

有限群的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群与群结构

霍丽君, 朱清江
(重庆理工大学理学院, 重庆, 400054)

摘要: 本文利用有限群 G 中某些给定子群的几乎 $S\Phi$ - 嵌入性质刻画了有限群的 p - 幂零性, 得到有限群的新的结构特征. 此外, 还得到两个新的判断一个有限群是否属于给定包含超可解群类的可解饱和群系的判别准则.

关键词: 有限群; 几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群; *Sylow* 子群; p - 幂零; 超可解群

MR(2010) 主题分类号: 20D10; 20D20 中图分类号: O152.1

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2025)02-0182-07

1 引言

本文所提到的群都是有限群, 所用符号和术语也都是标准的, 对于未提到的概念读者可参考文献 [1-4] 等.

研究子群与群本身之间的关系一直是有限群论研究的重点课题之一. 早期 Kegel [5] 就提出了 s - 拟正规子群的概念, 设 H 是有限群 G 的一个子群, 如果 H 与 G 的任意 *Sylow* 子群 P 都满足 $HP = PH$ (即 H 和 P 的乘积是可交换的), 则称 H 是 G 的 s - 拟正规子群. 群 G 的子群 H 在 G 中是 s - 拟正规嵌入的, 如果对于 $|H|$ 的每一个素因子 p , 使得 H 的 *Sylow* p - 子群也是 G 的某个 s - 拟正规子群的 *Sylow* p - 子群. 以这两个概念为基础, 再结合及其相关的概念, 如 c - 正规子群, $S\Phi$ - 嵌入子群等 (见文献 [6-8]), 在文章 [9] 中, 作者给出了几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群的概念: 设 H 是有限群 G 的一个子群, 如果 G 有一个正规子群 N , 使得 HN 在 G 中是 s - 拟正规的, 并且 $H \cap N \leq \Phi(H)H_{seG}$, 其中 H_{seG} 是 H 在 G 中的所有 s - 拟正规嵌入子群生成的子群, 则称 H 在 G 中是几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 通过研究有限群中某些子群的几乎 $S\Phi$ - 嵌入性质, 作者得到了关于有限群的 p - 幂零性和超可解性的一些新的判别准则. 例如作者得到: 设 \mathfrak{F} 是一个包含 \mathfrak{U} 的可解饱和群系, 且 G 有一个可解正规子群 E , 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 如果 $F(E)$ 的每个非循环 *Sylow* 子群的所有极大子群要么是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的, 要么在 G 中有超可解的补, 那么 $G \in \mathfrak{F}$, 其中 \mathfrak{U} 表示所有超可解群构成的群类.

对此我们考虑如果 $F(E)$ 或 $F^*(E)$ 中的所有 *Sylow* 子群的每个阶为 p^m 的子群在群中都是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的, 其中 p 是一个素数, m 是一个固定的正整数, 那么有限群的结构又如何呢? 本文将深入研究此类问题, 我们进一步得到了一些与 p - 幂零性相关的必要和充分条件.

2 预备知识

*收稿日期: 2024-09-26 接收日期: 2024-10-22

基金项目: 重庆市自然科学基金项目 (CSTB2022NSCQ-MSX0831, cstc2021jcyj-msxmX0575); 重庆理工大学研究生教育高质量发展行动计划资助成果 (gzljg2022319, gzlcx20243275).

作者简介: 霍丽君 (1983-), 女, 博士, 讲师, 主要研究方向: 代数学, E-mail: huolj@cqut.edu.cn.

在本节我们列出后面主要定理的证明过程中所要用到的部分重要引理.

引理 2.1 [9, 引理 2.6] 设 $H \leq K$ 是 G 的子群, N 是 G 的一个正规子群, 那么

- (1) H 在 G 中是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的当且仅当 G 有一个正规子群 N_1 , 使得 HN_1 在 G 中是 s - 拟正规的, $H_G \leq N_1$ 且 $H \cap N_1 \leq \Phi(H)H_{scG}$;
- (2) 如果 H 在 G 中是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的, 那么 H 在 K 中也是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的;
- (3) 假设 $N \leq H$, 如果 H 在 G 中是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的, 那么 H/N 在 G/N 中也是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的. 此外, 如果 $N \leq \Phi(H)$, 那么逆命题也成立;
- (4) 如果 H 在 G 中几乎 $S\Phi$ - 嵌入的, 且 $(|H|, |N|) = 1$, 那么 HN/N 在 G/N 中也是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的.

