

利用广义 Brauer 集估计矩阵多项式特征值的界

饶秀省, 齐雅茹

(内蒙古工业大学理学院, 内蒙古 呼和浩特 010051)

摘要: 本文研究了矩阵多项式特征值界的估计问题. 利用广义 Brauer 集, 获得了矩阵多项式特征值的估计集合, 并讨论了该集合的闭性、对称性和有界性等性质. 最后给出了具体的算例, 比较了矩阵多项式的 Brauer 集与广义 Brauer 集在特征值估计方面的精确性.

关键词: 矩阵多项式; 特征值估计; 广义 Brauer 集

MR(2010) 主题分类号: 15A18; 15A22

中图分类号: O177.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2025)01-0072-09

1 引言

矩阵多项式特征值估计在现代工程学和数学物理等很多领域有重要的应用^[1]. 矩阵多项式特征值估计方法往往可以在一般矩阵特征值估计方法的基础上, 通过适当的推广而得到, 而矩阵特征值估计方法较为成熟. Brauer A 在 1947 年通过改进 Gershgorin 定理, 给出了矩阵特征值估计的 Brauer 定理^[2]. Li Chaoqian 和 Li Yaotang 在文^[3]中推广了矩阵特征值估计的 Brauer 定理, 给出了更为精确的广义 Brauer 集. 而矩阵多项式特征值的精确计算较为困难, 关于其数值计算见^[4, 5]. 在一些应用中, 需要对矩阵多项式特征值的界进行估计. 2001 年, Tisseur F 和 Higham N J 在文^[6]中刻画了矩阵多项式的伪谱, 以此来估计其特征值. 2009 年, 王学锋, 王卫国和刘新国介绍了几类特殊类型的矩阵多项式特征值界的估计方法^[7]. 2018 年, Michailidou C, Panayiotis P 将矩阵特征值估计的 Gershgorin 定理, 广义 Gershgorin 定理, Brauer 定理, Dashnic-Zusmanovich 定理进行推广, 得到了矩阵多项式的特征值估计相关定理以及相应的结果^[8]. 本文在以上工作的基础上, 将矩阵特征值估计的广义 Brauer 集推广到矩阵多项式, 给出了其特征值估计的广义 Brauer 集, 并对该集合的性质进行了详细的研究.

本文主要研究矩阵多项式 $P(\lambda)$, 即

$$P(\lambda) = A_m \lambda^m + A_{m-1} \lambda^{m-1} + \cdots + A_1 \lambda + A_0, \quad (1.1)$$

其中 $A_0, A_1, \dots, A_m \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($A_m \neq 0$), λ 为一个复变量, 且行列式 $\det P(\lambda)$ 不完全为零. 若 x_0 ($x_0 \in \mathbb{C}^n$) 是 $P(\mu)x = 0$ 的非零解, 则称 μ 为 $P(\lambda)$ 的特征值, 且 x_0 是对应于 μ 的特征向

*收稿日期: 2023-11-30 接收日期: 2024-09-02

基金项目: 国家自然科学基金资助 (12261065); 内蒙古自然科学基金 (2021LHMS01004); 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费项目资助 (JY20220151).

作者简介: 饶秀省 (1997-), 女, 河南, 硕士生, 主要研究方向: 算子理论及其应用.

E-mail: rao_xiuxing@163.com

通讯作者: 齐雅茹 (1982-), 女, 蒙古族, 内蒙古, 副教授, 主要研究方向: 算子理论及其应用.

Email: qiyaru@imut.edu.cn.

量. $P(\lambda)$ 的有限谱是所有有限特征值构成的集合, 即

$$\sigma(P) = \{\mu \in \mathbb{C} : \det(P(\mu)) = 0\} = \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \sigma(P(\mu))\}.$$

此外, 对于无穷特征值 $\mu = \infty$, 考虑矩阵多项式

$$\hat{P}(\lambda) := \lambda^m P(1/\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \lambda + A_m,$$

可验证 0 是 $\hat{P}(\lambda)$ 的特征值当且仅当 ∞ 是 $P(\lambda)$ 的特征值, 即可转化为研究 $\hat{P}(\lambda)$ 的 0 特征值问题.

下面列出与本文相关的引理和符号.

