Vol. 45 (2025)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

球面上具有临界指数的 $p-Dirac$ 方程解的存在性与多解性

刘 盈 [1], 杨 旭 [1,2]

(1. 云南师范大学 (数学学院), 云南 昆明 650500)
(2. 云南省现代分析数学及其应用重点实验室, 云南 昆明 650500)

摘 要: 设 D 是 Dirac 算子, $u: S^N \to \Sigma S^N$ 是一个旋量. 本文研究了具有临界指数的 p-Dirac 方程

$$D_p u = |u|^{p^*-2}u + f(u) \tag{0.1}$$

解的存在性和多解性. 首先, 因为方程 (0.1) 含有临界增长的非线性项, 使得 Sobolev 嵌入失去紧性, 所以本文利用球面 S^N 上一个等距子群的作用, 适当缩小所考虑的函数空间, 使得 Sobolev 嵌入重新获得紧性; 然后, 利用山路定理证明方程 (0.1) 存在一个弱解; 最后, 利用双正交系理论对函数空间进行分解, 结合喷泉定理证明方程 (0.1) 的多解性.

关键词: $p-Dirac$ 方程; 山路定理; 喷泉定理; 群作用

MR(2010) **主题分类号**: 58E05; 53C27; 58J05 **中图分类号**: O175.25

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2025)03-0249-12

1 引言

Dirac 方程是用来描述电子运动的基本模型, 近似的刻画了自旋粒子的运动. 随着几何与拓扑的发展, Atiyah 和 Singer 给出了紧 spin 流形上整体定义的 Dirac 算子. 设 (M, g) 为具有 spin 结构的紧致无边的黎曼流形, ΣM 为 M 上复 spinor 丛, Dirac 算子是一阶椭圆微分算子 $D: C^\infty(M, \Sigma M) \to C^\infty(M, \Sigma M)$, 局部上可表示为: $Du = \sum_{i=1}^m e_i \cdot \nabla_{e_i} u$, 其中 $u \in C^\infty(M, \Sigma M)$, $\{e_i\}_{i=1}^m$ 是切丛 TM 上的局部正交标架, ∇ 是旋量丛 ΣM 上诱导的 Levi-Civita 联络. 关于 spin 几何的详细内容, 可以参阅 [1]. 在文献 [2] 中, Nolder 和 Ryan 在紧 spin 流形上首次引入了 p-Dirac 算子和 p-Harmonic 截面, 建立了这些算子的共形协方差, 得到了在球面 S^N 上 p-Dirac 方程和 p-Harmonic 方程解的存在性. 在文献 [3] 中, Nolder 给出了形式为 $DA(x, Du) = 0$ 的非线性 A-Dirac 方程的解, 其中 A-Dirac 方程可看作是 A-Harmonic 型椭圆方程 $divA(x, \nabla u) = 0$ 的非线性推广, 而 p-Dirac 算子是 A-Dirac 算子的一个特殊情形. 但是, 关于具有临界指数的拟线性 Dirac 方程解的存在性和多解性, 目前还没有结果. 因此, 本文研究了球面上具有临界指数的 p-Dirac 方程解的存在性和多解性.

假设 (S^N, g_0) 是标准球面 $(N \geq 3)$,$D_p u := D|Du|^{p-2}Du$ 是 p-Dirac 算子 $(1 < p < N)$. $f: \Sigma S^N \to \Sigma S^N$ 是保纤维映射, 且具有一个 $u-$ 位势, 即存在实值函数 $F: \Sigma S^N \to \mathbb{R}$, 使得

*收稿日期: 2024-08-30 接收日期: 2024-09-23
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11801499).
作者简介: 刘盈 (1999–), 女, 贵州纳雍, 研究生, 主要研究方向: 非线性泛函分析.
E-mail: 15628058734@163.com.
通讯作者: 杨旭 (1984–), 男, 云南大理, 副教授, 主要研究方向: 非线性泛函分析.
E-mail: yangxu@ynnu.edu.cn.

$F_u = f$. 下面考虑非线性 p-Dirac 方程

$$D_p u = |u|^{p^*-2}u + f(u), \tag{1.1}$$

其中 $p^* = \frac{Np}{N-p}$. 则方程 (1.1) 的弱解是如下能量泛函

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{S^N}\langle D_p u, u\rangle dvol_g - \frac{1}{p^*}\int_{S^N}|u|^{p^*}dvol_g - \int_{S^N}F(u)dvol_g \tag{1.2}$$

的临界点, 其中 $dvol_g$ 是 (S^N, g) 上的黎曼体积测度, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 ΣS^N 上与度量相容的埃米特内积.

由 Schrödinger-Lichnerowicz 公式可知, 紧 spin 流形上 Dirac 算子 D 和 Laplace-Beltrami 算子 $\triangle$ 的关系为

$$D^2 = \triangle + \frac{S}{4},$$

其中 S 是紧 spin 流形的数量曲率. 因此, 当 $p = 2, f(u) = 0$ 时, 方程 (1.1) 简化为

$$\triangle u + \frac{S}{4}u = |u|^{p^*-2}u,$$

此方程可以看作是紧 spin 流形上的 Yamabe 方程 [4].

