

半线性随机偏微分方程组的齐次化问题

孙子健, 马飞遥

(宁波大学数学与统计学院, 浙江 宁波 315211)

摘要: 本文研究了定义在 $\mathbf{R}_+ \times [0, 1]^d$ 上具有高频振荡随机位势, 带齐次 Neumann 边界条件的半线性抛物型随机偏微分方程组 (SPDEs) 的齐次化问题, 其中 $d = 1, 2$ 或 3 , 利用正则结构理论, 主要结论是方程组的解将依概率收敛到一个确定性抛物型 PDEs 的解.

关键词: 半线性抛物型 SPDEs; 高频振荡; 齐次化问题; 正则结构

MR(2010) 主题分类号: 60H15; 60H40

中图分类号: O211.63

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2025)03-0225-09

1 介绍

随机偏微分方程的齐次化问题自提出以来发展迅速, 例如 Goudey 等人在文献 [1] 中研究二阶椭圆方程的齐次化问题, Wang 等人在文献 [2] 中研究具有随机卷积势的热方程的齐次化问题. 特别地, 作者 Martin Hairer 和 Étienne Pardoux 在文献 [3] 中用正则结构理论得到了 $\mathbf{R}_+ \times [0, 1]^d$ 中具有高频振荡随机位势且带齐次 Dirichlet 边界条件或齐次 Neumann 边界条件的半线性抛物型偏微分方程的解会随着频率参数 $\varepsilon \rightarrow 0$ 依概率收敛到一个确定性方程的解, 该方法能够有效简化该类问题的证明. 本文考虑将该结果推广到方程组的情况.

具体地说, 考虑定义在 $\mathbf{R}_+ \times [0, 1]^d$ 上具有高频振荡的 SPDEs

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(t, x) = \Delta u + H_1(u_\varepsilon, v_\varepsilon) + G_1(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\eta_\varepsilon(t, x), \\ \partial_t v_\varepsilon(t, x) = \Delta v + H_2(u_\varepsilon, v_\varepsilon) + G_2(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\eta_\varepsilon(t, x), \\ u_\varepsilon(0, x) = u_0, v_\varepsilon(0, x) = v_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 $d = 1, 2$ 或 3 , $H_1, H_2 \in C^4$, $G_1, G_2 \in C^5$, 赋 Neumann 边界条件 $\langle n(x), \nabla u_\varepsilon(t, x) \rangle = 0$, $\langle n(x), \nabla v_\varepsilon(t, x) \rangle = 0$, n 表示垂直于边界的单位外法向量, 驱动噪声 $\eta_\varepsilon(t, x) = \varepsilon^{-1}\eta(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x)$, $\eta(t, x)$ 是一个平稳的高斯随机场.

定义常数

$$C_\varepsilon = \int P(z)\kappa_\varepsilon(0, z)dz, \quad (1.2)$$

其中 P 为热核, $\kappa_\varepsilon(0, z)$ 为高斯时空白噪声的协方差函数, 满足 $\int_{\mathbf{R}^{d+1}} \kappa_\varepsilon(0, z)dz = 1$

记 $H_i(u, v) + (D_1^1 G_i(u, v)G_1(u, v) + D_2^1 G_i(u, v)G_2(u, v))C_\varepsilon, i = 1, 2$, 有以下定理:

*收稿日期: 2024-07-12 接收日期: 2024-11-28

基金项目: 浙江省自然科学基金 (LY20A010010).

作者简介: 孙子健 (2000-), 男, 浙江绍兴, 研究生, 研究方向: 随机偏微分方程.

E-mail: sunzijian20000821@163.com.

通讯作者: 马飞遥 (1979-), 男, 副教授, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: mafeyao@nbu.edu.cn.

定理 1.1 令 $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ 为方程组 (1.1) 的解, u, v 为确定性偏微分方程组

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + H_{1,\eta}(u, v), \\ \partial_t v = \Delta v + H_{2,\eta}(u, v) \end{cases} \quad (1.3)$$

在 $[0, T] \times D$ 上的局部解, 其初始条件与边界条件与方程组 (1.1) 一致. 假设函数 $G, H: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ 分别为 C^5 和 C^4 函数, 且 T 小于 u, v 的可能爆破时间. 那么, 在 $[0, T] \times D$ 上, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ 依概率一致收敛于 u, v .

本文将在第二节中介绍正则结构的部分概念、模型与模型空间, 以及模型空间中的乘积、卷积等运算. 在第三节中我们开始证明定理, 构建合适的正则结构, 定义模型和模型空间, 将函数空间中的方程组提升到模型空间中求解, 利用重整化模型对模型空间中的不动点方程重整化, 最终对重整化模型求极限, 得到模型空间中的极限解, 再将其还原到函数空间.

2 正则结构理论

2.1 主要定义和定理

定义 2.1 一个正则结构 $\mathcal{T} = (A, T, G)$ 由以下三个元素组成:

- 指标集 $A \in \mathbf{R}$: $0 \in A$, A 有下界, 且 A 局部有限.
- 向量空间 T : $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$, 其中每个子空间 T_α 均为有限维 Banach 空间. $T_0 \approx \mathbf{R}$, 其单位向量记为“ $\mathbf{1}$ ”.
- 结构群 G : G 是作用在 T 上的线性算子群, 对 $\forall \Gamma \in G, \forall \alpha \in A, \forall a \in T_\alpha$, 有 $\Gamma a - a \in \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\beta$, 且 $\Gamma \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

在表示向量空间时, 记 $T_\alpha^- = \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\beta$, $T_\alpha^+ = \bigoplus_{\beta \geq \alpha} T_\beta$. 对于 $a \in T$, 用 $Q_\alpha a$ 或 $(a)_\alpha$ 表示其在 T_α 中的分量, 用 $\|a\|_\alpha$ 表示 $Q_\alpha a$ 的范数, a 在 T_α^- 上的投影记为 Q_α^- . 对于 $a \in T$, a 中 $\mathbf{1}$ 前的系数用 $\langle \mathbf{1}, a \rangle$ 表示.