全文中规定 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$.

引理 1.1 ^[3] 设矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 对于任意的 $i, j \in N, j < i, \alpha \in [0, 1]$, 记

$$\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - (A)_{i,i}| |\mu - (A)_{j,j}| \leq \alpha r_i(A) r_j(A) + (1 - \alpha) c_i(A) c_j(A)\}, \quad (1.2)$$

则

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{T}_\alpha(A) := \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A),$$

进而

$$\sigma(A) \subseteq \mathcal{T}(A) := \bigcap_{\alpha \in [0,1]} \mathcal{T}_\alpha(A). \quad (1.3)$$

其中 $r_i(A) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |(A)_{i,j}|$, $c_i(A) = r_i(A^T)$, $(A)_{i,j}$ 为 A 的第 (i, j) 项. 称 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A)$ 为矩阵 A 的第 (i, j) 项广义 Brauer 集, 称 $\mathcal{T}(A)$ 为矩阵 A 的广义 Brauer 集.

类似于 (1.2) 式, 对于任意的 $i, j \in N, j < i, \alpha \in [0, 1]$, 下面给出矩阵多项式 $P(\lambda)$ 的相关集合. 记

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P) &:= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P(\mu))\} = \\ &\{\mu \in \mathbb{C} : |(P(\mu))_{i,i}| |(P(\mu))_{j,j}| \leq \alpha r_i(P(\mu)) r_j(P(\mu)) + (1 - \alpha) c_i(P(\mu)) c_j(P(\mu))\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\mathcal{T}_\alpha(P) := \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{T}_\alpha(P(\mu))\} = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P),$$

$$\mathcal{T}(P) := \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{T}(P(\mu))\} = \bigcap_{\alpha \in [0,1]} \mathcal{T}_\alpha(P). \quad (1.5)$$

其中 $r_i(P(\mu)) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |(P(\mu))_{i,j}|$, $c_i(P(\mu)) = r_i((P(\mu))^T)$, 同时称 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 为矩阵多项式 $P(\lambda)$ 的第 (i, j) 项广义 Brauer 集, 称 $\mathcal{T}(P)$ 为矩阵多项式 $P(\lambda)$ 的广义 Brauer 集. 此外,

$$\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(\hat{P}) \setminus \{0\} := \{\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P(\mu^{-1}))\} = \{\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mu^{-1} \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)\}, \quad (1.6)$$

进一步

$$\mathcal{T}(\hat{P}) \setminus \{0\} := \{\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : 0 \in \mathcal{T}(P(\mu^{-1}))\} = \{\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mu^{-1} \in \mathcal{T}(P)\},$$

即当 $\mu = 0$ 位于 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(\hat{P})$ 中 (也位于 $\mathcal{T}(\hat{P})$ 中) 时, $\mu = \infty$ 位于 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 中 (也位于 $\mathcal{T}(P)$ 中).

在 (1.4) 式中, 当 $\alpha = 1$ 和 0 时, 集合退化为文献 [8] 中定义 4.1 的 Brauer 集及转置情形的 Brauer 集,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{i,j}(P) &:= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{B}_{i,j}(P(\mu))\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : |(P(\mu))_{i,i}| |(P(\mu))_{j,j}| \leq r_i(P(\mu)) r_j(P(\mu))\}, \\ \mathcal{B}(P) &:= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{B}(P(\mu))\} = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathcal{B}_{i,j}(P). \end{aligned}$$

因此本文只讨论 $\alpha \in (0, 1)$ 的情况.

2 主要结论及其证明

下面利用矩阵多项式的广义 Brauer 估计其特征值的范围.

定理 2.1 设 $P(\lambda)$ 为由 (1.1) 式定义的矩阵多项式, 则 $P(\lambda)$ 的特征值包含在其广义 Brauer 集 ((1.5) 式) 中.

证 设 μ 为矩阵多项式 $P(\lambda)$ 的有限特征值, 即 $\mu \in \sigma(P)$, 由 (1.3) 式有 $0 \in \sigma(P(\mu)) \subseteq \mathcal{T}(P(\mu))$, 进而有 $\mu \in \mathcal{T}(P)$. 对于 $P(\lambda)$ 的无限特征值 $\mu = \infty$, 有 $0 \in \sigma(\hat{P}(\mu)) \subseteq \mathcal{T}(\hat{P}(\mu))$, 即 $\mu = \infty$ 包含在 $\mathcal{T}(P)$ 中. 故广义 Brauer 集包含 $P(\lambda)$ 的所有特征值.

