  成立. 现在上式中左乘  $Q$  并令  $A_{11} = P$ , 利用断言 2, 可得  $Q\tau(B_{11}) = 0$  对所有  $B_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  成立; 在上式中右乘  $Q$  并令  $B_{11} = P$ , 再次利用断言 2, 可得  $\tau(A_{11})Q = 0$  对所有  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  成立. 因此  $\tau(\mathcal{B}_{11}) \subseteq \mathcal{B}_{11}$ .

**断言 6**  $\tau(\mathcal{B}_{12}) \subseteq \mathcal{B}_{12}$ ; 且对任意元  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$ , 我们有

$$\tau(A_{12}A_{22}) = \tau(A_{12})A_{22} + A_{12}\tau(A_{22}) - \lambda A_{12}A_{22}$$

和

$$\tau(A_{11}A_{12}) = \tau(A_{11})A_{12} + A_{11}\tau(A_{12}) - \lambda A_{11}A_{12}.$$

任取  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ . 一方面, 注意到等式 (2.16) 成立. 那么, 在该式左边乘以  $Q$ , 并取  $A_{11} = P$ , 利用断言 2, 我们有

$$Q\tau(A_{12})Q = 0. \quad (2.19)$$

另一方面, 由于等式 (2.6) 对映射  $\tau$  亦成立, 在该等式中取  $A_{11} = P$  且  $A_{22} = Q$ , 可得

$$\tau(A_{12})A_{12} + A_{12}\tau(A_{12}) = 0.$$

在上式左边乘以  $Q$ , 并利用等式 (2.12), 即得  $\tau(A_{12})A_{12} = A_{12}\tau(A_{12}) = 0$  对所有  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  成立. 进而, 对任意  $A_{12}, B_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \tau(A_{12})B_{12} + \tau(B_{12})A_{12} &= \tau(A_{12})B_{12} + \tau(B_{12})A_{12} + \tau(A_{12})A_{12} + \tau(B_{12})B_{12} \\ &= \tau(A_{12} + B_{12})(A_{12} + B_{12}) = 0. \end{aligned}$$

在上式右边乘以  $\tau(A_{12})$ , 得到

$$\tau(A_{12})B_{12}\tau(A_{12}) = 0 \text{ 对所有 } A_{12}, B_{12} \in \mathcal{B}_{12} \text{ 成立,}$$

即有

$$Q\tau(A_{12})PBQ\tau(A_{12})P = 0 \text{ 对所有 } B \in \mathcal{B}(H), A_{12} \in \mathcal{B}_{12} \text{ 成立.}$$

利用  $\mathcal{B}(H)$  的素性, 知  $Q\tau(A_{12})P = 0$  对所有  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  成立. 现结合等式 (2.12) 和等式 (2.19), 可得  $\tau(A_{12}) \in \mathcal{B}_{12}$ .

最后, 利用等式 (2.11), 等式 (2.16) 与上面所证事实, 即知  $\tau(A_{12}A_{22}) = \tau(A_{12})A_{22} + A_{12}\tau(A_{22}) - \lambda A_{12}A_{22}$  与  $\tau(A_{11}A_{12}) = \tau(A_{11})A_{12} + A_{11}\tau(A_{12}) - \lambda A_{11}A_{12}$  对任意元  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$ ,  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  和  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$  成立.

该断言成立.

**断言 7**  $\tau(\mathcal{B}_{21}) \subseteq \mathcal{B}_{21}$ ; 且对任意元  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{21} \in \mathcal{B}_{21}$ , 我们有

$$\tau(A_{12}A_{21}) = \tau(A_{12})A_{21} + A_{12}\tau(A_{21}) - \lambda A_{12}A_{21}.$$

任取  $A_{21} \in \mathcal{B}_{21}$ . 由于  $P(C + A_{21}) = PC = C$ , 所以

$$\tau(P)(C + A_{21}) + P\tau(C + A_{21}) = D = \tau(P)C + P\tau(C).$$

化简可得

$$\tau(P)A_{21} + P\tau(A_{21}) = 0.$$

利用断言 2, 得到

$$P\tau(A_{21}) = 0. \tag{2.20}$$

对任意元  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$ , 由于  $(P + A_{12})(C - A_{12}A_{21} - A_{12} + A_{21} + Q) = PC = C$ , 所以

$$\begin{aligned} & \tau(P + A_{12})(C - A_{12}A_{21} - A_{12} + A_{21} + Q) \\ & + (P + A_{12})\tau(C - A_{12}A_{21} - A_{12} + A_{21} + Q) = \tau(P)C + P\tau(C). \end{aligned}$$