关于紧 spin 流形上具有临界非线性 Dirac 方程的研究, 已有丰富的结果, 参考 [5–9] 等, 其中 Ammann [5, 6] 研究了如下具有临界非线性 Dirac 方程解的存在性

$$D\psi = \lambda|\psi|^{\frac{2}{m-1}}\psi, \tag{1.3}$$

Maalaoui[8] 利用球面 S^N 上一个等距子群的作用, 研究了临界非线性 Dirac 方程的解的存在性. 但是目前关于 p-Dirac 方程的研究很少, 只有 Pan 和 Bao [10] 在欧式空间中的有界区域上, 证明了非临界 p-Dirac 方程具有一列不减的正的特征值序列的存在性. 基于上述的研究结果, 本文研究球面上具有临界指数的 p-Dirac 方程解的存在性与多解性, 通过借鉴 p-Laplace 方程的研究方法和技巧, 主要克服了两点困难: 第一点, 由于非线性项的临界增长使得嵌入定理失紧, 导致无法使用通常的方法证明 Palais-Smale 条件成立, 因此利用球面具有较好的对称性和群作用, 克服临界增长的非线性项带来的失紧性; 第二点, 对于多解性的研究, 其困难在于空间 $W^{1,p}_{G_k}(S^N, \Sigma S^N)$ 不是一个 Hilbert 空间, 且目前尚不清楚 p-Dirac 算子谱的性质, 不能利用谱分解函数空间, 为此, 我们利用了可分 Banach 空间上的双正交系理论, 获得了 p-Dirac 方程的多解性.

关于实值函数 $F : \Sigma S^N \to \mathbb{R}$, 有以下假设:

$(F1)$ 存在 $q \in (p, p^*)$, 使得对任意的 $u : S^N \to \Sigma S^N$, 有 $|F_u(u)| \le C(1 + |u|^{q-1})$, 其中 $p^* = Np/(N-p)$, $1 < p < N$.

$(F2)$ 存在 $R > 0, \mu > p$, 对任意的 $u : S^N \to \Sigma S^N$, 使得当 $|u| \ge R$ 时, 有 $0 < \mu F(u) \le \langle u, f(u)\rangle$.

$(F3)$ 当 $|u| \to 0$ 时, $F(u) = o(|u|^p)$.

$(F4)$ 对任意的 $u : S^N \to \Sigma S^N$, 有 $F(u) = F(-u)$.

此外, 为了表达简便, 本文中用到的常数 C 均表示大于零的某个常数.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 $F(u)$ 满足条件 $(F_1)-(F_3)$, 那么在 $W^{1,p}_{G_k}(S^N,\Sigma S^N)$ 中方程 (1.1) 存在一个弱解 .

定理 1.2 假设 $F(u)$ 满足条件 $(F_1)-(F_4)$, 那么方程 (1.1) 存在一列弱解 $\{u_k\}\subset W^{1,p}_{G_k}(S^N,\Sigma S^N)$, 且当 $k\to\infty$ 时, $I(u_k)\to\infty$.

2 变分框架

设光滑旋量 $u\in C^\infty(S^N,\Sigma S^N)$ 的范数定义为

$$\|u\|=(\int_{S^N}|Du|^p dvol_g)^{\frac{1}{p}},$$

u 关于此范数的完备化空间是 Sobolev 空间 $W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$.

据条件 $(F1)$, 易证 (1.2) 式泛函 $I\in\mathcal{C}^1(E,R)$, 且对任意的 $\xi\in W^{1,p}(\Sigma S^N)$, 泛函 I 在 u 处的 $Gateaux$ 导数为

$$\langle I'(u),\xi\rangle=\int_{S^N}[Re\langle D_pu,\xi\rangle-Re\langle|u|^{p^*-2}u,\xi\rangle-Re\langle f(u),\xi\rangle]dvol_g$$

其中 $Re\,\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示取埃米特内积的实部, 为了书写方便, 本文中的 $Re\,\langle\cdot,\cdot\rangle$, 均简记成 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

因此, p-Dirac 方程 (1.1) 的弱解是如下泛函

$$\begin{aligned}I(u)&=\frac{1}{p}\int_{S^N}\langle D_pu,u\rangle dvol_g-\frac{1}{p^*}\int_{S^N}\langle|u|^{p^*-2}u,u\rangle dvol_g-\int_{S^N}F(u)dvol_g\\&=\frac{1}{p}\int_{S^N}|Du|^p dvol_g-\frac{1}{p^*}\int_{S^N}|u|^{p^*}dvol_g-\int_{S^N}F(u)dvol_g\end{aligned}$$

的临界点.

由于连续嵌入 $W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)$ 不是紧的, 能量泛函 $I(u)$ 不满足 Palais-Smale 紧性条件. 容易证明 S^N 的等距变换群是正交群 $O(N+1)$, 它是维数为 $\frac{N(N+1)}{2}$ 的紧李群. 下面利用紧李群 $O(N+1)$ 的子群在球面 S^N 上的作用, 使 Sobolev 空间重新获得紧性.

定义群 $G:=O(N_1)\times O(N_2)\subset O(N+1)$ 在 S^N 上的作用为: 对任意的 $(x,y)\in R^{N_1}\times R^{N_2}$, $g=(g_1,g_2)\in G$ 有

$$g\cdot(x,y)=(g_1x,g_2y),$$

其中 $N_1\geq N_2\geq 2, N_1+N_2=N+1$. 根据

$$S^N\xrightarrow{id}R^{N+1}\xrightarrow{G}R^{N+1},$$

群作用 G 可以提升到 S^N 上, 且是等距群 $O(N+1)$ 的子群. 在文献 [11] 中, 利用这个群作用证明了变号 Yamabe 问题存在无穷多解. 在文献 [12] 中, 把球面 S^N 看作是 R^{N+1} 的一个子流形, 旋量丛 ΣS^N 是 ΣR^{N+1} 的子流形, 从而把等距子群 $G=O(N_1)\times O(N_2)$ 的作用提升到 ΣS^N 上. 从而空间 $C^\infty(S^N,\Sigma S^N)$ 中的元素在等距子群 G 作用下不变的元素构成的空间记为 $C^\infty_G(S^N,\Sigma S^N)$, 即

$$C^\infty_G(S^N,\Sigma S^N):=\{u\in C^\infty(S^N,\Sigma S^N)\,:\,\widetilde{g}\cdot u(x)=u(g\cdot x)=u(x)\,,\,\forall g\in G\,,\,x\in S^N\},$$

其中 G 中的元素 g 作用于 S^N , $\widetilde{g}$ 是 g 在 ΣS^N 上的提升. 为了简便, 我们将用 $g\cdot u$ 代替 $\widetilde{g}\cdot u$.

