

## $q$ -Bernstein-Durrmeyer 型算子在紧圆盘的复逼近等价性 ( $0 < q < 1$ )

贾亿焯, 韩领兄

(内蒙古民族大学数学科学学院, 内蒙古 通辽 028000)

**摘要:** 本文研究了复  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 型算子在紧圆盘上的相关性质, 利用高阶 Cauchy 积分公式、泰勒展式和 Bernstein 不等式等方法, 获得了该算子在紧圆盘上的同时逼近和在封闭单位圆盘上的 Voronovskaja 型定理, 并给出了  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 型算子在紧圆盘对解析函数的等价定理. 结果表明  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 型算子从实空间推广到复空间扩展了逼近性质.

**关键词:**  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 算子; 等价定理; Voronovskaja 型定理

MR(2010) 主题分类号: 41A17; 41A27; 41A35 中图分类号: O174.41

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2025)03-0261-10

### 1 预备知识与主要结果

本文要用到以下符号, 见文 [1], 对  $\forall k > 0$

$$[k]_q := \begin{cases} \frac{1 - q^k}{1 - q}, & q > 0, q \neq 1, \\ k, & q = 1. \end{cases}$$

对  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$[k]_q! := [1]_q [2]_q \cdots [k]_q, [0]! = 1.$$

对整数  $0 \leq k \leq n$ ,  $q$ -二项式系数定义为

$$\binom{n}{k}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n - k]_q!}.$$

对固定  $q > 1$ ,  $q$ -导数定义为

$$D_q f(z) = \begin{cases} \frac{f(qz) - f(z)}{(q - 1)z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}$$

\*收稿日期: 2024-09-14 接收日期: 2025-01-03

基金项目: 内蒙古自治区自然科学基金青年项目 (2023QN01004).

作者简介: 贾亿焯 (2001-), 女, 河南洛阳, 研究生, 主要研究方向: 函数逼近论.

E-mail: 1463216077@qq.com

通讯作者: 韩领兄, E-mail: hanlx2023@126.com

若  $|q| > 1$  或  $0 < |q| < 1$  且  $|z| < \frac{1}{1-q}$ , 则  $q$ -指数函数定义为

$$e_q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[k]_q!}.$$

当  $|q| > 1$  时, 有

$$e_q(z) = \prod_{j=0}^{\infty} \left( 1 + (q-1) \frac{z}{q^{j+1}} \right), |q| > 1.$$

算子在紧圆盘的复逼近相关研究已有很多, 如文 [2-4] 分别研究了复 Baskakov-Stancu 算子、复 Szász-Durrmeyer 算子和复 Bernstein-Schurer 算子在紧圆盘上对解析函数的逼近性质, 但关于  $q$ -算子在紧圆盘上逼近性质的相关研究较少. 1997 年 Philips<sup>[5]</sup> 首次引入并研究了  $q$ -Bernstein 算子, 之后  $q$ -算子的逼近理论成为算子逼近理论的主要研究内容之一. Gupta 和 Wang<sup>[6]</sup> 引入并研究了  $0 < q < 1$  时的  $q$ -Durrmeyer 算子, 而 Agarwal 和 Gupta<sup>[7]</sup> 将算子扩展到了复空间, 研究了 Voronovskaja 型结论, 并给出复算子在紧圆盘上对解析函数的精确估计.

复 Bernstein-Durrmeyer 算子<sup>[8]</sup> 定义为

$$U_n^\rho(f; z) := \sum_{k=0}^n F_{n,k}^\rho(f) P_{n,k}(z) := \sum_{k=1}^{n-1} \left( \int_0^1 f(t) \mu_{n,k}^\rho(t) dt \right) P_{n,k}(z) + f(0)(1-z)^n + f(1)z^n,$$

其中

$$P_{n,k}(z) = \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k}, 0 \leq k \leq n, k, n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_{n,k}^\rho(t) := \frac{t^{k\rho-1} (1-t)^{(n-k)\rho-1}}{B(k\rho, (n-k)\rho)}, 1 \leq k \leq n-1,$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, x, y > 0.$$

文 [8] 研究了上述算子在紧圆盘上的同时逼近, Voronovskaja 型结论和等价定理, 同时文 [9] 已对  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 算子的 Voronovskaja 型结论进行了初步研究. 本文主要借鉴文 [8] 和 [10] 的研究方法及研究思路, 对  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 算子在紧圆盘上的复逼近性质做进一步研究, 文 [11] 已给出  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 算子在复空间的定义.