利用断言 2, 断言 5-6, 等式 (2.13) 和等式 (2.20), 上式可化简为

$$\tau(A_{12}A_{21}) = \tau(A_{12})A_{21} + A_{12}\tau(A_{21}) - \lambda A_{12}A_{21}. \tag{2.21}$$

在等式 (2.21) 右边乘以  $Q$ , 并结合断言 5, 可知

$$A_{12}\tau(A_{21})Q = 0 \text{ 对所有 } A_{12} \in \mathcal{B}_{12}, A_{21} \in \mathcal{B}_{21} \text{ 均成立.}$$

这蕴涵  $Q\tau(A_{21})Q = 0$ . 该式结合等式 (2.20), 可得  $\tau(A_{21}) \in \mathcal{B}_{21}$ . 该断言成立.

**断言 8** 对任意元  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$  与  $A_{21} \in \mathcal{B}_{21}$ , 我们有

$$\tau(A_{21}A_{11}) = \tau(A_{21})A_{11} + A_{21}\tau(A_{11}) - \lambda A_{21}A_{11}.$$

任取  $A_{11} \in \mathcal{B}_{11}$ ,  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{21} \in \mathcal{B}_{21}$ . 利用断言 4 与断言 7, 我们有

$$\tau(A_{12}A_{21}A_{11}) = \tau(A_{12})A_{21}A_{11} + A_{12}\tau(A_{21}A_{11}) - \lambda A_{12}A_{21}A_{11}$$

与

$$\begin{aligned}\tau(A_{12}A_{21}A_{11}) &= \tau(A_{12}A_{21})A_{11} + A_{12}A_{21}\tau(A_{11}) - \lambda A_{12}A_{21}A_{11} \\ &= [\tau(A_{12})A_{21} + A_{12}\tau(A_{21}) - \lambda A_{12}A_{21}]A_{11} + A_{12}A_{21}\tau(A_{11}) - \lambda A_{12}A_{21}A_{11}.\end{aligned}$$

比较上面两个等式, 则有

$$A_{12}\tau(A_{21}A_{11}) = A_{12}\tau(A_{21})A_{11} + A_{12}A_{21}\tau(A_{11}) - \lambda A_{12}A_{21}A_{11}.$$

由于  $A_{12}$  的任意性, 上式蕴涵

$$\tau(A_{21}A_{11}) = \tau(A_{21})A_{11} + A_{21}\tau(A_{11}) - \lambda A_{21}A_{11}.$$

**断言 9** 对任意元  $A_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{21} \in \mathcal{B}_{21}$ , 我们有

$$\tau(A_{21}A_{12}) = \tau(A_{21})A_{12} + A_{21}\tau(A_{12}) - \lambda A_{21}A_{12}.$$

对任意元  $A_{12}, B_{12} \in \mathcal{B}_{12}$  与  $A_{21} \in \mathcal{B}_{21}$ , 利用断言 6-7, 得到

$$\tau(B_{12}A_{21}A_{12}) = \tau(B_{12})A_{21}A_{12} + B_{12}\tau(A_{21}A_{12}) - \lambda B_{12}A_{21}A_{12}$$

和

$$\begin{aligned}\tau(B_{12}A_{21}A_{12}) &= \tau(B_{12}A_{21})A_{12} + B_{12}A_{21}\tau(A_{12}) - \lambda B_{12}A_{21}A_{12} \\ &= [\tau(B_{12})A_{21} + B_{12}\tau(A_{21}) - \lambda B_{12}A_{21}]A_{12} + B_{12}A_{21}\tau(A_{12}) - \lambda B_{12}A_{21}A_{12}.\end{aligned}$$

比较上面两个等式, 则有

$$B_{12}\tau(A_{21}A_{12}) = B_{12}\tau(A_{21})A_{12} + B_{12}A_{21}\tau(A_{12}) - \lambda B_{12}A_{21}A_{12}.$$

由于  $B_{12}$  是任意的, 上式蕴涵

$$\tau(A_{21}A_{12}) = \tau(A_{21})A_{12} + A_{21}\tau(A_{12}) - \lambda A_{21}A_{12}.$$

类似地, 利用断言 6-7 通过两种方式计算  $\tau(A_{12}A_{22}A_{21})$ , 可证下面断言成立.