类似的, 定义旋量空间 $L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 和 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)$ 分别为

$$L^q_G(S^N,\Sigma S^N):=\{u\in L^q(\Sigma S^N)\,:\,\widetilde{g}\cdot u(x)=u(g\cdot x)=u(x)\,,\,\forall g\in G\,,\,x\in S^N\},$$

$$W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N):=\{u\in W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)\,:\,\widetilde{g}\cdot u(x)=u(g\cdot x)=u(x)\,,\,\forall g\in G\,,\,x\in S^N\},$$

该空间上的范数分别定义为

$$\|u\|_q=(\int_{S^N}|u|^q dvol_g)^{\frac{1}{q}}$$

和

$$\|u\|=(\int_{S^N}|Du|^p dvol_g)^{\frac{1}{p}}.$$

据 [14,Lemma5.4] 可知, 空间 $C^\infty_G(S^N,\Sigma S^N)$ 在 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)$ 中是稠密的.

能量泛函 I 在 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)$ 上的限制, 记为 $I\mid_{W^{1,p}_G}$, 据对称临界点原理 [13] 可知 $I\mid_{W^{1,p}_G}$ 的临界点也是 I 在 $W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 中的临界点. 为了简便, 下文中 $I\mid_{W^{1,p}_G}$ 仍记为 I.

3 紧嵌入定理和 Palais-Smale 条件

首先, 证明紧嵌入定理, 如下:

定理 3.1 (i) 如果 $N_1>p$, 那么对任意的实数 $1\le q\le p^*_G$, 嵌入 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是连续的, 当 $1\le q<p^*_G$ 时, 连续嵌入 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是紧的, 其中 $p^*_G=\frac{N_1p}{N_1-p}$.

(ii) 如果 $N_1\le p$, 那么对任意的实数 $1\le q$, $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是连续紧嵌入.

特别地, 对任意的 $p\ge 1$, $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^{p^*}_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是连续紧嵌入, 其中 $p^*=\frac{Np}{N-p}$.

证 由于 $k=\min_{x\in S^N}\dim O^x_G=\min\{N_1,N_2\}-1$, 其中 O^x_G 为点 x 在群 G 作用下的轨道, 据 $N_1\ge N_2$ 可得 $k=N_2-1$, 因此 $N-k=N-N_2+1=N_1$, 从而 $p^*_G=\frac{N_1p}{N_1-p}$. 据 [14,Theorem5.6(2)] 可知: 如果 $N_1>p$, 那么对任意实数 $1\le q\le p^*_G$, 嵌入 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是连续的; 如果 $N_1\le p$, 那么对任意的实数 $1\le q$, $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是连续的.

然后, 利用 $Arzel\grave{a}-Ascoli$ 定理即可证明连续嵌入 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是紧的.

显然 $p^*=\frac{Np}{N-p}<p^*_G=\frac{N_1p}{N_1-p}$, 据上述讨论可知: 对任意的 $p\ge 1$, $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^{p^*}_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是连续紧嵌入, 其中 $p^*=\frac{Np}{N-p}$. 证毕.

下面, 基于文献 [8] 的启发, 利用集中紧性原理 [15] 给出了一种新的方法, 重新证明定理 3.1 中: 连续嵌入 $W^{1,p}_G(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q_G(S^N,\Sigma S^N)$ 是紧的.

引理 3.2 [15] (集中紧性原理) 设 $\{u_n\}$ 是 $W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 中的有界序列, $p\in[1,N)$. 假设 u_n 在 $W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 中弱收敛于 u, 且 $|u|^{p^*}$ 弱收敛到测度 ν. 那么存在 $x_i\in S^N$ 和 $\nu_i\ge 0$, 使得

$$\nu=|u|^{p^*}+\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\delta_{x_i},\quad \sum_{i=1}^{\infty}\nu_i^{\frac{p}{p^*}}<\infty.$$

命题 对任意的 $p\geq 1$, 连续嵌入 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L_G^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)$ 是紧的, 其中 $p^*=\frac{Np}{N-p}$.

证 设 $\{u_n\}$ 是 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 中的有界序列, 根据 Sobolev 嵌入定理知, 序列 $\{u_n\}$ 在 $L_G^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)$ 中有界. 因此由 $W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 和 $L_G^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)$ 中的有界集的弱紧性可得: 存在有界测度 ν, 函数 u 和 $\{u_n\}$ 的子序列, 仍记为 $\{u_n\}$, 满足 u_n 在 $W^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 中弱收敛于 u, 且 $|u|^{p^*}$ 弱收敛到测度 ν. 根据引理 3.2 可得

$$\nu=|u|^{p^*}+\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\delta_{x_i}.$$

由 $|u|^{p^*}$ 弱收敛到测度 ν 可知, 对任意的 $\phi\in L^\infty(R^n)\cap C(R^n)$, 有

$$\int_{S^N}\phi|u_n|^{p^*}dvol_g\ \to\ \int_{S^N}\phi d\nu,$$

取 $\phi\equiv 1$, 得

$$\int_{S^N}|u_n|^{p^*}dvol_g\to\int_{S^N}|u|^{p^*}dvol_g+\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i. \tag{3.1}$$

但是对于任意的 $g\in G_k$, 有

$$|g\cdot u_n|^{p^*}\rightharpoonup|g\cdot u|^{p^*}+\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\delta_{gx_i}.$$

且由于 u_n 和 u 在 G 的作用下是等变的, 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\delta_{gx_i}=\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i\delta_{x_i},$$

即 $\sum_{i=1}^{\infty}\nu_i(\delta_{gx_i}-\delta_{x_i})=0$.