接着讨论矩阵多项式的广义 Brauer 集的基本性质.

定理 2.2 令 $i, j \in N$, 则对由 (1.1) 式中定义的 $n \times n$ 阶矩阵多项式 $P(\lambda)$, 以下结论成立

- (i) $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 是 \mathbb{C} 的闭子集.
- (ii) 对任意 $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 若矩阵多项式满足

$$Q_1(\lambda) = P(b\lambda), \quad Q_2(\lambda) = P(\lambda + b),$$

则有

$$\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(Q_1) = b^{-1} \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P), \quad \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(Q_2) = \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P) - b.$$

- (iii) 如果 $(P(\lambda))_{i,i} = 0$ 或 $(P(\lambda))_{j,j} = 0$, 那么 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P) = \mathbb{C}$.

(iv) 若系数矩阵 A_0, A_1, \dots, A_m 的第 i 行, 第 i 列; 第 j 行, 第 j 列均为实数, 则 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 相对于实轴对称.

证 (i) 令 $\mu \notin \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 于是

$$|(P(\mu))_{i,i}| |(P(\mu))_{j,j}| > \alpha r_i(P(\mu)) r_j(P(\mu)) + (1 - \alpha) c_i(P(\mu)) c_j(P(\mu)).$$

由连续性, 存在无限接近于 μ 的 $\hat{\mu}$, 使得

$$|(P(\hat{\mu}))_{i,i}| |(P(\hat{\mu}))_{j,j}| > \alpha r_i(P(\hat{\mu})) r_j(P(\hat{\mu})) + (1 - \alpha) c_i(P(\hat{\mu})) c_j(P(\hat{\mu})),$$

故 $\hat{\mu} \notin \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 因此集合 $\mathbb{C} \setminus \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 是开集, 即 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 是 \mathbb{C} 的闭子集.

(ii) 通过 (1.4) 式, 易得

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(Q_1) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P(b\mu))\} = \left\{\frac{\mu}{b} \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P(\mu))\right\}, \\ \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(Q_2) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P(\mu+b))\} = \{\mu - b \in \mathbb{C} : 0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P(\mu))\}.\end{aligned}$$

(iii) 如果 $(P(\lambda))_{i,i} = 0$ 或 $(P(\lambda))_{j,j} = 0$, 那么对任意的 $\mu \in \mathbb{C}$, 不等式

$$|(P(\mu))_{i,i}| |(P(\mu))_{j,j}| \leq \alpha r_i(P(\mu)) r_j(P(\mu)) + (1 - \alpha) c_i(P(\mu)) c_j(P(\mu))$$

恒成立, 于是 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P) = \mathbb{C}$.

(iv) 对任意的 $\mu \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 如果系数矩阵 A_0, A_1, \dots, A_m 的第 i 行, 第 i 列; 第 j 行, 第 j 列均为实数, 那么

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,i} \mu^k \right| \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,j} \mu^k \right| &\leq \alpha \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,p} \mu^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,p} \mu^k \right| \right) \\ &+ (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,i} \mu^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,j} \mu^k \right| \right),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\overline{\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,i} \mu^k \right|} \overline{\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,j} \mu^k \right|} &\leq \alpha \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{i\}} \overline{\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,p} \mu^k \right|} \right) \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{j\}} \overline{\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,p} \mu^k \right|} \right) \\ &+ (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{i\}} \overline{\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,i} \mu^k \right|} \right) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{j\}} \overline{\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,j} \mu^k \right|} \right)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,i} \bar{\mu}^k \right| \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,j} \bar{\mu}^k \right| &\leq \alpha \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,p} \bar{\mu}^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,p} \bar{\mu}^k \right| \right) \\ &+ (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,i} \bar{\mu}^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,j} \bar{\mu}^k \right| \right).\end{aligned}$$

于是 $\bar{\mu} \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 故 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 相对于实轴对称.

在 (1.4) 式中, 当不等式分别取 “<” 和 “=” 时, 广义 Brauer 中内点和边界点满足如下的性质.