**断言 10** 对任意元  $A_{21} \in \mathcal{B}_{21}$  与  $A_{22} \in \mathcal{B}_{22}$ , 我们有

$$\tau(A_{22}A_{21}) = \tau(A_{22})A_{21} + A_{22}\tau(A_{21}) - \lambda A_{22}A_{21}.$$

**断言 11** 对任意元  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ , 我们有

$$\tau(AB) = \tau(A)B + A\tau(B) - \lambda AB.$$

对任意元  $A = \sum_{ij} A_{ij}, B = \sum_{ij} B_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ , 结合断言 3-10 与  $\tau$  的可加性, 容易验证  $\tau(AB) = \tau(A)B + A\tau(B) - \lambda AB$  成立.

现在, 定义映射  $d: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  为:

$$d(A) = \tau(A) - \lambda A, \quad \forall A \in \mathcal{B}(H).$$

易验证  $d$  是可加导子. 再由  $\tau$  的定义, 可令  $\delta(A) = d(A) + AM - MA$  对任意  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立. 显然,  $\delta$  也是  $\mathcal{B}(H)$  上的可加导子, 且  $\phi(A) = \delta(A) + \lambda A$  对任意  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立.

**情形 2**  $\overline{\text{ran} C} = \{0\}$  或  $\overline{\text{ran} C} = H$ .

如果  $\overline{\text{ran} C} = \{0\}$ , 则  $C = 0$ . 任取  $A \in \mathcal{B}(H)$ . 由于  $0 \cdot A = C$ , 所以  $\phi(0) \cdot A + 0 \cdot \phi(A) = D$ . 根据  $\phi$  的可加性, 可知  $\phi(0) = 0$ . 因而  $D = 0$ . 现利用文献 [25, 定理 2.2], 可知此时结论成立.

如果  $\overline{\text{ran} C} = H$ , 则  $C$  是稠值域算子.

首先, 对任意可逆元  $A \in \mathcal{B}(H)$ , 因为  $A^{-1}AC = C$ , 所以  $\phi(A^{-1})AC + A^{-1}\phi(AC) = D$ , 即

$$\phi(AC) - AD = -A\phi(A^{-1})AC.$$

接着, 定义映射  $\Phi: \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  为

$$\Phi(A) = \phi(AC) - AD \text{ 对任意 } A \in \mathcal{B}(H) \text{ 成立.}$$

显然,  $\Phi$  是可加的, 且满足

$$\Phi(A) = -A\phi(A^{-1})AC \text{ 对任意可逆元 } A \in \mathcal{B}(H) \text{ 成立.} \quad (2.22)$$

再次, 对任意可逆元  $A \in \mathcal{B}(H)$ , 选择适当的整数  $n$  使得  $A - nI$  是可逆元. 注意到

$$(A - nI)^{-1} - A^{-1} = n(A - nI)^{-1}A^{-1}.$$

上式作用  $\Phi$ , 并利用  $\Phi$  的可加性, 可得

$$n\Phi((A - nI)^{-1}A^{-1}) = \Phi((A - nI)^{-1}) - \Phi(A^{-1}).$$

对上式利用等式 (2.22), 有

$$\begin{aligned} & -n(A - nI)^{-1}A^{-1}\phi(A^2 - nA)(A - nI)^{-1}A^{-1}C \\ &= -(A - nI)^{-1}\phi(A - nI)(A - nI)^{-1}C + A^{-1}\phi(A)A^{-1}C. \end{aligned}$$