由 G 的连续作用可得 $\delta_{gx_i}-\delta_{x_i}\neq 0$, 所以 $\nu_i=0,\ i=1,2,\cdots$. 因此据 (3.1) 可知

$$\int_{S^N}|u_n|^{p^*}dvol_g\to\int_{S^N}|u|^{p^*}dvol_g,$$

即 $\{u_n\}$ 在 $L_G^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)$ 中强收敛. 命题得证.

其次, 证明能量泛函 I 满足 Palais-Smale c- 条件, 以下简称 $(PS)_c$ 条件. 在证明定理之前, 先给出相关的概念和引理, 如下：

定义 3.3 称 $I(u)$ 满足 $(PS)_c$ 条件是指: 若 $\{u_n\}\subset E$, 且

$$I(u_n)\to c,\quad I'(u_n)\to 0,$$

则 $\{u_n\}$ 必有收敛子列.

引理 3.4 [16] 令 $x,y\in R^N$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 R^N 中的内积. 则

$$\langle|x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y,x-y\rangle\ \geq\ \begin{cases}c_p|x-y|^p, & p\geq 2,\\ c_p\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & 1<p<2.\end{cases}$$

注 由于本文中的内积均指实内积 $Re\langle\cdot,\cdot\rangle$, 所以该不等式在本文中同样成立.

定理 3.5 假设 F 满足条件 $(F1)-(F3)$, 则泛函 I 在 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 上满足 $(PS)_c$ 条件.

证 设 $\{u_n\}\subset W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 是一个 $(PS)_c$ 序列, 即当 $n\to\infty$ 时, 有

$$I(u_n)\to c, \tag{3.2}$$

和

$$\|I'(u_n)\|_*\to 0. \tag{3.3}$$

首先证明 $\{u_n\}\subset W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 是有界的.

据 (3.3) 式, 对充分大的 n, 以及任意的 $\varphi\in W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$, 有

$$\langle I'(u_n),\varphi\rangle=\int_{S^N}[\langle D_pu_n,\varphi\rangle-\langle|u_n|^{p^*-2}u_n,\varphi\rangle-\langle f(u_n),\varphi\rangle]dvol_g=o(1)\|\varphi\|. \tag{3.4}$$

由 (3.2) 式和 (3.4) 式知

$$\begin{array}{rcl} C_1+o(1)\|u_n\| & \geq & pI(u_n)-\langle I'(u_n),u_n\rangle \\ & = & \frac{p}{N}\int_{S^N}|u_n|^{p^*}dvol_g+\int_{S^N}(\langle f(u_n),u_n\rangle-pF(x,u_n))dvol_g \\ & = & \frac{p}{N}\int_{S^N}|u_n|^{p^*}dvol_g+\int_{S_1^N}(\langle f(u_n),u_n\rangle-pF(u_n))dvol_g \\ & + & \int_{S_2^N}(\langle f(u_n),u_n\rangle-pF(u_n))dvol_g \end{array} \tag{3.5}$$

其中 $S_1^N=\{x\in\Sigma S^N:|u_n(x)|\geq R_1\}$, $S_2^N=\{x\in\Sigma S^N:|u_n(x)|<R_1\}$.
根据条件 $(F1)$ 知, 当 $|u_n(x)|<R_1$ 时, 有

$$\langle F(u_n),u_n\rangle-F(u_n)\ \geq\ -C_2.$$

再根据条件 $(F2)$, 当 $|u_n(x)|\geq R_1$ 时, 有

$$\langle f(u_n),u_n\rangle-pF(u_n)\geq(\mu-p)F(u_n)>0.$$

因此, 据 (3.5) 式, 可得

$$\frac{p}{N}\int_{S^N}|u_n|^{p^*}dvol_g\leq C_1+C_2+o(1)\|u_n\|, \tag{3.6}$$

故当 n 充分大时, 有

$$\|u_n\|_{p^*}^{p^*}\leq C+o(1)\|u_n\|. \tag{3.7}$$

另一方面, 据 (3.4), (3.7) 式, 条件 $(F1)$ 和嵌入定理可得

$$\begin{array}{rcl} \|u_n\|^p & = & \int_{S^N}|\,Du_n\,|^p\ dvol_g\leq\int_{S^N}|u_n|^{p^*}dvol_g+\int_{S^N}|\langle F(u_n),u_n\rangle\,|\ dvol_g+o(1)\|u_n\| \\ & \leq & \|u_n\|_{p^*}^{p^*}+\int_{S^N}C(1+|u_n|^{q-1})\,|\,u_n\,|\ dvol_g+o(1)\|u_n\| \\ & \leq & C+o(1)\|u_n\|+\int_{S^N}C\,|\,u_n\,|\ dvol_g+\int_{S^N}C|u_n|^q dvol_g \\ & \leq & C+o(1)\|u_n\|+C\|u_n\|+C\|u_n\|_{p^*}^q \\ & \leq & C+o(1)\|u_n\|+C\|u_n\|+Co(1)\|u_n\|^{\frac{q}{p^*}}. \end{array} \tag{3.8}$$

因为 $p>1, p<q<p^*$, 所以 $\{u_n\}$ 是 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 中的有界序列.

下面证明 $(PS)_c$ 序列 $\{u_n\}$ 具有强收敛的子列.