设  $f: \overline{D_R} \rightarrow \mathbb{C}$  且在  $D_R$  内解析,

$$M_{n,q}^\rho(f; z) = f(0)P_{n,0}(q; z) + f(1)P_{n,n}(q; z) + \sum_{k=1}^{n-1} P_{n,k}(q; z) \int_0^1 \mu_{n,k}^\rho(t) f(t) dt,$$

其中  $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $0 < q < 1$ ,  $\rho > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$P_{n,k}(q; z) = \binom{n}{k}_q z^k (1-z)_q^{n-k},$$

$$\mu_{n,k}^\rho(t) = \frac{t^{\rho[k]_q-1} (1-t)^{\rho([n]_q-[k]_q)-1}}{B(\rho[k]_q, \rho([n]_q-[k]_q))}, 1 \leq k \leq n-1,$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, (x, y > 0),$$

$B(x, y)$  是 Euler Beta 函数.

当  $q = 1$  时, Bernstein-Durrmeyer 算子等于  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 算子, 但是为了研究  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 算子在紧圆盘上的复逼近相关性质, 本文限制  $0 < q < 1$ .

令  $e_m(z) = z^m, M_{n,q}^\rho(f; z) = \sum_{k=0}^n F_{n,k}^\rho(f) P_{n,k}(q; z)$ , 其中

$$F_{n,k}^\rho(f) = \begin{cases} f(0), & k = 0, \\ \int_0^1 \mu_{n,k}^\rho(t) f(t) dt, & 1 \leq k \leq n-1, \\ f(1), & k = n. \end{cases}$$

令  $H(D_R)$  为  $D_R$  上所有解析函数构成集合, 由  $f \in H(D_R)$  可知

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m.$$

主要结果如下. 下面定理给出了  $M_{n,q}^\rho(f; z)$  在单位圆盘上的 Voronovskaja 型结论.

**定理 1.1** 设  $f: \overline{D_R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 且  $f \in H(D_R), 1 < R, \rho > 0, 0 < q < 1$ , 对所有的  $|z| \leq 1, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$ , 有

$$\begin{aligned} & \left| M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z) - \frac{(\rho+1)z(1-z)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(z) \right| \\ & \leq \frac{(\rho+1)(\rho+3)|z(1-z)|}{(1+\rho[n]_q)^2} \sum_{m=3}^{\infty} |a_m|(m-1)^2(m-2) \left( m + \frac{2}{1-q} \right). \end{aligned}$$

**定理 1.2** 设  $0 < q < 1, R > 1, D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}, f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$  且  $\rho > 0$ , 若  $f$  不是一个次数小于等于 1 的多项式, 那么对任意  $r \in [1, R)$ , 有

$$\|M_{n,q}^\rho(f) - f\|_r \geq \frac{\rho+1}{2(1+\rho[n]_q)} C_{r,\rho}(f), n \in \mathbb{N},$$

其中  $\|f\|_r = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$ , 常数  $C_{r,\rho}(f)$  依赖于  $f, r, \rho$ , 但与  $n$  无关.

下面给出算子在复空间的等价定理.

**定理 1.3** 设  $0 < q < 1, f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$ , 使  $R > 1, D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ , 且  $\rho > 0$ , 若  $f$  不是一个次数小于等于 1 的多项式, 那么对任意  $r \in [1, R)$ , 有

$$\|M_{n,q}^\rho(f) - f\|_r \sim \frac{\rho+1}{1+\rho[n]_q}, n \in \mathbb{N},$$

其中  $\|f\|_r = \max\{|f(z)|; |z| \leq r\}$ .

**定理 1.4** 设  $0 < q < 1, D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}, f: D_R \rightarrow \mathbb{C}$ , 在  $D_R$  中是解析的, 若  $f$  不是一个次数为 1 的多项式, 那么对任意  $r \in [1, R)$ , 有

$$\|M_{n,q}^{\rho(p)}(f) - f^{(p)}\|_r \sim \frac{\rho+1}{1+\rho[n]_q}, n \in \mathbb{N},$$

其中等价中的常数取决于  $f, r, r_1, p$ , 但与  $n$  无关.