定义 2.2 给定一个正则结构 $\mathcal{T} = (A, T, G)$ 和 $\alpha \leq 0$, 区 V 为 T 的可分的向量量子空间, 称区 V 的正则度为 α , 如果 V 是 T 的一个 G -不变子空间, 且有形式 $V = \bigoplus_{\beta \in A} V_\beta$ 使得 $V_\beta \subset T_\beta$, 同时对于 $\forall \beta < \alpha$, 有 $V_\beta = \{0\}$.

抽象多项式正则结构 $\bar{\mathcal{T}} = (\bar{A}, \bar{T}, \bar{G})$ 是经典的正则结构, 也是我们所需要构建的正则结构的重要部分:

确定 d 个抽象变量 X_1, \dots, X_d , 给定一个指标 $k = (k_1, \dots, k_d)$, 记 $X = X_1^{k_1} \dots X_d^{k_d}$ 为 T 中的单项式. 引入标度 $\mathfrak{s} = (\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_d) \in \mathbf{N}^d$, 其中 \mathfrak{s}_i 用来表示变量 X_i 的同质性 (例如在抛物型方程中, 时间同质性为 2, 空间同质性为 1). 对于抽象多项式 $X = X_1^{k_1} \dots X_d^{k_d}$, 称 $|k|_\mathfrak{s} = \sum_{i=1}^d \mathfrak{s}_i k_i$ 为该多项式的阶数.

基于上述概念构建抽象多项式正则结构 $\bar{\mathcal{T}} = (\bar{A}, \bar{T}, \bar{G})$, 其中指标集 $\bar{A} = \mathbf{N}$, 向量空间 $\bar{T} = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \bar{T}_n$ ($\bar{T}_n = \text{span}\{X^k : \|k\|_\mathfrak{s} = n\}$), 结构群 $\bar{G} = \{\Gamma_h | \Gamma_h X^k = (X + h)^k, h \in \mathbf{R}^d\}$.

基于尺度 \mathfrak{s} 给出两点间距离 $d_\mathfrak{s}(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^{\frac{1}{\mathfrak{s}_i}}$.

此外定义以下两个映射:

- 映射 $S_\mathfrak{s}^\delta: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$, 满足 $S_\mathfrak{s}^\delta(x_1, \dots, x_d) = (\delta^{-\mathfrak{s}_1} x_1, \dots, \delta^{-\mathfrak{s}_d} x_d)$.
 - 映射 $S_{\mathfrak{s}, x}^\delta: L_1(\mathbf{R}^d) \rightarrow L_1(\mathbf{R}^d)$, 满足 $(S_{\mathfrak{s}, x}^\delta \varphi)(y) = \delta^{-|\mathfrak{s}|} \varphi(S_\mathfrak{s}^\delta(y - x))$. 简记 $\varphi_x^\delta = S_{\mathfrak{s}, x}^\delta \varphi$.
- 为了明确当 α 为非整数时 C^α 的定义, 下面给出非整数指数的 Hölder 空间的定义.

定义 2.3 分布 $\eta \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ 被称为是 C^α 类的, 如果对任意紧集 $\mathfrak{K} \subset \mathbf{R}^d$, 都有

$$\langle \eta, \varphi_x^\delta \rangle \lesssim \delta^\alpha, \tag{2.1}$$

对于 $\delta \leq 1, x \in \mathfrak{K}, \varphi \in \mathcal{B}^{[-\alpha]+1}$ 一致成立, (2.1) 式中最佳比例常数记为 $\|\eta\|_{\alpha; \mathfrak{K}}$. 其中 $\varphi \in \mathcal{B}^r$ 表示测试函数 φ 在 $B(0, 1)$ 上支撑, $\|\varphi\|_{C^r} \leq 1$, 对于任意指标 $|k| < \alpha$ 满足 $\int \varphi(x)x^k dx = 0$.

根据定义 2.3, 得到噪声 $\eta(t, x)$ 的正则性为 $-\frac{d}{2} - 1 - \kappa$, 由 [4] 中广义函数尺度变换公式以及定义 2.3 得到 $\eta_\varepsilon(t, x)$ 的正则性为 $-1 - \kappa$, 即 $\eta_\varepsilon(t, x) \in C^{-1-\kappa}$.

定义 2.4 \mathbf{R}^d 上具有标度 \mathfrak{s} 的正则结构 \mathcal{T} 的模型 $Z = (\Pi, \Gamma)$ 由以下元素组成:

- 映射 $\Gamma: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \rightarrow G$, 使得对所有 $x, y, z \in \mathbf{R}^d$ 有 $\Gamma_{xy}\Gamma_{yz} = \Gamma_{xz}$.
 - 一组连续线性映射 $\Pi_x: T \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, 使得对所有 $x, y \in \mathbf{R}^d, \Pi_x = \Pi_y \circ \Gamma_{xy}$.
- 同时, 对任意的 $\gamma > 0$ 和紧集 $\mathfrak{K} \subset \mathbf{R}^d$, 有

$$\left| (\Pi_x a) \left(\mathcal{S}_{\mathfrak{s}, x}^\delta \varphi \right) \right| \lesssim \|a\|_l \delta^l, \quad \|\Gamma_{xy} a\|_m \lesssim \|a\|_l \|x - y\|_{\mathfrak{s}}^{l-m}, \tag{2.2}$$

在 $x, y \in \mathfrak{K}, \delta \in (0, 1], \varphi \in \mathcal{B}^r, l < \gamma, m < l, a \in T_l$ 上一致成立, 其中 r 是使得对 $\forall l \in A$, 满足 $l > -r$ 的最小整数. (2.3) 式中的最佳比例常数分别用 $\|\Pi\|_{\gamma; \mathfrak{K}}$ 和 $\|\Gamma\|_{\gamma; \mathfrak{K}}$ 表示.