定理 2.3 令 $i, j \in N, j < i$, 那么集合

$$\{\mu \in \mathbb{C} : |(P(\mu))_{i,i}| |(P(\mu))_{j,j}| < \alpha r_i(P(\mu)) r_j(P(\mu)) + (1 - \alpha) c_i(P(\mu)) c_j(P(\mu))\}$$

位于 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 集的内部. 进一步, $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 的边界 $\partial\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 满足

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P) &\subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \partial\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P(\mu))\} = \{\mu \in \mathbb{C} : |(P(\mu))_{i,i}| |(P(\mu))_{j,j}| \\ &= \alpha r_i(P(\mu)) r_j(P(\mu)) + (1 - \alpha) c_i(P(\mu)) c_j(P(\mu))\}.\end{aligned}$$

证 设 $\mu \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 即

$$|(P(\mu))_{i,i}| |(P(\mu))_{j,j}| < \alpha r_i(P(\mu)) r_j(P(\mu)) + (1 - \alpha) c_i(P(\mu)) c_j(P(\mu)).$$

由连续性, 存在 $\varepsilon > 0$, 对于 $\hat{\mu} \in \mathbb{C}$, 当 $|\mu - \hat{\mu}| \leq \varepsilon$ 时, 都有

$$|(P(\hat{\mu}))_{i,i}| |(P(\hat{\mu}))_{j,j}| < \alpha r_i(P(\hat{\mu})) r_j(P(\hat{\mu})) + (1 - \alpha) c_i(P(\hat{\mu})) c_j(P(\hat{\mu})),$$

于是 μ 是 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 的内点.

下面再讨论广义 Brauer 的有界性. 对于 $i, j \in N$, $j < i$, 定义如下集合

$$\begin{aligned}\beta_i &= \{p \in \mathcal{N} : (A_m)_{i,p} \neq 0\}, & \bar{\beta}_i &= N \setminus \beta_i = \{p \in \mathcal{N} : (A_m)_{i,p} = 0\}, \\ \gamma_i &= \{q \in \mathcal{N} : (A_m)_{q,i} \neq 0\}, & \bar{\gamma}_i &= N \setminus \gamma_i = \{q \in \mathcal{N} : (A_m)_{q,i} = 0\}, \\ \beta_j &= \{p \in \mathcal{N} : (A_m)_{j,p} \neq 0\}, & \bar{\beta}_j &= N \setminus \beta_j = \{p \in \mathcal{N} : (A_m)_{j,p} = 0\}, \\ \gamma_j &= \{q \in \mathcal{N} : (A_m)_{q,j} \neq 0\}, & \bar{\gamma}_j &= N \setminus \gamma_j = \{q \in \mathcal{N} : (A_m)_{q,j} = 0\}.\end{aligned}$$

定理 2.4 假设 $\beta_i, \gamma_i, \beta_j, \gamma_j$ 非空, 那么

(i) 若 $i \in \beta_i$ (即 $i \in \gamma_i$), $j \in \beta_j$ (即 $j \in \gamma_j$), 且 0 不是 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(\hat{P})$ 的孤立点, 则 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 无界当且仅当 $0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A_m)$.

(ii) 若 $i \in \bar{\beta}_i$ (即 $i \in \bar{\gamma}_i$), $j \in \bar{\beta}_j$ (即 $j \in \bar{\gamma}_j$), 则 $0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A_m)$ 且 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 是无界的.

证 (i) 先证必要性.

当 $i \in \beta_i, j \in \beta_j$ 时, 有 $(A_m)_{i,i} \neq 0, (A_m)_{j,j} \neq 0$. 由原点不是 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(\hat{P})$ 的孤立点, $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 无界, 令 $\{\mu_l\}_{l \in N}$ 为 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P) \setminus \{0\}$ 中的序列, $|\mu_l| \rightarrow \infty$, 故对任意的 $l \in N$, 有