## 2 相关引理

为了证明上述定理, 先给出一些引理.

**引理 2.1**<sup>[9]</sup> 设  $f: \overline{D_R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 且  $f \in H(D_R)$ ,  $1 < R, 1 < r < R, \rho > 0, 0 < q < 1, |z| \leq r$ ,  $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$  有

$$\left| M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z) - \frac{(\rho+1)z(1-z)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(z) \right| \leq \frac{(\rho+1)M_r(f)}{(1+\rho[n]_q)^2},$$

其中  $M_r(f) = \frac{1}{2}r^2(1+r)^2 \sum_{m=3}^{\infty} |a_m| \left\{ (m-1)^3 \left[ m(3\rho+1) + \left( \frac{4}{1-q} - 6 \right) \rho \right] \right\} r^{m-4}$ .

**引理 2.2**<sup>[12]</sup> 解析函数  $f(z)$  的导数仍为解析函数, 它的  $n$  阶导数为

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

其中  $C$  为  $f(z)$  解析区域  $D_R$  内围绕  $z_0$  的任何一条正向简单曲线, 且它的内部全含  $D_R$ .

**引理 2.3**<sup>[9]</sup> 设  $f: \overline{D_R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 且  $f \in H(D_R)$ ,  $1 < r < R, \rho > 0, 0 < q < 1, |z| \leq r, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$  有

$$|M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z)| \leq \frac{(\rho+1)r(1+r)}{2(1+\rho[n]_q)} \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1) r^{m-2}.$$

**引理 2.4**(同时逼近) 设  $f: \overline{D_R} \rightarrow \mathbb{C}$ , 且  $f \in H(D_R)$ , 对任意固定  $1 \leq r < r_1 < R, \rho > 0, 0 < q < 1, |z| \leq r, m \in \mathbb{N}^*, n, p \in \mathbb{N}$ , 有

$$|M_{n,q}^{\rho(p)}(f; z) - f^{(p)}(z)| \leq \frac{(\rho+1)C_{r_1}(f)}{1+\rho[n]_q} \frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}},$$

其中  $C_{r_1}(f) = \frac{1}{2}r(1+r) \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1) r^{m-2}$ .

**证** 定义  $T$  是圆心为  $O$ , 半径为  $r_1 > r$  的圆, 对所有  $|z| \leq r$  和  $v \in T$  有  $|v-z| \geq r_1-r$ , 由引理 2.3, 对于任意的  $|z| \leq r, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$  有

$$\begin{aligned} |M_{n,q}^{\rho(p)}(f; z) - f^{(p)}(z)| &\leq \frac{p!}{2\pi} \left| \int_T \frac{M_{n,q}^\rho(f; v) - f(v)}{(v-z)^{p+1}} dv \right| \\ &\leq \frac{(\rho+1)r(1+r)}{2(1+\rho[n]_q)} \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1) r^{m-2} \frac{p!}{2\pi} \frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{p+1}} \\ &:= \frac{(\rho+1)C_{r_1}(f)}{1+\rho[n]_q} \frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}}, \end{aligned}$$

其中

$$C_{r_1}(f) = \frac{1}{2}r(1+r) \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1) r^{m-2}.$$

## 3 定理的证明

定理 1.1 的证明

令  $E_{n,m}(z) = M_{n,q}^\rho(e_m; z) - z^m - \frac{(\rho+1)m(m-1)}{2(1+\rho[n]_q)} z^{m-1}(1-z)$ , 其中  $E_{n,m}(z)$  是次数小于等于  $m$  的多项式.