在抽象多项式正则结构上定义的模型 $Z = (\Pi, \Gamma)$ 具有以下表达式:

$$(\Pi_x X^k)(y) = (y - x)^k, \Gamma_h X^k = (X + h)^k, \tag{2.3}$$

其中 $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^d, h = (h_1, \dots, h_d) \in \mathbf{R}^d$.

正则结构理论的一个核心概念是模型化分布, 即模型空间中的分布, 模型空间定义如下.

定义 2.5 令 V 为 T 的区, $Z = (\Pi, \Gamma)$ 为定义在正则结构 \mathcal{T} 上的模型. 那么, 对于 $\gamma \in \mathbf{R}^d$, 空间 $\mathcal{D}^\gamma(V; \Gamma)$ 由所有函数 $f: \mathbf{R}^d \rightarrow V_\gamma$ 组成, 使得对于每个紧集 $\mathfrak{K} \subset \mathbf{R}^d, l \in A$, 满足

$$\|f\|_{\gamma; \mathfrak{K}} = \sup_{\substack{x, y \in \mathfrak{K} \\ \|x - y\|_{\mathfrak{s}} \leq 1}} \sup_{l < \gamma} \frac{\|f(x) - \Gamma_{xy} f(y)\|_l}{\|x - y\|_{\mathfrak{s}}^{\gamma-l}} < \infty, \tag{2.4}$$

f 称为模型空间 $\mathcal{D}^\gamma(V; \Gamma)$ 中的模型分布.

我们可以记对于模型分布 $f \in \mathcal{D}^\gamma$, 模型 Π_x 将 f 还原为 \mathbf{R}^d 上相应分布 (或函数) 在 x 点处的值, 为了能将模型分布还原为函数空间中的分布 (或函数), 有以下定理.

定理 2.6 令 V 为正则度 α 的区, 令 $r = \lceil -\alpha + 1 \rceil$. 则对任意的 $\gamma > 0$, 存在一个连续的线性映射 $\mathcal{R}: \mathcal{D}^\gamma(V) \rightarrow C^\alpha$, 使得对任意的 $C > 0$, 有

$$\left| (\mathcal{R}f - \Pi_y f(y)) \left(\psi_x^\lambda \right) \right| \lesssim \lambda^\gamma \|f\|_{\gamma, \text{supp } \psi_x^\lambda} \tag{2.5}$$

在 $x \in \mathbf{R}^d$ 上局部一致成立, 在 $\psi \in \mathcal{B}^r, \lambda \in (0, 1], y \in \text{supp } \psi_x^\lambda$, 以及满足 $\|\Pi\|_{\gamma, B(x, 2)} \leq C$ 的模型上一致成立.

从 (2.6) 式中可以清楚地看出, 重构算子 \mathcal{R} 是局部的. 下面对 \mathcal{D}^γ 中的运算进行介绍.

定义 2.7 一个连续的双线性映射 $\star: T \times T \rightarrow T$ 称为乘积, 如果对任意的 $a \in T_\alpha, b \in T_\beta$, 有 $a \star b \in T_{\alpha+\beta}$, 且对任意的 $a \in T$, 有 $\mathbf{1} \star a = a \star \mathbf{1}$. 本文中产生的乘积将始终是结合的和交换的, 至少在一些足够大的子空间上是如此.

若对所有 $\Gamma \in G$ 和 $a \in V_\alpha, b \in W_\beta$, 都有 $(\Gamma a) \star (\Gamma b) = \Gamma(a \star b)$, 且满足 $\alpha + \beta < \gamma$, 则称一对区 (V, W) 关于乘积是 γ - 正则的. 一个区称为 γ - 正则的, 如果 (V, V) 是 γ - 正则的. 给定两个 T 值函数 f 和 \bar{f} , 用 $f \star_\gamma \bar{f}$ 表示函数 $x \rightarrow \mathcal{Q}_\gamma^-(f(x) \star \bar{f}(x))$.

根据定义的乘积, 可以定义光滑函数作用在模型分布上的结果:

对于 $\gamma > 0$, 一个正则性为 0 的区 V , 一个使得 $V \star V \subset V$ 的乘积, 以及一个光滑函数 $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 可以定义一个函数 $\hat{F}_\gamma: V^n \rightarrow V$, 满足

$$\hat{F}_\gamma(a) = \mathcal{Q}_\gamma^- \sum_k \frac{D^k F(\bar{a})}{k!} \tilde{a}^{\star k}, \quad (2.6)$$

其中对于所有可能的 n 维多指标 k 求和, 对于 $k \neq 0$, $\tilde{a}^{\star 0} = \mathbf{1}$, 记 $\bar{a} = \langle \mathbf{1}, a \rangle, \tilde{a} = a - \bar{a}$, $k! = k_1! \cdots k_n!$, $\tilde{a}^{\star k} = \tilde{a}_1^{\star k_1} \star \cdots \star \tilde{a}_n^{\star k_n}$.