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,i} \mu_l^k \right| \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,j} \mu_l^k \right| &\leq \alpha \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,p} \mu_l^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,p} \mu_l^k \right| \right) \\ &+ (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,i} \mu_l^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,j} \mu_l^k \right| \right),\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,i} \frac{\mu_l^k}{\mu_l^m} \right| \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,j} \frac{\mu_l^k}{\mu_l^m} \right| &\leq \alpha \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,p} \frac{\mu_l^k}{\mu_l^m} \right| \right) \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,p} \frac{\mu_l^k}{\mu_l^m} \right| \right) \\ &+ (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,i} \frac{\mu_l^k}{\mu_l^m} \right| \right) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,j} \frac{\mu_l^k}{\mu_l^m} \right| \right).\end{aligned}$$

当 $l \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} |(A_m)_{i,i}| |(A_m)_{j,j}| &\leq \alpha \cdot \left(\sum_{p \in \beta_i \setminus \{i\}} |(A_m)_{i,p}| \right) \cdot \left(\sum_{p \in \beta_j \setminus \{j\}} |(A_m)_{j,p}| \right) \\ &+ (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in \gamma_i \setminus \{i\}} |(A_m)_{q,i}| \right) \cdot \left(\sum_{q \in \gamma_j \setminus \{j\}} |(A_m)_{q,j}| \right), \end{aligned}$$

故 $0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A_m)$.

再证充分性.

由于 $0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A_m)$, 即

$$|(A_m)_{i,i}| |(A_m)_{j,j}| \leq \alpha r_i(A_m) r_j(A_m) + (1 - \alpha) c_i(A_m) c_j(A_m),$$

故 $0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(\hat{P})$, 由 (1.6) 式得 $\infty \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ (根据假设 0 不是 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(\hat{P})$ 的孤立点, 从而 ∞ 不是 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 孤立点), 因此 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 是无界的.

(ii) 因为 $i \in \bar{\beta}_i, j \in \bar{\beta}_j$, 所以有 $(A_m)_{i,i} = (A_m)_{j,j} = 0$. 因此 $0 \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(A_m)$, 且

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P) \setminus \{0\} &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_k)_{i,i} \mu^k \right| \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_k)_{j,j} \mu^k \right| \leq \right. \\ &\quad \alpha \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,p} \mu^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,p} \mu^k \right| \right) \\ &\quad \left. + (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,i} \mu^k \right| \right) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,j} \mu^k \right| \right) \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_k)_{i,i} \frac{\mu^k}{\mu^m} \right| \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_k)_{j,j} \frac{\mu^k}{\mu^m} \right| \leq \right. \\ &\quad \alpha \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{i,p} \frac{\mu^k}{\mu^m} \right| \right) \cdot \left(\sum_{p \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{j,p} \frac{\mu^k}{\mu^m} \right| \right) \\ &\quad \left. + (1 - \alpha) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{i\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,i} \frac{\mu^k}{\mu^m} \right| \right) \cdot \left(\sum_{q \in N \setminus \{j\}} \left| \sum_{k=0}^m (A_k)_{q,j} \frac{\mu^k}{\mu^m} \right| \right) \right\}, \end{aligned}$$

其中系数矩阵 $(A_m)_{i,p}, p \in N \setminus \{i\}$ 和 $(A_m)_{j,p}, p \in N \setminus \{j\}$ 分别至少存在一项同时不为零, 且 $(A_m)_{q,i}, q \in N \setminus \{i\}$ 和 $(A_m)_{q,j}, q \in N \setminus \{j\}$ 分别至少存在一项同时不为零. 因此对于足够大的 $|\mu|$, 有 $\mu \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 即存在实数 $M > 0$, 使得对任意 $|\mu| \geq M$ ($\mu \in \mathbb{C}$), 有 $\mu \in \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 即 $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \geq M\} \subseteq \mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$, 故 $\mathcal{T}_{i,j,\alpha}(P)$ 是无界的.

3 例子

下面通过算例来比较文中的广义 Brauer 集与文献 [8] 中的 Brauer 集.

例 3.1 设矩阵多项式

$$P_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 4.2\lambda^2 - i & 4\lambda^2 & 0 \\ \lambda - 3 & \lambda^2 + 4 & 0 \\ -2\lambda + i & \lambda^2 + 2 & 2\lambda^2 - 1 \end{pmatrix},$$

经计算可得矩阵多项式 $P_1(\lambda)$ 的特征值, 从下面的表 1 可见.