由参考文献 [9] 可得等式

$$M_{n,q}^\rho(e_m; z) - z^m = \frac{\rho z(1-z)}{m-1+\rho[n]_q} D_q(M_{n,q}^\rho(e_{m-1}; z)) \\ + \frac{m-1+\rho[n]_q z}{m-1+\rho[n]_q} (M_{n,q}^\rho(e_{m-1}; z) - z^{m-1}) + \frac{m-1}{m-1+\rho[n]_q} (1-z)z^{m-1},$$

又因

$$D_q E_{n,m-1}(z) = D_q(M_{n,q}^\rho(e_{m-1}; z)) - [m-1]_q z^{m-2} - \frac{(\rho+1)(m-1)(m-2)[m-2]_q}{2(1+\rho[n]_q)} z^{m-3} \\ + \frac{(\rho+1)(m-1)(m-2)[m-1]_q}{2(1+\rho[n]_q)} z^{m-2},$$

则

$$E_{n,m}(z) \\ = \frac{\rho z(1-z)}{m-1+\rho[n]_q} D_q(M_{n,q}^\rho(e_{m-1}; z)) + \frac{m-1+\rho[n]_q z}{m-1+\rho[n]_q} (M_{n,q}^\rho(e_{m-1}; z) - z^{m-1}) \\ + \frac{m-1}{m-1+\rho[n]_q} (1-z)z^{m-1} - \frac{(\rho+1)m(m-1)}{2(1+\rho[n]_q)} z^{m-1}(1-z) \\ = \frac{\rho z(1-z)}{m-1+\rho[n]_q} D_q E_{n,m-1}(z) + \frac{\rho z(1-z)}{m-1+\rho[n]_q} \left[ [m-1]_q z^{m-2} + \frac{(\rho+1)(m-1)(m-2)[m-2]_q}{2(1+\rho[n]_q)} z^{m-3} \right. \\ \left. - \frac{(\rho+1)(m-1)(m-2)[m-1]_q}{2(1+\rho[n]_q)} z^{m-2} \right] \\ + \frac{m-1+\rho[n]_q z}{m-1+\rho[n]_q} E_{n,m-1}(z) + \frac{m-1+\rho[n]_q z}{m-1+\rho[n]_q} \frac{(\rho+1)(m-1)(m-2)}{2(1+\rho[n]_q)} z^{m-2}(1-z) \\ + \frac{m-1}{m-1+\rho[n]_q} (1-z)z^{m-1} - \frac{(\rho+1)m(m-1)}{2(1+\rho[n]_q)} (1-z)z^{m-1} \\ = \frac{\rho z(1-z)}{m-1+\rho[n]_q} D_q E_{n,m-1}(z) + \frac{m-1+\rho[n]_q z}{m-1+\rho[n]_q} E_{n,m-1}(z) \\ + \frac{(1-z)z^{m-2}}{2(1+\rho[n]_q)(m-1+\rho[n]_q)} \{ 2(1+\rho[n]_q)\rho z[m-1]_q + \rho(1+\rho)(m-1)(m-2)[m-2]_q \\ - \rho z(1+\rho)(m-1)(m-2)[m-1]_q + (m-1+\rho[n]_q z)(\rho+1)(m-1)(m-2) \\ + 2(1+\rho[n]_q)(m-1)z - (m-1+\rho[n]_q)(\rho+1)m(m-1)z \}.$$

从而得

$$E_{n,m}(z) = \frac{\rho z(1-z)}{m-1+\rho[n]_q} D_q E_{n,m-1}(z) + \frac{m-1+\rho[n]_q z}{m-1+\rho[n]_q} E_{n,m-1}(z) + R_{n,m}(z), \quad (1)$$

其中

$$R_{n,m}(z) = \frac{(1-z)z^{m-2}}{2(1+\rho[n]_q)(m-1+\rho[n]_q)} \{(\rho+1)(m-1)(m-2)[\rho(m-2)]_q + (m-1) \\ - z[\rho(m-1)]_q[(\rho+1)(m-1)(m-2)-2] + (m-1)[(\rho+1)(m-1)m-2] \\ + 2\rho^2[n]_q(m-1-[m-1]_q)\}.$$

由公式 (1) 且  $m \geq 2$  可得

$$|E_{n,m}(z)| \leq \frac{|z(1-z)|}{m-1+\rho[n]_q} |D_q E_{n,m-1}(z)| + |E_{n,m-1}(z)| + |R_{n,m}(z)| \\ \leq \frac{|z(1-z)|}{1+\rho[n]_q} |D_q E_{n,m-1}(z)| + |E_{n,m-1}(z)| + |R_{n,m}(z)|.$$