在实际的使用中, 对函数 G 和 H 的光滑性要求可以降低. 根据 [5] 中的定理 4.16 和命题 6.13, 要使得 $f \in \mathcal{D}^\gamma(V)$ 与函数 $F \in C^\kappa$ 复合得到 $\mathcal{D}^\gamma(V)$ 中的模型分布 $\hat{F}_\gamma(f)$, 需要 $\kappa \geq \gamma/\zeta \vee 1$. 进一步, 想要 $\hat{F}_\gamma(f)$ 在 $\mathcal{D}^\gamma(V)$ 中是局部 Lipschitz 连续的, 需要 $\kappa \geq \gamma/\zeta \vee 1$.

模型化分布的最后一个重要操作是针对奇异核的积分, 其目的是将与热核的卷积”提升”到抽象模型空间中.

定义 2.8 给定一个区 V , 一个线性映射 $\mathcal{I}: V \rightarrow T$ 是一个能将正则性提升 $\beta > 0$ 阶的抽象积分映射, 如果:

- 对于 $\forall \alpha \in A, \mathcal{I}(V_\alpha) \subset T_{\alpha+\beta}$;
- 对于 $\forall a \in V \cap \bar{T}, \mathcal{I}a = 0$;
- 对于 $\forall a \in V, \Gamma \in G, \mathcal{I}\Gamma a - \Gamma\mathcal{I}a \in \bar{T}$.

在我们的应用中, $\beta = 2$. 我们对将要提升的热核有以下定义.

定义 2.9 对于 $\beta > 0$, 函数 $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \setminus \{x = y\} \rightarrow \mathbf{R}$ 的类 \mathcal{K}_β 由可分解为 $K(x, y) = \sum_{n \geq 0} K_n(x, y)$ 的元素组成, 其中函数 K_n 具有如下性质:

- 对于所有的 $n \geq 0, K_n$ 都在 $\{(x, y) : \|x - y\|_s \leq 2^{-n}\}$ 上支撑;
- 对于任意两个多指标 k 和 l , 都有 $|D_1^k D_2^l K_n(x, y)| \lesssim 2^{n(|s|+|k+l|_s-\beta)}$;
- 对于多指标 k 和 $l, y \in \mathbf{R}^d, i = 1, 2$, 所有 $n \geq 0$ 有 $|\int_{\mathbf{R}^d} (x - y)^l D_i^k K_n(x, y) dx| \lesssim 2^{-\beta n}$;
- 对于给定的 $r > 0, \int_{\mathbf{R}^d} K_n(x, y) P(y) dy = 0$ 对所有的 $n \geq 0, x \in \mathbf{R}^d$, 以及每个次数至多为 r 的多项式 P 均成立.

定义 2.8 中的线性映射 \mathcal{I} 可以由 K 表示. 对每个 $\alpha \in A$, 每个 $a \in V_\alpha$, 每个 $x \in \mathbf{R}^d$ 都有恒等式

$$\Pi_x \mathcal{I}a = \int_{\mathbf{R}^d} K(\cdot, z) (\Pi_x a)(dz) - \Pi_x \mathcal{J}(x)a, \quad (2.7)$$

其中 $\mathcal{J}(x)a = \sum_{n \geq 0} \mathcal{J}^{(n)}(x)a = \sum_{n \geq 0} \sum_{|k|_s < \alpha + \beta} \frac{X^k}{k!} (\Pi_x a) (D_1^k K_n(x, \cdot))$.

关于卷积运算在模型空间中的表现, 有以下定理:

定理 2.10 令 $K \in \mathcal{K}_\beta$, 对于某个 $\beta > 0$, 令 \mathcal{I} 为作用在 V 上的抽象积分映射, (Π, Γ) 为 \mathcal{I} 实现 K 的模型. 那么, 对于 $\gamma > 0$, 定义的算子 $\mathcal{K}_\gamma: \mathcal{D}^\gamma(V) \rightarrow \mathcal{D}^{\gamma+\beta}(V)$,

$$(\mathcal{K}_\gamma f)(x) = \mathcal{I}f(x) + \mathcal{J}(x)f(x) + (\mathcal{N}_\gamma f)(x), \quad (2.8)$$

且对每一个 $f \in \mathcal{D}^\gamma$ 有恒等式

$$\mathcal{R}\mathcal{K}_\gamma f = K \star \mathcal{R}f, \quad (2.9)$$

其中 $(\mathcal{N}_\gamma f)(x) = \sum_{n \geq 0} (\mathcal{N}_\gamma^{(n)} f)(x) = \sum_{n \geq 0} \sum_{|k|_s < \gamma + \beta} \frac{x^k}{k!} (\mathcal{R}f - \Pi_x f(x)) (D_1^k K_n(x, \cdot))$.

2.2 $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$ 的定义

我们引入 Hairer, Martin 在论文 [6] 中使用的模型空间来处理初始条件, 并且允许在区域边界处发生爆破, 使其有对于在时间 0 处和边界上出现的”双奇点”的处理. 设 P_0 和 P_1 是两个固定的边界, 记 $P = P_0 \cup P_1$.

记 $|x|_{P_i} = 1 \wedge d_s(x, P_i), |x, y|_{P_i} = |x|_{P_i} \wedge |y|_{P_i} (i = 1, 2)$, 对于任意紧集 $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_P = \{(x, y) \in (\mathfrak{K} \setminus P)^2 : x \neq y \text{ 且 } 2\|x - y\|_s \leq |x, y|_{P_0} \wedge |x, y|_{P_1}\}$. $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$ 中的 $\omega = (\eta, \sigma, \mu) \in \mathbf{R}^3$, 分别对应于 P_0, P_1 和它们的交点处的正则性. 下面对模型空间 $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$ 进行定义.