表 1 $P_1(\lambda)$ 的特征值

$\lambda_1 = -0.70711$	$\lambda_2 = -0.26133 - 0.25624i$	$\lambda_3 = 0.26106 + 0.27554i$
$\lambda_4 = 0.45527 - 2.58420i$	$\lambda_5 = 0.49738 + 2.56489i$	$\lambda_6 = 0.70711$

矩阵多项式 $P_1(\lambda)$ 的 Brauer 集和广义 Brauer 集分别见图 1 和图 2.

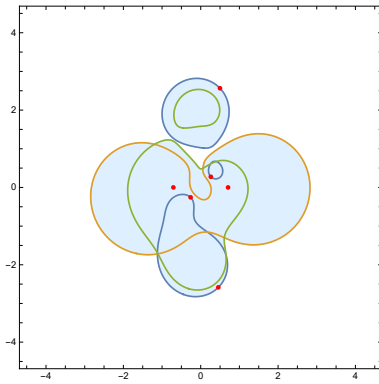


图 1: Brauer 集

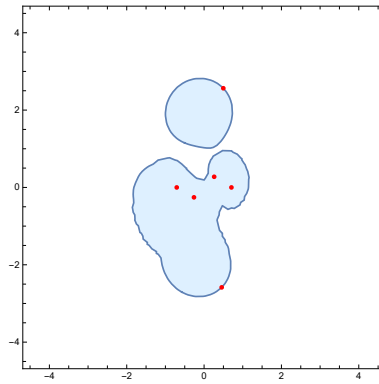


图 2: 广义 Brauer 集

例 3.2 设矩阵多项式

$$P_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 8i\lambda^2 - 2i\lambda + 2 & 2i\lambda^2 + i\lambda + (1 + 2i) & (-1 + i)\lambda^2 + \lambda + 2 \\ -3i\lambda^2 + 5i\lambda + (1 + i) & -8i\lambda^2 + 3i\lambda + 4i & (2 - 2i)\lambda^2 - 4\lambda - 5i \\ (0.8 - i)\lambda^2 + i\lambda + (1 - i) & 0.6i\lambda^2 - i\lambda & (6 - 2i)\lambda^2 + 2i \end{pmatrix},$$

经计算可得矩阵多项式 $P_2(\lambda)$ 的特征值, 从下面的表 2 可见.

表 2 $P_2(\lambda)$ 的特征值

$\lambda_1 = -0.65557 - 0.24000i$	$\lambda_2 = 0.50236 + 0.50427i$	$\lambda_3 = -0.12495 - 0.41323i$
$\lambda_4 = 0.30855 + 0.21264i$	$\lambda_5 = 0.76307 - 0.47483i$	$\lambda_6 = 0.82529 + 0.41726i$

矩阵多项式 $P_2(\lambda)$ 的 Brauer 集和广义 Brauer 集分别见图 3 和图 4.

例 3.3 设矩阵多项式

$$P_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 8i\lambda^2 - 2i\lambda + 2 & 2i\lambda^2 + i\lambda + (1 + 2i) & (-1 + i)\lambda^2 + \lambda + 2 \\ -3i\lambda^2 + 5i\lambda + (1 + i) & -6i\lambda^2 + 3i\lambda + 4i & (2 - 2i)\lambda^2 - 4\lambda - 5i \\ (0.8 - i)\lambda^2 + i\lambda + (1 - i) & 6i\lambda^2 - i\lambda & (6 - 2i)\lambda^2 + 2i \end{pmatrix},$$

经计算可得矩阵多项式 $P_3(\lambda)$ 的特征值, 从下面的表 3 可见.