又因为  $C$  是  $\mathcal{B}(H)$  中的稠值域算子, 上式蕴涵

$$\begin{aligned} & n(A - nI)^{-1}A^{-1}\phi(A^2 - nA)(A - nI)^{-1}A^{-1} \\ &= (A - nI)^{-1}\phi(A - nI)(A - nI)^{-1} - A^{-1}\phi(A)A^{-1}. \end{aligned}$$

在上式两边同乘  $(A - nI)A = A(A - nI)$ , 可得

$$n\phi(A^2 - nA) = A\phi(A - nI)A - (A - nI)\phi(A)(A - nI).$$

利用  $\phi$  的可加性, 上式化简得到

$$\phi(A^2) = \phi(A)A + A\phi(A) - A\phi(I)A \text{ 对任意可逆元 } A \in \mathcal{B}(H) \text{ 成立.}$$

注意到  $\mathcal{B}(H)$  中每一个元都可以表示为  $\mathcal{B}(H)$  中两个可逆元的和. 对上式利用该事实, 易知  $\phi(A^2) = \phi(A)A + A\phi(A) - A\phi(I)A$  对任意元  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立, 即有

$$\phi(A^2) - \phi(I)A^2 = \phi(A)A + A\phi(A) - A\phi(I)A - \phi(I)A^2 = (\phi(A) - \phi(I)A)A + A(\phi(A) - \phi(I)A)$$

对任意元  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立.

对任意元  $A \in \mathcal{B}(H)$ , 令  $\delta(A) = \phi(A) - \phi(I)A$ . 表明  $\delta$  是  $\mathcal{B}(H)$  上的可加 Jordan 导子, 即  $\delta(A^2) = \delta(A)A + A\delta(A)$  对所有  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立. 根据文献 [26],  $\delta$  是导子.

最后, 仍需验证  $\phi(I) \in \mathbb{C}I$ . 为此, 任取  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ . 若  $AB = C$ , 则  $\phi(A)B + A\phi(B) = D$ , 即

$$\begin{aligned} D &= \delta(A)B + \phi(I)AB + A\delta(B) + A\phi(I)B \\ &= \delta(AB) + \phi(I)AB + A\phi(I)B \\ &= \phi(AB) + A\phi(I)B = \phi(C) + A\phi(I)B. \end{aligned}$$

因为  $D$  是  $\mathcal{B}(H)$  中的任意固定元, 上式蕴涵当  $AB = C$  时,  $A\phi(I)B$  也是  $\mathcal{B}(H)$  中的固定元. 特别地, 取  $A$  为任意可逆元. 那么  $A^{-1}AC = IC = C$ . 因此, 由上式得到  $A^{-1}\phi(I)AC = \phi(I)C$ , 即  $\phi(I)AC = A\phi(I)C$  对所有可逆元  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立. 现在, 对上式利用  $C$  的稠值域性可知,  $\phi(I)A = A\phi(I)$  对所有  $A \in \mathcal{B}(H)$  成立, 进而得到  $\phi(I) \in \mathbb{C}I$ .

定理得证.

## 参 考 文 献

- [1] Herstein I N. A condition that a derivation be inner[J]. Rend. Circ. Mat. Palermo., 1988, 37: 5-7.
- [2] Kadison R. Derivations of operator algebras[J]. Ann. Math., 1996, 83(2): 280-293.
- [3] Moghadam M K, Miri M, Janfada A R. A note on derivations on the algebra of operators in Hilbert  $C^*$ -Modules[J]. Mediterr. J. Math., 2016, 13: 1167-1175.
- [4] Christensen E. Derivations of nest algebras[J]. Math. Ann., 1997, 229: 155-161.
- [5] Sakai S. Derivations of  $W^*$ -algebras[J]. Ann. Math., 1966, 83(2): 273-279.
- [6] Sakai S. Derivations of simple  $C^*$ -algebras[J]. J. Funct. Anal., 1968, 2(2): 202-206.
- [7] Kadison R. Local derivations[J]. J. Algebra, 1990, 130(2): 494-509.
- [8] Larson D, Sourour A. Local derivations and local automorphisms of  $\mathcal{B}(X)$ [J]. Proc. Symp. Pure Math., 1990, 51(5): 187-194.
- [9] Johnson B. Local derivations on  $C^*$ -algebras are derivations[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 2001, 353(1): 313-325.
- [10] Brešar M. Characterizing homomorphisms, derivations and multipliers in rings with idempotents[J]. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 2007, 137(1): 9-21.
- [11] Hou J C, Qi X F. Additive maps derivable at some points on  $\mathcal{J}$ -subspace lattice algebras[J]. Linear Algebra Appl., 2008, 429(8-9): 1851-1863.
- [12] Ghahramani H. Additive mappings derivable at non-trivial idempotents on Banach algebras[J]. Linear Multilinear Algebra, 2012, 60(6): 725-742.
- [13] Zhu J, Xiong C P, Li P. Characterizations of all-derivable points in  $\mathcal{B}(H)$ [J]. Linear Multilinear Algebra, 2016, 64(8): 1461-1473.