由 $\{u_n\}$ 的有界性, 据定理 3.1 知: 存在子序列, 不妨记为 $\{u_n\}$, 使得在 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 中 $u_n \rightharpoonup u$, 在 $L_G^r(S^N,\Sigma S^N)$ 中 $u_n \to u$, 且 $u_n \to u$ 几乎处处于 S^N 中, 其中 $1\le r\le p^*$.

据 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}&\int_{S^N}\langle D_pu_n-D_pu,u_n-u\rangle dvol_g=\int_{S^N}\langle |u_n|^{p^*-2}u_n-|u|^{p^*-2}u,u_n-u\rangle dvol_g\\&+\int_{S^N}\langle F(u_n)-f(u),u_n-u\rangle dvol_g+o(1)\|u_n-u\|,\end{aligned}\tag{3.9}$$

利用 Hölder 不等式得

$$\left|\int_{S^N}\langle |u_n|^{p^*-2}u_n-|u|^{p^*-2}u,u_n-u\rangle dvol_g\right|\le (\| u_n\|_{p^*}^{p^*-1}+\| u\|_{p^*}^{p^*-1})\| u_n-u\|_{p^*}=o(1),\tag{3.10}$$

据条件 $(F1)$, 利用 Hölder 不等式得

$$\left|\int_{S^N}\langle F(u_n)-f(u),u_n-u\rangle dvol_g\right|\le\| u_n-u\|_1+\| u_n\|_q^{q-1}\| u_n-u\|_q=o(1),\tag{3.11}$$

因此, 据 (3.9), (3.10), (3.11) 可得

$$\int_{S^N}\langle D_pu_n-D_pu,u_n-u\rangle dvol_g=o(1).\tag{3.12}$$

然后, 利用引理 3.4, 可得:

当 $p\ge 2$ 时, 有

$$c_p\int_{S^N}|D(u_n-u)|^p dvol_g\le\int_{S^N}\langle D_pu_n-D_pu,u_n-u\rangle dvol_g\ =\ o(1).$$

当 $1<p<2$ 时, 利用 $H\ddot{o}lder$ 不等式有

$$\begin{aligned}&c_p\int_{S^N}|D(u_n-u)|^p dvol_g\\\le\ &c_p\Big[\int_{S^N}\Big(\frac{|D(u_n-u)|}{(|Du_n|+|Du|)^{\frac{p(2-p)}{2}}}\Big)^{\frac{2}{p}}dvol_g\Big]^{\frac{p}{2}}\Big[\int_{S^N}(|Du_n|+|Du|)^{\frac{p(2-p)}{2}\cdot\frac{2}{2-p}}dvol_g\Big]^{\frac{2-p}{2}}\\\le\ &c_p\Big(\int_{S^N}\frac{|D(u_n-u)|^2}{(|Du_n|+|Du|)^{2-p}}dvol_g\Big)^{\frac{p}{2}}\Big(\int_{S^N}(|Du_n|+|Du|)^p dvol_g\Big)^{\frac{2-p}{2}}\\\le\ &C\Big(\int_{S^N}\langle D_pu_n-D_pu,u_n-u\rangle dvol_g\Big)^{\frac{p}{2}}\\=\ &o(1).\end{aligned}$$

综上, 当 $n\to\infty$ 时, $\|u_n-u\|\to 0$, 即定理 3.5 证毕.

4 主要定理的证明

下面给出定理 1.1 和定理 1.2 的证明.

4.1 定理 1.1 的证明

下面利用山路定理, 证明定理 1.1. 为此, 先给出山路定理, 如下:

定理 4.1 (**山路定理**) 设 E 是 Banach 空间, $I \in \mathcal{C}^1(E, R)$, $I(0) = 0$ 且满足条件:

(i) 存在 $r, \rho > 0$ 使得当 $u \in S_r = \{u \in E : \|u\| = r\}$ 时, $I(u) \geq \rho$.

(ii) 存在 $e \in E$ 使得当 $\|e\| > r$ 时, $I(e) \leq 0$.

令

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

其中 $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. 则 I 存在一个 $(PS)_c$ 序列. 进一步, 若 I 满足 $(PS)_c$ 条件, 则 c 是 I 的临界值, 即存在 $z \in E$, 使得 $I(z) = c$ 及 $I'(z) = 0$.

引理 4.2 存在 $r, \rho > 0$, 使得当 $u \in S_r = \{u \in W^{1,p}_G(S^N, \Sigma S^N) : \|u\| = r\}$ 时, $I(u) \geq \rho$.

证 根据条件 $(F1)$ 和 $(F3)$ 知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $C(\varepsilon) > 0$, 使得

$$|F(u)| < \varepsilon|u|^p + C(\varepsilon)|u|^q. \tag{4.1}$$

于是, 由 $Sobolev$ 嵌入定理和 $H\ddot{o}lder$ 不等式有

$$\begin{aligned} I(u) &= \tfrac{1}{p}\int_{S^N}\langle D_p u, u\rangle dvol_g - \tfrac{1}{p^*}\int_{S^N}\langle |u|^{p^*-2}u, u\rangle dvol_g - \int_{S^N} F(x,u)dvol_g \\ &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|^p - \tfrac{1}{p^*}\|u\|^{p^*}_{p^*} - \varepsilon\|u\|^p_p - C(\varepsilon)\|u\|^q_q \\ &\geq \tfrac{1}{p}\|u\|^p - C_3\tfrac{1}{p^*}\|u\|^{p^*} - C_4\varepsilon\|u\|^p - C_5C(\varepsilon)\|u\|^q \\ &= \|u\|^p(\tfrac{1}{p} - C_3\tfrac{1}{p^*}\|u\|^{p^*-p} - C_4\varepsilon - C_5C(\varepsilon)\|u\|^{q-p}) \\ &\geq \|u\|^p(\tfrac{1}{2p} - C_6\|u\|^{q-p}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $\varepsilon < \frac{1}{2pC_4}$, $C_6 = C_3\frac{1}{p^*} + C_5C(\varepsilon)$, 且取充分小的 $\|u\| = r < (\frac{1}{4pC_6})^{\frac{1}{q-p}}$, 得到

$$I(u) \geq \frac{r^p}{4p} > 0.$$

取 $\rho = \frac{r^p}{4p}$ 即可. 引理得证.