定义 2.11 设 V 是区, $\gamma > 0, w = (\eta, \sigma, \mu) \in \mathbf{R}^3$. 则空间 $\mathcal{D}_P^{\gamma, w}(V)$ 由所有函数 $f : \mathbb{R}^d \setminus P \rightarrow V_\gamma^-$ 组成, 使得对每个紧集 $\mathfrak{K} \subset \mathbb{R}^d$ 有

$$\begin{aligned} \|f\|_{\gamma, w; \mathfrak{K}} := & \sup_{(x, y) \in \mathfrak{K}_P} \sup_{l < \gamma} \frac{\|f(x) - \Gamma_{xy} f(y)\|_l}{\|x - y\|_s^{\gamma-l} |x, y|_{P_0}^{\eta-\gamma} |x, y|_{P_1}^{\sigma-\gamma} (|x, y|_{P_0} \vee |x, y|_{P_1})^{\mu-\eta-\sigma+\gamma}} \\ & + \sup_{x \in \mathfrak{K}: 0 < |x|_{P_0} \leq |x|_{P_1}} \sup_{l < \gamma} \frac{\|f(x)\|_l}{|x|_{P_1}^{\mu-l} \left(\frac{|x|_{P_0}}{|x|_{P_1}}\right)^{(\eta-l) \wedge 0}} \\ & + \sup_{x \in \mathfrak{K}: 0 < |x|_{P_1} \leq |x|_{P_0}} \sup_{l < \gamma} \frac{\|f(x)\|_l}{|x|_{P_0}^{\mu-l} \left(\frac{|x|_{P_1}}{|x|_{P_0}}\right)^{(\sigma-l) \wedge 0}} < \infty. \end{aligned} \tag{2.10}$$

之后我们将都在模型空间 $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$ 中考虑不动点问题, 定义在 $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$ 上的重构算子、乘积、卷积等运算与定义在 \mathcal{D}^γ 上的基本一致, 在 [7] 的第六章和 [5] 的第四章对上述运算在模型空间 $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$ 中的连续性进行了详细证明.

3 定理证明

3.1 特殊的正则结构及对应的模型空间

我们需要构建的正则结构要从具有 $d + 1$ 个抽象变量给出的抽象多项式正则结构 $\bar{\mathcal{T}}$ 出发, 记它们为 X_0, X_1, \dots, X_d , 分别表示时间变量和 d 维空间变量. 由于在抛物方程中, 该正则结构的尺度 $\mathfrak{s} = (2, 1, \dots, 1)$, 因此有 $\mathbf{1} \in \bar{T}_0, X_i \in \bar{T}_1 (i = 1, \dots, d), X_0 \in \bar{T}_2$ 等.

在 $\bar{\mathcal{T}}$ 的基础上我们引入额外的符号 Ξ , 用于表示抽象的驱动噪声 η . 固定一个任意小的正数 κ , 噪声的正则性为 $-1 - \kappa$. 以 Ξ 为单位, 构造与 \mathbf{R} 同态的向量空间 $\bar{T}_{-1-\kappa}$. 通过第二节的介绍, 在运算中将引入卷积运算 \mathbf{I} 与乘积, 考虑包含抽象表达式的集合 \mathcal{U} , 它是包含 $\Xi, \mathbf{1}, X_0, \dots, X_d$, 且满足

$$\begin{aligned} \tau \in \mathcal{U} & \Rightarrow \mathbf{I}(\tau), \Xi \tau \in \mathcal{U}, \\ \tau, \bar{\tau} \in \mathcal{U} & \Rightarrow \tau \bar{\tau} \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{3.1}$$

的最小集合.

于是, 我们所构建的正则结构 $\mathcal{T} = (A, T, G)$ 包括以下三个元素:

- 指标集 $A = |\mathcal{U}|, |\mathcal{U}|$ 表示 \mathcal{U} 中元素的同质性, $|\Xi| = -1 - \kappa, |X_1 \Xi| = -\kappa, |\mathbf{I}(\Xi)| = 1 - \kappa$;
- 向量空间 $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$, 其中 $\bar{T}_\alpha = \text{span} \{\tau_1, \dots, \tau_m : |\tau_i| = \alpha, i = 1, \dots, m\}$;
- 结构群 G 由所构造的模型唯一决定.

对于某个固定的 ε , 在正则结构上定义的模型 $Z^\varepsilon = (\Pi^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)$ 的作用效果为:

$$(\Pi_x^\varepsilon X^k)(y) = (y - x)^k, (\Pi_x^\varepsilon \Xi)(y) = \eta_\varepsilon(y), \hat{\Pi}_x^\varepsilon I(\Xi) = P \star \eta_\varepsilon. \quad (3.2)$$

Γ^ε 与抽象多项式正则结构中一致, 作用在噪声上不变.

在 $\mathcal{T} = (A, T, G)$ 和 $Z^\varepsilon = (\Pi^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)$ 的基础上, 定义 $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$, 其中 P 为边界点集合, ω 为不同边界上的正则性. γ 是确定在之后的模型空间中运算应保留最高项的同质性.

3.2 抽象方程组的建立与求解

我们将方程组 (1.1) 改写为一个积分方程组

$$\begin{cases} u_\varepsilon = P_{Neu} \star (H_1(u_\varepsilon, v_\varepsilon) + G_1(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\eta_\varepsilon) + P_t^{Neu} u_0, \\ v_\varepsilon = P_{Neu} \star (H_2(u_\varepsilon, v_\varepsilon) + G_2(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\eta_\varepsilon) + P_t^{Neu} v_0, \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 P_{Neu} 表示 Neumann 热核, \star 表示时空卷积, $P_t^{Neu}(x, x') = P_{Neu}((t, x), (0, x'))$, $P_t^{Neu} u_0, P_t^{Neu} v_0$ 表示初始条件分别为 u_0, v_0 的热方程的解.