引理 2.2 [9, 命题 3.2] 设 N 是 G 的一个正规子群, 使得 G/N 是 p - 幂零的, 其中 p 是 $|G|$ 的最小素因子. 假设 N 中任意阶为 p 或 4 的循环子群 (如果 N 的 *Sylow* 2- 子群是非交换群) 在 G 中是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的, 那么 G 是 p - 幂零的.

引理 2.3 [2, 定理 3.4.11] 设 G 是一个极小非幂零群, 则

- (1) $|G| = p^m q^n$, 这里 p 和 q 是两个不同的素数, m 和 n 是正整数. G 有一个正规 *Sylow* p - 子群 P 和循环 *Sylow* q - 子群;
- (2) $P/\Phi(P)$ 是 G 的主因子;
- (3) 如果 P 是交换群, 那么 P 是初等交换群.

引理 2.4 [10, 附录 C, 定理 6.3] 设 p 是一个素数, P 是群 G 的一个正规 p - 子群, 并且 $G/C_G(P)$ 是一个 p - 群, 那么 $P \leq Z_\infty(G)$.

引理 2.5 [11, 7.2.2] 设 G 为非平凡群, p 为 $|G|$ 的最小素因子. 假设 G 的 *Sylow* p - 子群是循环的, 则 G 是 p - 幂零群.

引理 2.6 [12, 定理 B] 设 \mathfrak{F} 是一个群系, E 是有限群 G 的正规子群, 并且满足 $F^*(E) \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$, 则 $E \leq Z_{\mathfrak{F}}(G)$.

引理 2.7 [13, 定理 3.3] 设 \mathfrak{F} 是包含 \mathfrak{U} 的可解饱和群系, E 是有限群 G 的正规子群, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$ 且 $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

引理 2.8 [3, Chapter X 13] 设 G 是一个群, 若 G 的广义 Fitting 子群 $F^*(G)$ 是可解群, 则 $F^*(G) = F(G)$.

3 主要结论

定理 3.9 设 p 是有限群 G 的阶的一个素因子, P 是 G 的一个 *Sylow* p - 子群. 假设存在 P 的一个子群 D , 满足 $1 < |D| < |P|$, 且 P 中任意阶为 $|D|$ 的子群都是 G 的一个几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 进一步, 如果 $|D| = 2$, 且 P 中任意阶为 4 的循环子群都是 G 的一个几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 那么 G 是 p - 幂零的.

证 假设定理不成立, 且设 G 为一个极小阶的反例. 我们通过以下步骤进行证明.

(1) $O_{p'}(G) = 1$.

假设 $O_{p'}(G) \neq 1$. 容易看出 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 是 $G/O_{p'}(G)$ 的 *Sylow* p - 子群, 而由引理 2.1(4) 可知, $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 的任意阶为 $|D|$ 的子群都是 $G/O_{p'}(G)$ 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 此外, 当 $|D| = 2$ 时, $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 的 4 阶循环子群也有同样的结论, 这说明 $G/O_{p'}(G)$

也满足定理的条件. 因此, 由 G 的极小性可知, $G/O_{p'}(G)$ 是 p - 幂零的. 从而易知 G 也是幂零的, 矛盾.

(2) 设 K 是 G 的一个真子群, 且 $L \in Syl_p(K)$, 使得 $|L| \geq |D|$, 那么 K 是 p - 幂零的.

显然, $|D| \leq |L| \leq |P|$, 因此 L 的任意阶为 $|D|$ 的子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 由引理 2.1(2) 可知, L 的任意阶为 $|D|$ 的子群都是 K 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 同理, 如果 $|D| = 2$, 也有 L 的任意阶数为 4 的循环子群都是 K 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 再由 G 的极小性可知, K 也是 p - 幂零的.

(3) $|D| > p$.

假设 $|D| = p$, 则 G 的任意 p 阶子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 若 $p = 2$, 则 G 的任意 4 阶循环子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 由于 G 不是 p - 幂零, 由引理 2.2 可知, $p = 2$ 且 P 是 2 阶或 4 阶循环群. 根据 Burnside p - 幂零准则可知, G 是 p - 幂零, 矛盾.

(4) 设 N 是 G 的一个真正规子群, 则 $N \leq P$.

设 $G_1 = PN$. 假设 $G_1 \neq G$, 则由 (2) 式可知, G_1 是 p - 幂零的, 因此, N 是 p - 幂零的, 并且由 (1) 可知 $N \leq P$.