引理 4.3 存在 $e \in E$, $\|e\| > r$ 使得 $I(e) \leq 0$.

证 根据条件 $(F2)$ 知, 存在常数 $C_7, C_8 > 0$, 使得

$$F(u) \geq C_7|u|^\mu - C_8. \tag{4.3}$$

取 $e \in E$, $e \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} I(te) &= \tfrac{1}{p}t^p\int_{S^N}|De|^p dvol_g - \tfrac{1}{p^*}t^{p^*}\int_{S^N}|e|^{p^*}dvol_g - \int_{S^N} F(x,te)dvol_g \\ &\leq \tfrac{1}{p}t^p\int_{S^N}|De|^p dvol_g - \tfrac{1}{p^*}t^{p^*}\int_{S^N}|e|^{p^*}dvol_g - C_7t^\mu\int_{S^N}|e|^\mu dvol_g + C_8|S^N| \\ &\leq \tfrac{1}{p}t^pC_9\|e\|^p - C_{10}\tfrac{1}{p^*}t^{p^*}\|e\|^{p^*} - C_{11}C_7t^\mu\|e\|^\mu + C_8|S^N|. \end{aligned}$$

因为 $p^* > p, \mu > p$, 所以当 $t \to +\infty$ 时, $I(te) \to -\infty$. 故必存在 t_0, 使得 $I(t_0e) \leq 0$ 成立, 且 $\|t_0e\| > r$.

定理 1.1 的证明 据引理 4.2 , 引理 4.3 可知: 山路定理 4.1 的条件 $(i), (ii)$ 成立. 另外, 据定理 3.5, 可知泛函 I 在 $W^{1,p}_G(S^N, \Sigma S^N)$ 上满足 $(PS)_c$ 条件. 因此, 据山路定理可得定理 1.1 成立.

4.2 定理 1.2 的证明

下面利用双正交系理论和喷泉定理来证明定理 1.2.

首先引入双正交系理论, 参考 ([17], p.42-43), 如下:

定义 4.4 [17] 设 E 是一个 Banach 空间. E^* 是 E 的对偶空间. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是 E 和 E^* 中的序列. 如果 $x_m^*(x_n)=\delta_n^m$, 则称 (x_n,x_n^*) 是双正交系. 如果存在序列 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset E^*$ 使得 (x_n,x_n^*) 是双正交系, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E$ 是极小的.

定义 4.5 [17] 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 中的极小系, 如果对所有的 n, $x^*(x_n)=0$ 蕴含 $x^*=0$, 则称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是基本的; 设 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E^* 中的极小系, 如果对所有的 n, $x_n^*(x)=0$ 蕴含 $x=0$, 则称 $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ 是完全的.

引理 4.6 [17] 设 E 是可分的 Banach 空间. 那么 E 有一个基本的极小系, 且它的双正交泛函是完全的.

引理 4.7 [16] 设 E_0 是 Banach 空间, E 是可分的 Banach 空间, $[x_1^*,\cdots,x_n^*]_\perp:=\{x|x\in E, x_1^*(x)=\cdots=x_n^*(x)=0\}$, E 紧嵌入于 E_0. 设 $\beta_n=\inf_{x\in K_n}\|x\|_E$, 其中 $K_n=\{x\mid x\in E,\ \|x\|_{E_0}=1,\ x\in[x_1^*,\cdots,x_n^*]_\perp\}$. 则对任意的 $x\in[x_1^*,\cdots,x_n^*]_\perp$, 有 $\|x\|_{E_0}\le\beta_n^{-1}\|x\|_E$, 且当 $n\to\infty$ 时, $\beta_n\to\infty$.

证 用反证法. 若 β_n 有界, 则存在一列 $\{x_n\}$, 使 $\|x_n\|_{E_0}=1$, $x_n\in[x_1^*,\cdots,x_n^*]_\perp$, 而 $\|x_n\|_E\le C$. 因为 E 是自反的, 故存在子列, 仍记为 $\{x_n\}$, 使 $x_n\rightharpoonup x$, 在E中. 因为 E 是紧嵌入于 E_0, 有 $x_n\to x$, 在E_0中. 由 Mazur 定理知, 若 $x_n\rightharpoonup x$ 则必有 $\sum\limits_{j=n}^{k_n}\alpha_j^{(n)}x_j\to x$, 在$E$中. 其中 $\alpha_j^{(n)}\ge 0$, $\sum\limits_{j=n}^{k_n}\alpha_j^{(n)}=1, \forall n\in N^+$. 因而, 对任意的 i 有

$$x_i^*(x)=\lim_{n\to\infty}x_i^*(\sum_{j=n}^{k_n}\alpha_j^{(n)}x_j)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=n}^{k_n}\alpha_j^{(n)}x_i^*(x_j)=0.$$

因为 $\{x_n^*\}$ 是完全的, 故 $x=0$, 但是 $\|x_n\|_{E_0}=1$, 而 $x_n\to x$ 在 E_0 中, 故 $\|x\|_{E_0}=1$. 这就得到矛盾. 引理 4.7 证毕.

其次, 给出喷泉定理, 如下: 假设 X 是一个以 $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ 为基的 Banach 空间, 即 $X=\overline{\bigoplus_{j=1}^{\infty}e_j}$, 取 $Y_k=\bigoplus_{j=1}^{k}e_j$, $Z_k=\overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty}e_j}$.