对于 Neumann 热核 P_{Neu} , 在文献 [6] 的基础上, 构造了定义在 \mathbf{R}^{d+1} 上的函数 K 和 $\mathbf{R}^{d+1} \times \mathbf{R}^{d+1}$ 上的函数 K_∂ , 其中 K 是紧支撑的, K_∂ 在绕有限宽的对角线带上支撑, 且有

$$P_{Neu}(z, z') = K_{Neu}(z, z') = K(z - z') + K_\partial(z, z'),$$

对 $z, z' \in [0, 1] \times D$ 成立, 这里我们选择与 [8] 中相似的 K , 使得它与半径为 1 的 (抛物) 球上的热核重合, 并且在半径为 2 的球上紧支撑, 且对于每一个阶数小于 3 的多项式 $Q: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, 有 $\int_{\mathbf{R}^2} K(t, x)Q(t, x)dxdt = 0$. K_∂ 是一个修正项, 它编码了边界条件的影响. 关于我们的正则结构, 使用与 K 的卷积作为我们的积分算子. 在模型分布上定义一个算子 \mathcal{P}_{Neu} , 令

$$\mathcal{P}_{Neu} = \mathcal{K} + \tilde{\mathcal{K}}_\partial, \quad (3.4)$$

其中 $\tilde{\mathcal{K}}_\partial = \mathcal{L}_2 K_\partial \mathcal{R}$ 编码了边界条件的影响. $\mathcal{L}_\gamma: \mathcal{C}^\gamma \rightarrow \mathcal{D}^\gamma$ 表示类似 Taylor 展开的函数:

$$(\mathcal{L}_\gamma f)(z) = \sum_{|k| \leq \gamma} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} X^k. \quad (3.5)$$

定义函数 $U, V: \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow \oplus_{\alpha < \gamma} T_\alpha$ 属于 $\mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$, 可以将 U, V 写成

$$\begin{cases} U(z) = u(z)\mathbf{1} + \tilde{U}(z), \\ V(z) = v(z)\mathbf{1} + \tilde{V}(z), \end{cases} \quad (3.6)$$

其中 $\tilde{U}(z), \tilde{V}(z) \in \oplus_{\alpha > 0} T_\alpha$.

对于 $U \in \mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$ 和 $|\Xi| = -1 - \kappa$, 根据第二节中乘积运算的性质, 容易得到 $G(U)\Xi \in \mathcal{D}_P^{\gamma-1-\kappa, \omega-1-\kappa}$, 根据定理 2.6, 为了保证重构算子 \mathcal{R} 在 $G(U)\Xi$ 上唯一定义, 需要 $\gamma - 1 - \kappa > 0$, 即 $\gamma > 1 + \kappa$. 同时由模型空间的定义, 对于 $\bar{\gamma} > \gamma > 0$, 容易验证 $\mathcal{D}^{\bar{\gamma}} \subset \mathcal{D}^\gamma$, 因此我们在更大空间上考虑只需要 γ 取的足够小, 同时满足 $\gamma > 1 + \kappa$.

根据式 (2.6) 可以得到函数 G_1 作用在 U, V 上的抽象函数 $\hat{G}_1(U, V): \mathbf{R}^{d+1} \rightarrow \mathcal{D}_P^{\gamma, \omega}$:

$$\hat{G}_1(U, V)(z) = G_1(u(z), v(z))\mathbf{1} + \sum_{k+l \geq 1, k, l \geq 0} \frac{D_1^k D_2^l G_1(u(z), v(z))}{(k+l)!} \tilde{U}(z)^k \tilde{V}(z)^l, \quad (3.7)$$

$\hat{G}_2(U, V), \hat{H}_1(U, V), \hat{H}_2(U, V)$ 也相似定义.

根据定义 2.7 以及 [5] 的命题 6.13 和注记 6.14, 要想 $\hat{G}_1(U, V), \hat{G}_2(U, V), \hat{H}_1(U, V), \hat{H}_2(U, V)$ 定义在 $\mathcal{D}_p^{\gamma, \omega}$ 上, 且 $\hat{G}_1(U, V), \hat{G}_2(U, V)$ 需要满足局部 Lipschitz 连续, 需要 $G_1, G_2 \in C^{(\gamma/\zeta\nu^1)+1}, H_1, H_2 \in C^{\gamma/\zeta\nu^1}, \zeta > 0$ 表示使 $V_\zeta \neq 0$ 的最小非零值. 为了证明定理 3.2, [3] 在第四章中引入更大的正则结构, 其中最小的正同质性为 $\frac{1}{2} - \kappa$, 因此在本文应取 $\zeta = \frac{1}{2} - \kappa$. 同时, 为了保证重构算子在 $G(U)\Xi$ 上唯一定义, 同时降低在模型空间中的运算复杂度, 可以取 $\gamma \in (1 + \kappa, 2 - 4\kappa)$, 因此 $G_1, G_2 \in C^5, H_1, H_2 \in C^4$.