假设 $G_1 = G$, 则 $G/N = PN/N \cong P/(P \cap N)$, 故 G/N 是一个 p - 群. 设 M 是 G 的一个正规子群, 满足 $N \leq M$, 且 $|G : M| = p$, 显然, $M \cap P$ 是 P 的极大子群. 应用 (2) 和 (3) 的结论, 可得 M 是 p - 幂零的. 因此, 我们由 (1) 可得 $N \leq M \leq P$.

(5) 设 N 是 G 的一个极小正规子群, 则 $|N| < |D|$.

假设 $|N| \geq |D|$, 令 H 是 N 中的 $|D|$ 阶子群. 由假设, 存在 G 的一个正规子群 N_0 使得 HN_0 是 s - 拟正规的, 且 $H \cap N_0 \leq \Phi(H)H_{seG}$. 若 $N_0 = G$, 则显然 H 是 G 的 s - 拟正规嵌入子群; 若 $N_0 < G$, 由 (4) 可知, $N_0 \leq P$, 再由 N 的极小正规性可知, 或者 $N \cap N_0 = 1$, 或者 $N \leq N_0$. 如果 $N \cap N_0 = 1$, 则 $N \cap HN_0 = H(N \cap N_0) = H$, 从而 H 是 G 的 s - 拟正规子群; 如果 $N \leq N_0$, 则 $H = H \cap N \leq H \cap N_0 \leq \Phi(H)H_{seG}$, 易知 $H = H_{seG}$, 故 H 是 G 的 s - 拟正规嵌入子群. 在以上情形下, H 为 s - 拟正规或 s - 拟正规嵌入子群. 再由 [14, 定理 3.6], 从而 G 是一个幂零群, 矛盾, 故有 $|N| < |D|$.

(6) 设 N 是 G 的极小正规子群, 则 G/N 是 p - 幂零群.

由 (4) 和 (5), 可得 $N \leq P$ 和 $|N| < |D|$. 由引理 2.1(3) 可知, P/N 的任意阶为 $\frac{|D|}{|N|}$ 的子群都是 G/N 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 则由 G 的极小性可知, G/N 是 p - 幂零的.

(7) 最后的矛盾.

设 N 是 G 的极小正规子群, M 是 G 的包含 N 的一个子群, 且满足 $M/N = O_{p'}(G/N)$. 由 (6) 可知, G/N 是 p - 幂零的, 进而可得 G/M 是一个 p - 群. 另一方面, 又由 (4) 可知 $M \leq P$, 这说明 G 是一个 p - 群, 矛盾, 这就完成了定理的证明.

定理 3.10 设 G 是不含四元数群 Q_8 的群, 并且 G 的任意 2 阶子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 则 G 是 2- 幂零群.

证 假设定理不成立, 设 G 是一个极小阶反例. 令 L 是 G 的任意一个真子群, 因为 G 是不含四元数群 Q_8 的群, 所以 L 也是不含四元数群 Q_8 的群. 此外根据假设, L 的任意 2 阶子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 由引理 2.1(2), L 的任意 2 阶子群都是 L 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 因此, L 满足该定理的条件, 并且由 G 的极小性可知 L 是 2- 幂零的. 由此可得 G 是极小非 2- 幂零群.

设 $P \in Syl_2(G)$, 由假设, P 的任意 2 阶子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 假设 P 不是

初等交换群, 由引理 2.3(3), 则 P 不是交换群. 由于 G 是不含四元数群 Q_8 的群, 由 [15, 定理 56.1], 任意非交换不含四元数群 Q_8 的 2- 群都有一个极大特征子群. 由于 P 正规于 G , 则存在 P 的一个极大子群 P_1 , 使得 $P_1 \trianglelefteq G$. 注意到 $\Phi(P) \leq P$, 且由引理 2.3 (2), 则 $P/\Phi(P)$ 是 G 的一个主因子, 于是有 $\Phi(P) = P_1$. 这说明 P 是一个循环群, 进而是交换群, 矛盾. 现假设 P 是初等交换群, 特别地, P 没有 4 阶的循环子群, 由定理 3.9, 我们得到 G 是 2- 幂零的, 矛盾, 定理证毕.