现研究  $m \geq 2$  时  $|D_q E_{n,m-1}(z)|$  的情况, 由于  $E_{n,m-1}(z)$  是次数小于等于  $m-1$  的多项式, 则有

$$|D_q E_{n,m-1}(z)| \\ \leq (m-1) \|E_{n,m-1}(z)\|_1 \\ \leq (m-1) \left( \|M_{n,q}^\rho(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z)\|_1 + \left\| \frac{(\rho+1)(m-1)(m-2)}{2(1+\rho[n]_q)} e_{m-2}(1-e_1) \right\|_1 \right) \\ \leq (m-1) \left( \frac{2(\rho+1)}{2(1+\rho[n]_q)} m(m-1) + \frac{2(\rho+1)(m-1)(m-2)}{2(1+\rho[n]_q)} \right) \\ = \frac{(\rho+1)(m-1)^2 m + (\rho+1)(m-1)^2 (m-2)}{1+\rho[n]_q} \\ \leq \frac{2(\rho+1)(m-1)^2 m}{1+\rho[n]_q}.$$

又因  $0 < q < 1, m \geq 2$  时, 有  $[m-1]_q \leq m-1$ , 且由已知  $|z| \leq 1$ , 得

$$|R_{n,m}(z)| \\ \leq \frac{|z(1-z)|}{2(1+\rho[n]_q)(m-1+\rho[n]_q)} \{(\rho+1)(m-1)(m-2)[\rho(m-2)]_q + (m-1) \\ + \rho(m-1)[(\rho+1)(m-1)(m-2)-2] + (m-1)[(\rho+1)(m-1)m-2] \\ + 2\rho^2[n]_q(m-1-(m-1))\} \\ \leq \frac{|z(1-z)|}{2(1+\rho[n]_q)^2} \left\{ (\rho+1)(m-1)(m-1)[\rho(m-2)]_q + (m-1) \right. \\ \left. + \rho(m-1)[(\rho+1)(m-1)(m-2)] + (m-1)[(\rho+1)(m-1)m] + 2\rho^2 \frac{1}{1-q} 2(m-1) \right\} \\ \leq \frac{|z(1-z)|}{2(1+\rho[n]_q)^2} \left\{ (\rho+1)(m-1)^2 \left[ 2\rho(m-2) + (m-1) + m + \frac{4\rho}{1-q} \right] \right\} \\ \leq \frac{|z(1-z)|}{(1+\rho[n]_q)^2} (\rho+1)(m-1)^2 \left[ \rho \left( m-2 + \frac{2}{1-q} \right) + m \right].$$

最后有

$$\begin{aligned}
 |E_{n,m}(z)| &\leq |E_{n,m-1}(z)| + \frac{|z(1-z)|}{1+\rho[n]_q} \frac{2(\rho+1)(m-1)^2 m}{1+\rho[n]_q} \\
 &\quad + \frac{|z(1-z)|}{(1+\rho[n]_q)^2} (\rho+1)(m-1)^2 \left[ \rho \left( m-2 + \frac{2}{1-q} \right) + m \right] \\
 &= |E_{n,m-1}(z)| + \frac{|z(1-z)|}{(1+\rho[n]_q)^2} (\rho+1)(m-1)^2 \left[ 3m + \rho(m-2) + \frac{2\rho}{1-q} \right] \\
 &\leq |E_{n,m-1}(z)| + \frac{|z(1-z)|}{(1+\rho[n]_q)^2} (\rho+1)(m-1)^2 \left[ m(\rho+3) + \frac{2\rho}{1-q} \right] \\
 &\leq |E_{n,m-1}(z)| + \frac{|z(1-z)|}{(1+\rho[n]_q)^2} (\rho+1)(m-1)^2 (\rho+3) \left( m + \frac{2}{1-q} \right),
 \end{aligned}$$

又因  $E_{n,0}(z) = E_{n,1}(z) = E_{n,2}(z) = 0$ , 则由  $m = 3, 4, 5, \dots$  逐步推导可得

$$\begin{aligned}
 |E_{n,m}(z)| &\leq \frac{|z(1-z)|(\rho+1)(\rho+3)}{(1+\rho[n]_q)^2} \sum_{j=3}^m (j-1)^2 \left( j + \frac{2}{1-q} \right) \\
 &\leq \frac{|z(1-z)|(\rho+1)(\rho+3)}{(1+\rho[n]_q)^2} (m-1)^2 \left( m + \frac{2}{1-q} \right) (m-2),
 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
 &\left| M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z) - \frac{(\rho+1)z(1-z)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(z) \right| \\
 &\leq \sum_{m=3}^{\infty} |a_m| |E_{n,m}(z)| \\
 &\leq \frac{(\rho+1)(\rho+3)|z(1-z)|}{(1+\rho[n]_q)^2} \sum_{m=3}^{\infty} |a_m| (m-1)^2 (m-2) \left( m + \frac{2}{1-q} \right).
 \end{aligned}$$