定理 4.8[18] (**喷泉定理**) 设 $X=Y_k+Z_k$, I 满足 $(PS)_c$ 条件, $I\in\mathcal{C}^1(X,R)$ 是一个偶泛函. 如果对每一个 k, 存在 $\rho_k>r_k>0$ 使得

(i) $a_k:=\max\{I(u)\bigm| u\in Y_k,\ \|u\|=\rho_k\}\le 0$.

(ii) 当 $k\to\infty$ 时, $b_k:=\inf\{I(u)\bigm| u\in Z_k,\ \|u\|=r_k\}\to+\infty$.

则 I 有无界的临界值序列.

根据双正交系理论, 由于 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 是可分的 Banach 空间, 特别地, 取 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 的 *Schauder* 基, 据引理 4.6 可得: 存在一个双正交系 (u_n,u_n^*), 其中 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}\subset W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$, $\{u_n^*\}_{n=1}^{\infty}\subset(W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N))^*$ 且 $\|u_n\|=1$. 此外, $\{u_n^*\}$ 关于 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 是完全的双正交泛函, 即

$$\{u\bigm| u\in W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N),\ (u_n^*,u)=0,\ n=1,2,\cdots\}=\{0\}.$$

记

$$Y_k=span\{u_1,u_2,\cdots,u_k\},\quad Z_k=\overline{span\{u_k,u_{k+1},u_{k+2},\cdots\}},$$

且
$$[u_1^*,\ u_2^*,\ \cdots,\ u_{k-1}^*]_\perp=\{u\in E\mid\ u_1^*(u)\ =\ \cdots=\ u_{k-1}^*(u)=\ 0\}.$$
显然,
$$W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)=Y_k+Z_k,\ \ Z_k\subset[u_1^*,\ u_2^*,\ \cdots,\ u_{k-1}^*]_\perp.$$

首先证明喷泉定理中的条件 (i) 成立.

引理 4.9 存在 $\rho_k>0$, 使得对任意的 $u\in Y_k$, $\|u\|\geq\rho_k$, 有 $I(u)\leq 0$.

证 据 (4.2) 式有
$$\begin{aligned}I(u)&=\tfrac{1}{p}\textstyle\int_{S^N}|Du|^pdvol_g-\tfrac{1}{p^*}\int_{S^N}|u|^{p^*}dvol_g-\int_{S^N}F(u)dvol_g\\&\leq\tfrac{1}{p}\|u\|^p-\tfrac{1}{p^*}\|u\|_{p^*}^{p^*}-C_7\|u\|_\mu^\mu+C_8|S^N|.\end{aligned}$$

因为 $dim(Y_k)=k<\infty$, 据有限维空间上所有的范数是等价的, 所以存在 $C_1(k),C_2(k)>0$, 使得
$$\|u\|_{p^*}^{p^*}\geq C_1(k)\|u\|^{p^*},\ \|u\|_\mu^\mu\geq C_2(k)\|u\|^\mu$$
从而,
$$I(u)\ \leq\ \frac{1}{p}\|u\|^p-C_1(k)\frac{1}{p^*}\|u\|^{p^*}-C_7C_2(k)\|u\|^\mu+C_8|S^N|.$$
由于 $p^*>p,\mu>p$, 因此存在足够大的 $\rho_k>0$, 当 $u\in Y_k$, $\|u\|\geq\rho_k$ 时, 有
$$\begin{aligned}I(u)&\leq\tfrac{1}{p}{\rho_k}^p-C_1(k)\tfrac{1}{p^*}\rho_k^{p^*}-C_7C_2(k)\rho_k^\mu+C_8|S^N|\\&\leq 0.\end{aligned}$$

引理 4.9 证毕.

引理 4.10 存在 $r(m)>0$, 使得当 $m\to\infty$ 时, 有
$$b_k=\inf\{I(u)\ \big|\ u\in Z_k,\ \|u\|=r(m)\}\to+\infty.$$

证 据 (4.2) 式和 $L^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)\hookrightarrow L^q(S^N,\Sigma S^N)$ 可知:
$$\begin{aligned}I(u)&\geq\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{1}{p^*}\|u\|_{p^*}^{p^*}-\varepsilon\|u\|_p^p-C(\varepsilon)\|u\|_q^q\\&\geq\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{1}{p^*}\|u\|_{p^*}^{p^*}-\varepsilon\|u\|_p^p-C_9C(\varepsilon)\|u\|_{p^*}^q.\end{aligned}\tag{4.4}$$

令 $\beta_k=\inf_{u\in Z_k}\|u\|$, 对每一个 $u\in Z_k$, 由于 $W_G^{1,p}(S^N,\Sigma S^N)$ 嵌入 $L^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)$ 是紧的, 因此把 $L^{p^*}(S^N,\Sigma S^N)$ 看作引理 4.7 中的 E_0, 据引理 4.7, 从 (4.4) 式可得
$$I(u)\geq\frac{1}{p}\|u\|^p-\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*}\|u\|^{p^*}-\varepsilon\beta_k^{-p}\|u\|^p-C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q}\|u\|^q,\tag{4.5}$$

对足够大的 k, 使得 $\varepsilon\beta_k^{-p}\leq\frac{1}{2p}$, 且令 $\|u\|:=r(k)>1$, 据 (4.5) 式和 $q<p^*$ 可得
$$\begin{aligned}I(u)&\geq\frac{1}{2p}r(k)^p-\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*}r(k)^{p^*}-C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q}r(k)^q\\&\geq\frac{1}{2p}r(k)^p-\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*}r(k)^{p^*}-C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q}r(k)^{p^*}\\&\geq\frac{1}{2p}r(k)^p-[\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*}+C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q}]r(k)^{p^*}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