定理 3.11 设 p 是一个素数, P 是有限群 G 的一个非平凡正规 p - 子群. 假设存在 P 的一个子群 D , 且 $1 < |D| < |P|$, 使得 P 中任意阶为 $|D|$ 的子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 如果 $p = 2$, $|D| = 2$ 且 P 含有四元数群 Q_8 , 则进一步假设 P 中任意阶为 4 的循环子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 那么 $P \leq Z_\infty(G)$.

证 设 q 是 $|G|$ 的一个素因子, 且 $q \neq p$, 设 Q 是 G 的一个 $Sylow$ q - 子群. 令 $H = PQ$. 由于 P 在 G 中是正规的, 所以 H 是 G 的子群. 注意到 P 是 H 的一个 $Sylow$ p - 子群. 根据引理 2.1(2), P 中任意阶为 $|D|$ 的子群都是 H 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 如果 $p = 2$, $|D| = 2$, 且 P 含有四元数群 Q_8 的群, 那么 P 中任意阶为 4 的循环子群都是 H 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 定理 3.9 和定理 3.10 表明 H 是 p - 幂零的, 于是 $H = P \times Q$, 因此我们有 $Q \leq C_G(P)$. 由于 q 是 $|G|$ 的任意一个不同于 p 的素数因子, 所以 $O_p(G) \leq C_G(P)$. 因此, $G/C_G(P)$ 是一个 p - 群. 再由引理 2.4 可得 $P \leq Z_\infty(G)$.

定理 3.12 设 \mathfrak{F} 是包含 \mathcal{U} 的可解饱和群系, E 是群 G 的一个非平凡正规子群, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 对 E 的每一个 $Sylow$ 子群 P , 假设 P 循环或者存在 P 的子群 D 使得 $1 < |D| < |P|$, 并且 P 的任意阶为 $|D|$ 的子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 如果 $p = 2$, $|D| = 2$ 且 P 是含有四元数群 Q_8 的群, 则进一步假设 P 的任意阶为 4 的循环子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

证 假设定理不成立, 我们设 (G, E) 是使得 $|G| + |E|$ 最小的一个反例.

设 p 是 $|E|$ 的最小素因子, 我们断言 E 是 p - 幂零的. 如果 E 的 $Sylow$ p - 子群 P 是循环群, 则由引理 2.5 即可得出 G 是 p - 幂零的, 矛盾. 现假设 P 不是循环群, 则 P 有子群 D , 使得 $1 < |D| < |P|$, 并且 P 的任意阶为 $|D|$ 的子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 此外, 如果 $p = 2$, $|D| = 2$, 且 P 是含有四元数群 Q_8 的群, 则 P 的任意阶为 4 的循环子群都是 G 的 $S\Phi$ - 嵌入子群. 应用引理 2.1(2)、定理 3.9 和定理 3.10, 可得 E 是 p - 幂零的.

假设 $O_{p'}(E) \neq 1$. 由引理 2.1(4) 可知, $(G/O_{p'}(E), E/O_{p'}(E))$ 满足定理的假设. 因此, 由 (G, E) 的极小性, 可知 $G/O_{p'}(E) \in \mathfrak{F}$. 因此, $(G, O_{p'}(E))$ 也满足该定理的假设, 从而 $G \in \mathfrak{F}$, 矛盾, 因此 $O_{p'}(E) = 1$.

以下证明 $E \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. 由于 E 是 p - 幂零的且 $O_{p'}(E) = 1$, 可得 $E = P$. 如果 P 是循环的, 则显然有 $E = P \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. 如果 P 不是循环的, 那么由定理的假设以及定理 3.11, 有 $E = P \leq Z_\infty(G)$. 因此 $E \leq Z_{\mathcal{U}}(G)$. 再由引理 2.7 可得 $G \in \mathfrak{F}$, 矛盾. 定理证毕.

定理 3.13 设 \mathfrak{F} 是包含 \mathcal{U} 的可解饱和群系, E 是有限群 G 的一个非平凡正规子群, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 对 $F^*(E)$ 的每一个 $Sylow$ 子群 P , 假设 P 循环或者存在 P 的子群 D 使得 $1 < |D| < |P|$, 并且 P 的任意阶是 $|D|$ 的子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群. 如果 $p = 2$, $|D_1| = 2$ 且 P 含有四元数群 Q_8 , 则进一步假设 P 的任意阶数为 4 的循环子群都是 G 的几乎 $S\Phi$ - 嵌入子群, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