定理 1.2 的证明

对所有  $z \in D_R, n \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned}
 &M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z) \\
 &= \frac{\rho+1}{2(1+\rho[n]_q)} \left\{ z(1-z)f''(z) + \frac{2(1+\rho[n]_q)}{\rho+1} \left( M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z) - \frac{(\rho+1)z(1-z)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(z) \right) \right\},
 \end{aligned}$$

由  $\|F+G\|_r \geq \|F\|_r - \|G\|_r \geq \|F\|_r - \|G\|_r$  可得

$$\begin{aligned}
 &\|M_{n,q}^\rho(f) - f\|_r \\
 &\geq \frac{\rho+1}{2(1+\rho[n]_q)} \left\{ \|e_1(1-e_1)f''\|_r - \frac{2(1+\rho[n]_q)}{\rho+1} \left\| M_{n,q}^\rho(f) - f - \frac{(\rho+1)e_1(1-e_1)}{2(1+\rho[n]_q)} f'' \right\|_r \right\},
 \end{aligned}$$

其中  $\|f\|_r = \max\{|f(z)|; |z| \leq r\}$ . 由假设知,  $f$  不是一个在  $D_R$  上次数小于等于 1 的多项式, 即  $\|e_1(1-e_1)f''\|_r > 0$ , 若相反, 则对所有  $z \in \overline{D_R}$ , 有  $z(1-z)f''(z) = 0$ , 显然可以得出  $f''(z) = 0$ , 即  $f$  是次数小于等于 1 的多项式, 与假设矛盾.

由引理 2.1 有

$$\frac{2(1 + \rho[n]_q)}{\rho + 1} \left| M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z) - \frac{(\rho + 1)z(1 - z)}{2(1 + \rho[n]_q)} f''(z) \right| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

存在  $n_1$  (仅依赖于  $f$  和  $r$ ), 当  $n \geq n_1$  时有

$$\|e_1(1 - e_1)f''\|_r - \frac{2(1 + \rho[n]_q)}{\rho + 1} \left\| M_{n,q}^\rho(f) - f - \frac{(\rho + 1)e_1(1 - e_1)}{2(1 + \rho[n]_q)} f'' \right\|_r \geq \frac{1}{2} \|e_1(1 - e_1)f''\|_r,$$

则

$$\|M_{n,q}^\rho(f) - f\|_r \geq \frac{\rho + 1}{2(1 + \rho[n]_q)} \frac{1}{2} \|e_1(1 - e_1)f''\|_r.$$

当  $1 \leq n \leq n_1 - 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \|M_{n,q}^\rho(f) - f\|_r &\geq \frac{\rho + 1}{2(1 + \rho[n]_q)} \left( \frac{2(1 + \rho[n]_q)}{\rho + 1} \|M_{n,q}(f) - f\|_r \right) \\ &:= \frac{\rho + 1}{2(1 + \rho[n]_q)} T_{r,n,q}^\rho(f) \\ &> 0. \end{aligned}$$

最后有

$$\|M_{n,q}^\rho(f) - f\|_r \geq \frac{\rho + 1}{2(1 + \rho[n]_q)} C_{r,\rho}(f),$$

对所有  $n$ , 有  $C_{r,\rho}(f) = \min \{T_{r,1,q}^\rho(f), \dots, T_{r,n-1,q}^\rho(f), \frac{1}{2} \|e_1(1 - e_1)f''\|_r\}$ .

定理 1.3 的证明

结合定理 1.2 和文 [9] 中的不等式

$$|M_{n,q}^\rho(f, z) - f(z)| \leq \frac{\rho + 1}{1 + \rho[n]_q} C_r(f),$$

其中,  $C_r(f) = \frac{1}{2} r(1 + r) \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1) r^{m-2}$ , 即可得证.