- [14] Garcés J J, Khrypchenko M. Bilinear maps on  $C^*$ -algebras that have product property at a compact element[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2024, 534(1): 128076.
- [15] Chebotar M, Ke W, Lee P. Maps characterized by action on zero products[J]. *Pacific J. Math.*, 2004, 216(2): 217–228.
- [16] Fadaee B, Ghahramani H. Linear Maps on  $C^*$ -algebras behaving like (anti-) derivations at orthogonal elements[J]. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2020, 43(3): 2851–2859.
- [17] Li J K, Pan Z D, Xu H S. Characterizations of isomorphisms and derivations of some algebras[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, 332(2): 1314–1322.
- [18] Pan Z D. Derivable maps and derivational points[J]. *Linear Algebra Appl.*, 2012, 436(11): 4251–4260.
- [19] Qi X F, Hou J C. Characterizations of derivations of Banach space nest algebras: All-derivable points[J]. *Linear Algebra Appl.*, 2010, 432(12): 3183–3200.
- [20] Qi X F, Hou J C. Generalized skew derivations on nest algebras characterized by acting on zero products[J]. *Publ. Math. Debrecen*, 2011, 78(2): 457–468.
- [21] Zhang Y F, Hou J C, Qi X F. Characterizing derivations for any nest algebras on Banach spaces by their behaviors at an injective operator[J]. *Linear Algebra Appl.*, 2014, 449: 312–333.
- [22] Zhu J, Xiong C P. All-derivable points in continuous nest algebras[J]. *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, 340(2): 845–853.
- [23] Catalano L. On maps characterized by action on equal products[J]. *J. Algebra*, 2018, 511: 148–154.
- [24] Šemrl P. Additive derivations of some operator algebras[J]. *Illinois J. Math.*, 1991, 35(2): 234–240.
- [25] Hou J C, An R L. Additive maps on rings behaving like derivations at idempotent product elements[J]. *J. Pure. Appl. Algebra*, 2011, 215(8): 1852–1862.
- [26] Brešar M. Jordan derivations on semiprime rings[J]. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, 104(4): 1003–1006.

## A NEW CHARACTERIZATION OF ADDITIVE DERIVATIONS ON $\mathcal{B}(H)$

ZHANG Ting, YU Zhi-qiang, XU Bing, QI Xiao-fei

*(School of Mathematics and Statistics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China)*

**Abstract:** Let  $H$  be any complex Hilbert space and  $\mathcal{B}(H)$  the algebra of all bounded linear operators on  $H$ , and let  $C, D \in \mathcal{B}(H)$  be any two fixed operators. In this paper, we study the question of local characterization of additive derivations on  $\mathcal{B}(H)$ . By using operator block methods, we show that an additive map  $\delta : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$  satisfies that, for any  $A, B \in \mathcal{B}(H)$ ,  $AB = C$  implies  $\phi(A)B + A\phi(B) = D$ , if and only if there exists some additive derivation  $\delta$  on  $\mathcal{B}(H)$  and  $\lambda \in \mathbb{C}$  such that  $\phi(C) + \lambda C = D$  and  $\phi(A) = \delta(A) + \lambda A$  for all  $A \in \mathcal{B}(H)$ . Our result generalizes and improves some known related ones.

**Keywords:** Additive derivations; local derivations; bounded linear operators; Hilbert space

**2010 MR Subject Classification:** 47B47; 47B49.