证 令 $p_1 < \cdots < p_s$ 为 $|F^*(E)|$ 不同的素数因子, p_i 为 $F^*(E)$ 的 p_i 阶子群. 与定理 3.12 的证明类似, 我们容易得到 $F^*(E)$ 是 p_1 - 幂零的, 这里 p_1 是 $|F^*(E)|$ 的最小素因子. 令 $N_1 = O_{p_1'}(F^*(E))$, 可得 $F^*(E)/N_1 \cong P_1$. 若 $F^*(E)$ 不是 p_1 - 群, 则 G 的 $Sylow$ p_2 - 子群 P_2 在 $Syl_{p_2}(N_1)$ 中, 同样可以证明 N_1 是 p_2 - 幂零群. 再令 $N_2 = O_{p_2'}(N_1)$, 类似可得 $N_1/N_2 \cong P_2$.

重复上面的操作, 容易看到群 G 有一个超可解型的 $Sylow$ 塔, 即存在 $F^*(E)$ 的正规子群链 $F^*(E) = N_0 > N_1 > \cdots > N_s = 1$, 使得对任意的 $1 \leq i \leq s$, 都有 $N_{i-1}/N_i \cong P_i$. 由此可知, $F^*(E)$ 是可解的. 进一步由引理 2.8 可得 $F^*(E) = F(E)$.

由于 $F(E)$ 是幂零的, 且 $P_i \in Syl_{p_i}(F(E))$, $1 \leq i \leq s$. 因此 P_i 是 $F(E)$ 的特征子群. 因为 $F(E) \trianglelefteq G$, 所以 $P_i \trianglelefteq G$. 如果 P_i 是循环群, 则 $P_i \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. 如果 P_i 不是循环群, 则由定理的假设以及定理 3.11 可得 $P_i \leq Z_{\infty}(G)$, 进而 $P_i \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. 由于 i 是任意选取的, 因此 $F(E) \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. 最后再应用引理 2.6 和引理 2.7, 可得 $G \in \mathfrak{F}$.

4 一些应用

推论 4.14 [16, 定理 2] 设 E 是 G 的可解正规子群, G/E 是 G 的超可解商群. 若 $F(E)$ 的 $Sylow$ 子群的所有极大子群在 G 中 c - 正规, 则 G 为超可解群.

推论 4.15 [17, 定理 4.2] 设 G 为群, E 为 G 的超可解正规子群且 G/E 为超可解商群. 假设 $F(E)$ 的每个 $Sylow$ 子群的所有极大子群在 G 中是 s - 拟正规的, 则 G 为超可解群.

推论 4.16 [18, 定理 2] 设 G 为可解群, H 为正规子群, 使得 G/H 超可解. 若 $F(H)$ 的 $Sylow$ 子群的所有极大子群都在 G 中是 s - 拟正规嵌入的, 则 G 为超可解群.

推论 4.17 [19, 定理 1] 设 \mathfrak{F} 是包含 \mathfrak{U} 的饱和群系, E 是 G 的可解正规子群, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 若 $F(E)$ 的 $Sylow$ 子群的所有极大子群都是 G 中的 c - 正规子群, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

推论 4.18 [20, 定理 3] 设 G 为奇数阶群. 若 G 的所有素数阶子群在 G 中正规, 则 G 为超可解群.

推论 4.19 [21, 定理 4.2] 若 G 的每个素数阶子群或 4 阶循环子群在 G 中 c - 正规, 则 G 为超可解群.

推论 4.20 [22, 定理 3.1] 若 G 的每个素数阶子群和 4 阶循环子群在 G 中 s - 拟正规, 则 G 为超可解群.

推论 4.21 [16, 定理 3] 设 G 为可解群, E 为 G 的正规子群, 使得 G/E 是超可解群. 若 $F(E)$ 的所有素数阶子群在 G 中 c - 正规, 则 G 为超可解群.

推论 4.22 [23, 定理 3.4] 设 \mathfrak{F} 是包含 \mathfrak{U} 的饱和群系, 如果 $G^{\mathfrak{F}}$ 的所有极小子群和所有 4 阶循环子群在 G 中 c - 正规, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

推论 4.23 [9, 定理 1.4] 设 \mathfrak{F} 是包含 \mathfrak{U} 的可解饱和群系. 假设 G 有一个可解正规子群 E , 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 如果 $F(E)$ 的每个非循环 $Sylow$ 子群的所有极大子群要么是几乎 $S\Phi$ - 嵌入的, 要么在 G 中具有一个超可解补, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

推论 4.24 [9, 定理 1.5] 设 \mathfrak{F} 是包含 \mathfrak{U} 的可解饱和群系. E 是 G 的正规子群, 使得 $G/E \in \mathfrak{F}$. 假设 $X = E$ 或 $X = F^*(E)$. 如果对于 X 的每个非循环 $Sylow$ 子群 P , P 的每个素数阶或 4 阶 (如果 X 的 $Sylow$ 2- 子群是非交换群) 循环子群在 G 中几乎 $S\Phi$ - 嵌入或有

超可解补, 则 $G \in \mathfrak{F}$.