定理 1.4 的证明

定义  $T$  是圆心为  $O$ , 半径为  $r_1 > r \geq 1$  的圆, 对所有  $|z| \leq r$  和  $v \in T$  有  $|v - z| \geq r_1 - r$ .

由引理 2.4, 对任意  $|z| \leq r, m \in \mathbb{N}^*, n, p \in \mathbb{N}$ , 有

$$\begin{aligned} \|M_{n,q}^{\rho(p)}(f) - f^{(p)}\|_r &\leq \frac{(\rho + 1)r(1 + r)}{2(1 + \rho[n]_q)} \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1) r^{m-2} \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \\ &:= \frac{(\rho + 1)p! r_1}{(1 + \rho[n]_q)(r_1 - r)^{p+1}} C_{r_1}(f). \end{aligned}$$

下面证明  $\|M_{n,q}^{\rho(p)}(f) - f^{(p)}\|_r$  的下限估计, 根据定理 1.2 的证明, 对所有  $v \in T$  和  $n, p \in \mathbb{N}$  有

$$\begin{aligned} &M_{n,q}^\rho(f; z) - f(z) \\ &= \frac{\rho + 1}{2(1 + \rho[n]_q)} \left\{ v(1 - v)f''(v) + \frac{2(1 + \rho[n]_q)}{\rho + 1} \left( M_{n,q}^\rho(f; v) - f(v) - \frac{(\rho + 1)v(1 - v)}{2(1 + \rho[n]_q)} f''(v) \right) \right\}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} M_{n,q}^{\rho(p)}(f; z) - f^{(p)}(z) &= \frac{\rho + 1}{2(1 + \rho[n]_q)} \left\{ \frac{p!}{2\pi i} \int_T \frac{v(1-v)}{(v-z)^{p+1}} f''(v) dv \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1 + \rho[n]_q)}{\rho + 1} \frac{p!}{2\pi i} \int_T \frac{M_{n,q}^\rho(f; v) - f(v) - \frac{(\rho+1)v(1-v)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(v)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\} \\ &= \frac{\rho + 1}{2(1 + \rho[n]_q)} \left\{ [z(1-z)f''(z)]^{(p)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1 + \rho[n]_q)}{\rho + 1} \frac{p!}{2\pi i} \int_T \frac{M_{n,q}^\rho(f; v) - f(v) - \frac{(\rho+1)v(1-v)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(v)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\}. \end{aligned}$$

现对  $\|\cdot\|_r$  进行研究,

$$\begin{aligned} \|M_{n,q}^{\rho(p)}(f) - f^{(p)}\|_r &\geq \frac{1}{2(1 + \rho[n]_q)} \left\{ \| [e_1(1 - e_1)f'']^{(p)} \|_r \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(1 + \rho[n]_q)}{\rho + 1} \left\| \frac{p!}{2\pi} \int_T \frac{M_{n,q}^\rho(f; v) - f(v) - \frac{(\rho+1)v(1-v)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(v)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r \right\}, \end{aligned}$$

由引理 2.1 得

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{p!}{2\pi} \int_T \frac{M_{n,q}^\rho(f; v) - f(v) - \frac{(\rho+1)v(1-v)}{2(1+\rho[n]_q)} f''(v)}{(v-z)^{p+1}} dv \right\|_r \\ &\leq \frac{p!}{2\pi} \frac{2\pi r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \left\| M_{n,q}^\rho(f) - f - \frac{(\rho + 1)e_1(1 - e_1)}{2(1 + \rho[n]_q)} f'' \right\|_{r_1} \\ &\leq \frac{p!r_1 M_{r_1}(f)}{(r_1 - r)^{p+1}}. \end{aligned}$$

根据  $f$  的假设, 有  $\| [e_1(1 - e_1)f'']^{(p)} \|_r > 0$ , 反之,  $z(1-z)f''(z)$  是次数  $\leq p-1$  的多项式.

若  $p=1$ , 则  $z(1-z)f''(z) = C$ , 即  $f''(z) = \frac{C}{z(1-z)} (|z| \leq r, r \geq 1)$ , 但  $f''(z)$  在  $|z| \leq r$  上解析, 所以  $C=0$ , 即  $f$  是次数  $\leq 1 = \max\{1, p-1\}$  的多项式, 矛盾.