因为函数

$$r(k) \mapsto \frac{1}{2p}r(k)^p - [\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*} + C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q}]r(k)^{p^*}$$

在 $r(k) = [2p^*(\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*} + C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q})]^{\frac{1}{p-p^*}}$ 处取得最大值

$$\frac{p^*-p}{2pp^*}([2p^*(\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*} + C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q})]^{\frac{p}{p-p^*}}).$$

因此, 据引理 4.7 和 $p < p^*$ 可知: 当 $k \to \infty$ 时, 有

$$b_k = \inf_{\substack{u\in Z_k\\ \|u\|=r(k)}} I(u) \geq \frac{p^*-p}{2pp^*}([2p^*(\frac{1}{p^*}\beta_k^{-p^*} + C_9C(\varepsilon)\beta_k^{-q})]^{\frac{p}{p-p^*}} \to +\infty.$$

证毕.

定理 1.2 的证明 显然, 泛函 I 是一个偶泛函. 取足够大的 $\rho(k)$, 使得对每个 k, 有 $\rho(k) > r(k)$.

$$B_k := \{u \in Y_k : \|u\| \leq \rho_k\},$$

令

$$\Gamma_k := \{\gamma \in \mathcal{C}(B_k, W_G^{1,p}(S^N, \Sigma S^N)) : \gamma(u) = \gamma(-u), \gamma\big|_{\partial B_k} = id\},$$

$$c_k := \inf_{\gamma\in\Gamma_k}\max_{u\in B_k} I(\gamma(u)).$$

据定理 3.5, 引理 4.9, 以及引理 4.10 可知: 存在一个序列 $\{u_n\} \subset W_G^{1,p}(S^N, \Sigma S^N)$ 满足

$$I(u_n) \to c_k\ , \qquad I'(u_n) \to 0,$$

其中 c_k 是 I 的临界值, 当 $k \to \infty$ 时, $c_k \geq b_k$, $b_k \to +\infty$, 则定理 1.2 证毕.

参 考 文 献

[1] Lawson H B, Michelson M L. Spin geometry[M]. Princeton: Princeton University Press, 1989.

[2] Nolder C A, Ryan J. p-Dirac operators[J]. Advances in applied Clifford algebras, 2009, 19(2): 391–402.

[3] Nolder C A. Nonlinear A-Dirac equations[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2011, 21(2): 429–440.

[4] Yamabe H. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds[J]. Osaka Math J, 1960, 12(1): 21–37.

[5] Ammann B. A variational problem in conformal spin geometry[M]. Habilitationsschift:Universität Hamburg, 2003.

[6] Ammann B. The smallest Dirac eigenvalue in a spin-conformal class and cmc-immersions[J]. Communications in Analysis and Geometry, 2009, 17(3): 429–479.

[7] Isobe T. Nonlinear Dirac equations with critical nonlinearities on compact spin manifolds[J]. Journal of Functional Analysis, 2010, 260(1): 253–307.

[8] Maalaoui A. Infinitely many solutions for the spinorial Yamabe problem on the round sphere[J]. Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 2016, 23(3): 1–14.

[9] Bartsch T, Xu T. A spinorial analogue of the Brezis-Nirenberg theorem involving the critical Sobolev exponent[J]. Journal of Functional Analysis, 2021, 280(12): 108991.

[10] Pan L, Bao G. On an eigenvalue problem involving Dirac operator[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2015, 25(2): 415–424.

[11] Ding W Y. On a conformally invariant elliptic equation on R^n[J]. Communications in Mathematical Physics, 1986, 107(2): 331–335.

[12] Chichilnisky G. Group actions on spin manifolds[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1972, 172: 307–315.

[13] Palais R. The principle of symmetric criticality[J]. Communications in Mathematical Physics, 2004, 69(1): 19–30.

[14] Hebey E. Sobolev spaces in the presence of symmetries[J]. Springer Berlin, 1996, (1635): 90–105.

[15] Lions P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1[J]. Revista matem á tica iberoamericana, 1985, 1(1): 145–201.

[16] 沈尧天, 王友军, 李周欣. 拟线性椭圆型方程的现代变分方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[17] Lindenstrauss J, Tzafriri L. Classical Banach Spaces I[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[18] Willem M. Minmax theorems[M]. Boston: Birkhauser, 1996.

EXISTENCE AND MULTIPLICITY OF SOLUTIONS FOR THE P-DIRAC EQUATION WITH CRITICAL EXPONENT ON A SPHERE

LIU Ying[1], YANG Xu[1,2]

(1. School of Mathematics (Yunnan Normal University), Kunming 650500, China)

(2. Yunnan Key Laboratory of Modern Analytical Mathematics and Applications, Kunming 650500, China)

Abstract: Assuming that D is the Dirac operator and $u : S^N \to \Sigma S^N$ is a spinor. This article investigates existence and multiplicity of solutions about the $p-Dirac$ equation with critical exponent

$$D_p u = |u|^{p^*-2}u + f(u). \tag{0.1}$$

Firstly, because equation (0.1) contains a critical growth nonlinear term, the Sobolev embedding loses its compactness. Therefore, in this paper we utilize the action of an isometry subgroup on the sphere S^N to appropriately reduce the considered function space, so that the Sobolev embedding regains compactness; then, using the Mountain Road Theorem, we prove the existence of a weak solution to equation (0.1) ; finally, the function space is decomposed using the theory of orthogonal systems, and the multiple solutions of equation (0.1) are proved by combining the Fountain theorem.

Keywords: P-Dirac equation; mountain road theorem; fountain theorem; group action

2010 MR Subject Classification: 58E05; 53C27; 58J05.