根据 (3.6), (3.8), (3.9), 将方程组 (3.3) 提升到模型空间中的不动点问题:

$$\begin{cases} U = \mathcal{P}_{Neu}(\hat{H}_1(U, V) + \hat{G}_1(U, V)\Xi) + \mathcal{L}_\gamma P_t^{Neu} u_0, \\ V = \mathcal{P}_{Neu}(\hat{H}_2(U, V) + \hat{G}_2(U, V)\Xi) + \mathcal{L}_\gamma P_t^{Neu} v_0, \end{cases} \quad (3.8)$$

根据第二节中的抽象积分算子以及卷积算子, 可以得到 $\mathcal{P}_{Neu} = \mathcal{I}U + \tilde{\mathcal{P}}U$, 因而不动点方程 (3.8) 又可以写成:

$$\begin{cases} U = \mathcal{I}(\hat{H}_1(U, V) + \hat{G}_1(U, V)\Xi) + u\mathbf{1} + u'X, \\ V = \mathcal{I}(\hat{H}_2(U, V) + \hat{G}_2(U, V)\Xi) + v\mathbf{1} + v'X, \end{cases} \quad (3.9)$$

其中 u', v' 只是相对应的符号, 不代表 u 和 v 的导数.

在上述模型空间中的不动点问题中, 通过取 $\tilde{U}(z), \tilde{V}(z) = 0$ 对不动点方程进行迭代可以很快得到其在 $\mathcal{D}_p^{\gamma, \omega}$ 中的解为

$$\begin{cases} U = u\mathbf{1} + G_1(u, v)I(\Xi) + u'X, \\ V = v\mathbf{1} + G_2(u, v)I(\Xi) + v'X. \end{cases} \quad (3.10)$$

3.3 方程组的极限解

对于固定的 ε , 方程组 (3.3) 在模型空间上有对应的抽象方程组 (3.8), 即抽象方程组 (3.8) 可以通过定义在其上的模型 $Z^\varepsilon = (\Pi^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)$ 还原为函数空间中的方程组 (3.3).

取抽象方程组的非齐次项, 记为

$$\begin{cases} L_1 = \hat{H}_1(U, V) + \hat{G}_1(U, V)\Xi, \\ L_2 = \hat{H}_2(U, V) + \hat{G}_2(U, V)\Xi. \end{cases} \quad (3.11)$$

将式 (3.12) 代入上式的 L_1 中:

$$\begin{aligned} L_1 &= \hat{H}_1(U, V) + \hat{G}_1(U, V)\Xi \\ &= \hat{H}_1(U, V) + \left(G_1(u, v)\mathbf{1} + \sum_{k+l \geq 1, k, l \geq 0} \frac{D_1^k D_2^l G_1(u, v)}{(k+l)!} \tilde{U}^k \tilde{V}^l \right) \Xi \\ &= \hat{H}_1(U, V) + (G_1(u, v)\mathbf{1} + D_1^1 G_1(u, v) (G_1(u, v)\mathcal{I}(\Xi) + u'X)) \\ &\quad + \left(D_2^1 G_1(u, v) (G_2(u, v)\mathcal{I}(\Xi) + v'X) + \sum_{k+l \geq 2, k, l \geq 0} \frac{D_1^k D_2^l G_1(u, v)}{(k+l)!} \tilde{U}^k \tilde{V}^l \right) \Xi \\ &= \hat{H}_1(U, V) + G_1(u, v)\Xi + D_1^1 G_1(u, v) (G_1(u, v)\Xi\mathcal{I}(\Xi) + u'X\Xi) \\ &\quad + D_2^1 G_1(u, v) (G_2(u, v)\Xi\mathcal{I}(\Xi) + v'X\Xi). \end{aligned} \quad (3.12)$$

由 [6] 中的定理 3.6 可知, 对于 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 若 $\alpha + \beta > 0$, 则映射 $(f, g) \mapsto f \cdot g$ 为从 $\mathcal{C}_s^\alpha(\mathbf{R}^d) \times \mathcal{C}_s^\beta(\mathbf{R}^d)$ 到 $\mathcal{C}_s^{\alpha \wedge \beta}(\mathbf{R}^d)$ 的连续双线性映射.

在 L_1 得到的结果中, 只有 $D_1^1 G_1(u, v) G_1(u, v) \Xi \mathcal{I}(\Xi), D_2^1 G_1(u, v) G_2(u, v) \Xi \mathcal{I}(\Xi)$ 两项通过模型还原到函数空间无法定义连续的乘积. 解决这个问题的方法是对模型 $Z^\varepsilon = (\Pi^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon)$ 进行重整化, 修改模型的作用效果, 由于 $\Xi \mathcal{I}(\Xi)$ 还原到函数空间的正则性为 $-1 - \kappa + (2 - 1 - \kappa) = -2\kappa$, 因此对该项减去以 -2κ 的级数爆破的常数 C_ε . 将 BPHZ 重整化 [8] 后的模型记为 $\hat{Z}^\varepsilon = (\hat{\Pi}^\varepsilon, \hat{\Gamma}^\varepsilon)$, 作用在抽象变量上的表现形式为:

$$\hat{\Pi}^\varepsilon \Xi = \eta_\varepsilon, \hat{\Pi}^\varepsilon \Xi \mathcal{I}(\Xi) = \eta_\varepsilon (K * \eta_\varepsilon) - C_\varepsilon, \quad (3.13)$$

作用在其他抽象变量上与重整化之前的模型一致.