若  $p=2$ , 则  $z(1-z)f''(z) = Az + B$ , 即  $f''(z) = \frac{Az+B}{z(1-z)} (|z| \leq r)$ , 但  $f''(z)$  在  $|z| \leq r$  上解析, 所以  $A=B=0$ , 即  $f$  是次数  $\leq 1 = \max\{1, p-1\}$  的多项式, 矛盾.

若  $p \geq 3$ , 则  $z(1-z)f''(z) = U_{p-1}(z)$ ,  $U_{p-1}(z)$  是一个次数  $\leq p-1$  的多项式, 即  $f''(z) = \frac{U_{p-1}(z)}{z(1-z)} (|z| \leq r)$ , 但  $f''(z)$  在  $|z| \leq r$  上解析, 所以  $U_{p-1}(z) = z(1-z)Q_{p-3}(z)$ ,  $Q_{p-3}(z)$  是一个次数  $\leq p-3$  的多项式, 因此  $f''(z) = Q_{p-3}(z)$ , 即  $f$  是次数  $\leq p-1 = \max\{1, p-1\}$  的多项式, 矛盾.

综上所述,  $\| [e_1(1 - e_1)f'']^{(p)} \|_r > 0$ , 按照定理 1.2 的方法继续推理即可得出结论.

## 参 考 文 献

- [1] Kac V, Cheung P. Quantum calculus[M]. New York: Springer, 2002.

- [2] Gal S G, Gupta V, Verma D K, et al. Approximation by complex Baskakov-Stancu operators in compact disks[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2012, 61(2): 153–165.
- [3] Gupta V. Approximation by complex Szász-Durrmeyer operators in compact disks[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34(4): 1157–1165.
- [4] Anastassiou G A, Gal S G. Approximation by complex Bernstein - Schurer and Kantorovich - Schurer polynomials in compact disks[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 58(4): 734–743.
- [5] Phillips G M. A generalization of the Bernstein polynomials based on the  $q$ -integers[J]. The ANZIAM Journal, 2000, 42(1): 79–86.
- [6] Gupta V, Wang H. The rate of convergence of  $q$ -Durrmeyer operators for  $0 < q < 1$  [J]. Mathematical methods in the Applied Sciences, 2008, 31(16): 1946–1955.
- [7] Agarwal R P, Gupta V. On  $q$ -analogue of a complex summation-integral type operators in compact disks[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012(1): 1–13.
- [8] Mahmudov N I. Approximation by Bernstein-Durrmeyer-type operators in compact disks [J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24(7): 1231–1238.
- [9] 闫丽新. 几类  $q$ -算子在紧圆盘逼近问题的研究 [D]. 内蒙古自治区: 内蒙古民族大学, 2024
- [10] Ren M Y, Zeng X M. Approximation by a kind of complex modified  $q$ -Durrmeyer type operators in compact disks[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012(1): 1–14.
- [11] 任美英.  $q$ -Bernstein-Durrmeyer 型算子的逼近性质 [J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(5): 107–112.
- [12] 杨阔, 张小琴, 宋永. 复变函数中一个重要积分不等式的应用 [J]. 吉林省教育学院学报 (下旬), 2013, 29(8): 153–154.

## EQUIVALENCE OF COMPLEX APPROXIMATION BY $q$ -BERNSTEIN-DURRMEYER OPERATOR IN COMPACT DISKS( $0 < q < 1$ )

JIA Yi-xin, HAN Ling-xiong

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Minzu University, Tongliao 028000, China)

**Abstract:** This paper studies the relevant properties of the complex  $q$ -Bernstein-Durrmeyer type operators in the compact disk. By using the higher-order Cauchy integral formula, Taylor expansion and Bernstein inequality, the simultaneous approximation of the operator in the compact disk and the Voronovskaja-type theorem on the closed unit disk were obtained, and the equivalence theorem of the  $q$ -Bernstein-Durrmeyer type operator for analytic functions in the compact disk was given. The results show that the  $q$ -Bernstein-Durrmeyer type operator extends the approximation property from real space to complex space.

**Keywords:**  $q$ -Bernstein-Durrmeyer operator; Equivalence theorem; Voronovskaja type results

**2010 MR Subject Classification:** 41A17; 41A27; 41A35