参 考 文 献

- [1] 徐明曜. 有限群初步 [M]. 科学出版社, 2014.
- [2] Guo W. The theory of classes of groups [M]. Beijing, New York, Dordrecht, Boston, London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [3] Huppert B, Blackburn N. Finite groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [4] Isaacs I M. Finite group theory [M]. American Mathematical Soc., 2008.
- [5] Kegel O H. Sylow-gruppen und subnormalteiler endlicher gruppen [J]. Mathematische Zeitschrift, 1962, 78(1): 205–221.
- [6] Li D, Guo X. The influence of c -normality of subgroups on the structure of finite groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 150(1): 53–60.
- [7] Wang Y, Guo W. Nearly s -normality of groups and its properties [J]. Communications in Algebra, 2010, 38: 3821–3836.
- [8] Zhang L, Guo W, Huo L. On $S\Phi$ -embedded subgroups of finite groups [J]. University of Science and Technology of China, 2016, 22(1): 310–318.
- [9] Amjid V, Cao C, Mao Y. Finite groups with given nearly $S\Phi$ -embedded subgroups [J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2021, 14(1): 2150135.
- [10] Weinstein M. Between nilpotent and solvable [M]. Passaic, NJ: Polygonal Publishing House, 1982.
- [11] Kurzweil H, Stellmacher B. The theory of finite groups [J]. Universitext, 2004, 111(4): i–ii, 1–92.
- [12] Skiba A N. On two questions of L. A. Shemetkov concerning hypercyclically embedded subgroups of finite groups [J]. Journal of Group Theory, 2010, 13(6): 841–850.
- [13] Guo W, Skiba A N. On $\mathfrak{F}\Phi^*$ -hypercentral subgroups of finite groups [J]. Journal of Algebra, 2012, 372: 275–292.
- [14] Qiao S, Wang Y. s -Permutably embedded subgroups and p -supersolvable groups [J]. Science China Mathematics, 2014, 57(4): 729–736.
- [15] Berkovich Y, Janko Z. Groups of prime power order [M]. Walter de Gruyter, 2008.
- [16] Li D, Guo X. The influence of c -normality of subgroups on the structure of finite groups II [J]. Communications in Algebra, 1998, 26(6): 1913–1922.
- [17] Asaad M, Ramadan M, Shaalan A. Influence of π -quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of fitting subgroup of a finite group [J]. Archiv Der Mathematik, 1991, 56(6): 521–527.
- [18] Ballester-Bolinches A, Pedraza-Aguilera M C. Sufficient conditions for supersolubility of finite groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 1998, 127(2): 113–118.
- [19] Wei H. On c -normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups [J]. Communications in Algebra, 2001, 29(5): 2193–2200.
- [20] Buckley J. Finite groups whose minimal subgroups are normal [J]. Mathematische Zeitschrift, 1970, 116(1): 15–17.
- [21] Wang Y. C -normality of groups and its properties [J]. Journal of algebra, 1996, 180(3): 954–965.
- [22] Asaad M. On the solvability of finite groups [J]. Archiv der Mathematik, 1988, 51: 289–293.
- [23] Ballester-Bolinches A, Wang Y. Finite groups with some C -normal minimal subgroups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 153(2): 121–127.

NEARLY $S\Phi$ -EMBEDDED SUBGROUPS AND THE STRUCTURE OF FINITE GROUPS

HUO Li-jun, ZHU Qing-jiang

(College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: In this paper, we investigate the structure of a finite group G under the assumption that some subgroups of G are nearly $S\Phi$ -embedded, and a new characterization of p -nilpotence of finite groups will be obtained. Moreover, we will obtain two criteria for a finite group to lie in a given solvably saturated formation containing the class of finite supersolvable groups.

Keywords: finite group; nearly $S\Phi$ -embedded subgroup; *Sylow* subgroup; p -nilpotent; supersolvable group

2010 MR Subject Classification: 20D10; 20D20.