重整化之后的模型作用在方程组 (3.11) 上为

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_\varepsilon L_1)(z) &= (\hat{\Pi}_z^\varepsilon L_1(z))(z) \\ &= (\Pi_z^\varepsilon (L_1(z) - (D_1^1 G_1(u, v) G_1(u, v) \Xi \mathcal{I}(\Xi) + D_2^1 G_1(u, v) G_2(u, v) \Xi \mathcal{I}(\Xi))))(z) \\ &\quad + (\hat{\Pi}_z^\varepsilon (D_1^1 G_1(u, v) G_1(u, v) \Xi \mathcal{I}(\Xi) + D_2^1 G_1(u, v) G_2(u, v) \Xi \mathcal{I}(\Xi)))(z) \\ &= (\Pi_z^\varepsilon L_1(z))(z) - (D_1^1 G_1(u, v) G_1(u, v) + D_2^1 G_1(u, v) G_2(u, v)) C_\varepsilon \\ &= H_1(u(z), v(z)) + G_1(u(z), v(z)) \eta_\varepsilon - (D_1^1 G_1(u, v) G_1(u, v) + D_2^1 G_1(u, v) G_2(u, v)) C_\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.14)$$

结果与 (3.3) 中非齐次项并不相同, 观察还原的过程, 对 (3.3) 式重整化:

$$\begin{cases} U = \mathcal{P}_{Neu}(\hat{H}_{1,\eta}(U, V) + \hat{G}_1(U, V)\Xi) + \mathcal{L}_\gamma P_t^{Neu} u_0, \\ V = \mathcal{P}_{Neu}(\hat{H}_{2,\eta}(U, V) + \hat{G}_2(U, V)\Xi) + \mathcal{L}_\gamma P_t^{Neu} v_0, \end{cases} \quad (3.15)$$

其中 $\hat{H}_{i,\eta}(u, v)$ 代表 $H_i(u, v) + (D_1^1 G_i(u, v) G_1(u, v) + D_2^1 G_i(u, v) G_2(u, v)) C_\varepsilon$ 在模型空间中的表现, ($i = 1, 2$). 对于方程组 (3.15), 在重整化模型的作用下会还原为 (3.3).

根据 [9, 10] 中对 BPHZ 重整化的讨论, 可以得知当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 重整化模型 $\hat{\Pi}^\varepsilon$ 会依概率收敛到极限模型, 且对于尺度变换后的噪声 $\varepsilon^{(1-\frac{d}{2})j + \frac{d}{2}i} \eta(\varepsilon^{-2}t, \varepsilon^{-1}x)$, 记 Ξ_i^j 为其所对应的抽象变量, 当 $i + j > 0$, 有 $\hat{\Pi}^\varepsilon \Xi_i^j = 0$.

在定理 3.2 的基础上, 将极限模型作用在方程组 (3.17) 上得到极限解应满足的方程为:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + H_{1,\eta}(u, v), \\ \partial_t v = \Delta v + H_{2,\eta}(u, v), \end{cases} \quad (3.16)$$

定理 1.1 证明完毕.

本文证明的关键在于如何将函数空间中的方程提升到模型空间中, 以及如何根据重整化模型来得到重整化方程组. 在我们证明的过程中, $\mathcal{D}_P^{\gamma,\omega}$ 中运算的连续性和 $\mathcal{D}_P^{\gamma,\omega}$ 上的模型分布映射回函数空间这一过程的连续性保证了我们可以在模型空间中进行基本的运算, 重整化模型依概率收敛到极限模型以及重整化模型与函数空间中方程的对应关系最终让我们得到了定理结果, 即极限模型还原的不动点方程为 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时原方程 (3.1) 的极限解所满足的方程.

参 考 文 献

- [1] Goudey, Rémi, Claude Le Bris. Linear elliptic homogenization for a class of highly oscillating non-periodic potentials[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2024, 56(2): 2738–2782.
- [2] Mengmeng Wang, Dong Su, Wei Wang. Homogenization of the heat equation with random convolutional potential[J]. *AIMS Mathematics*, 2024, 9(3): 5661–5670.
- [3] Martin Hairer, Etienne Pardoux. Fluctuations around a homogenised semilinear random PDE[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2021, 239: 151–217.
- [4] Zemanian A H. Distribution theory and transform analysis: an introduction to generalized functions, with applications[J]. McGraw-Hill Book Co. New York-Toronto-London-Sydney, 2010.
- [5] Martin Hairer. A theory of regularity structures[J]. *Inventiones Mathematicae*, 2014, 198(2): 269–504.
- [6] Máté Gerencsér, Martin Hairer. Singular SPDEs in domains with boundaries[J]. *Probability Theory and Related Fields*, 2019, 173: 697–758.
- [7] Martin Hairer. Introduction to regularity structures[J]. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 2014, 29(2): 175–210.
- [8] Martin Hairer, Etienne Pardoux. A Wong-Zakai theorem for stochastic PDEs[J]. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 2015, 67(4): 1551–1604.
- [9] Bruned, Yvain, Ajay Chandra, et, al. Renormalising SPDEs in regularity structures[J]. *Journal of the European Mathematical Society*, 2020, 23(3): 869–947.
- [10] Bruned, Yvain, Martin Hairer, Lorenzo Zambotti. Algebraic renormalisation of regularity structures[J]. *Inventiones mathematicae*, 2019, 215(3): 1039–1156.

HOMOGENIZATION PROBLEM OF SEMILINEAR STOCHASTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUN Zi-jian, MA Fei-yao

(*School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China*)

Abstract: In this paper, we study the homogenization problem of semilinear parabolic stochastic partial differential equations (SPDEs) with homogeneous Neumann boundary conditions defined on $\mathbf{R}_+ \times [0, 1]^d$ with high-frequency oscillatory random potential, where $d = 1, 2$ or 3 , by using regularity structures, the main conclusion is that the solution of the system of equations will converge to the solution of a deterministic parabolic PDEs in probability.

Keywords: semilinear parabolic SPDEs; high-frequency oscillatory; homogenization problem; regularity structures

2010 MR Subject Classification: 60H15; 60H40.