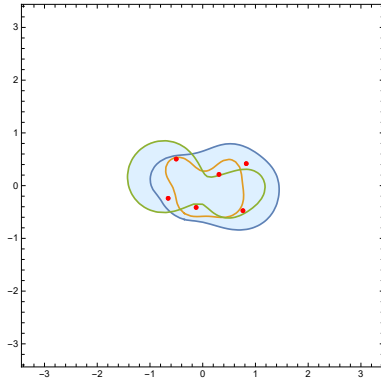


图 3: Brauer 集

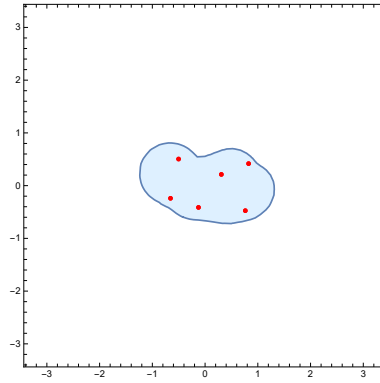


图 4: 广义 Brauer 集

表 3 $P_3(\lambda)$ 的特征值

$\lambda_1 = -0.582418 - 0.391751i$	$\lambda_2 = -0.271887 + 0.479236i$	$\lambda_3 = -0.149702 - 0.489273i$
$\lambda_4 = 0.357218 + 0.305346i$	$\lambda_5 = 0.46395 - 0.314049i$	$\lambda_6 = 1.10778 + 0.683379i$

矩阵多项式 $P_3(\lambda)$ 的 Brauer 集和广义 Brauer 集分别见图 5 和图 6.

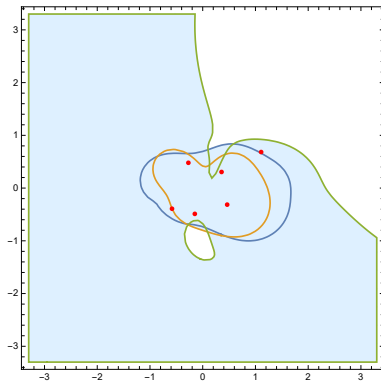


图 5: Brauer 集

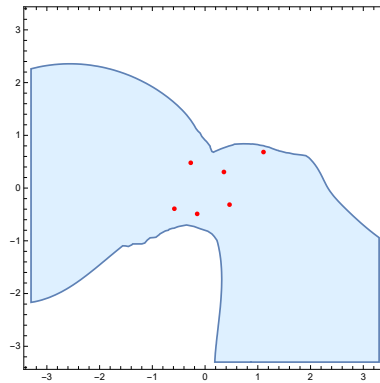


图 6: 广义 Brauer 集

注 以上三个例子中, 图中红色点为相应矩阵多项式的特征值, 蓝色区域为特征值的估计区域. 显然例 3.1 和例 3.2 中的估计区域均为有界区域, 而例 3.3 中的估计区域均为无界区域. 无论特征值估计区域是否有界, 广义 Brauer 集给出的估计区域更为精确.

参考文献

- [1] Betcke T, Higham N J, Mehrmann V, Schröder C, Tisseur F. NLEVP: A collection of nonlinear eigenvalue problems[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2013, 39(2): 1–28.
- [2] Brauer A. Limits for the characteristic roots of a matrix II[J]. Duke Mathematical Journal, 1947, 14(1): 21–26.
- [3] Li Chaoqian, Li Yaotang. Generalizations of Brauer's eigenvalue localization theorem[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2011, 22: 1168–1178.

- [4] Feriani A, Perotti F, Simoncini V. Iterative system solvers for the frequency analysis of linear mechanical systems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 190(13-14): 1719–1739.
- [5] Simoncini V, Perotti F. On the numerical solution of $(\lambda^2 A + \lambda B + C)x = b$ and applications to structural dynamics[J]. *Siam Journal of Scientific Computing*, 2002, 23(6): 1875–1897.
- [6] Tisseur F, Higham N J. Structured pseudospectra for polynomial eigenvalue problems, with applications[J]. *Siam Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2001, 23(1): 187–208.
- [7] 王学锋, 王卫国, 刘新国. 关于矩阵多项式特征值界的注记 [J]. *计算数学*, 2009, 31(3): 243–252.
- [8] Michailidou C, Psarrakos P. Gershgorin type sets for eigenvalues of matrix polynomials[J]. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 2018, 34: 652–674.

ESTIMATION OF EIGENVALUES OF MATRIX POLYNOMIALS BY GENERALIZED BRAUER SET

RAO Xiu-xing, QI Ya-ru

(School of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

Abstract: In this paper, we investigate the problem of estimating the eigenvalue bounds of matrix polynomials. By employing the generalized Brauer set, we derive an estimation set for the eigenvalues of matrix polynomials and discuss its properties, including closure, symmetry, and boundedness. Finally, we present some concrete examples to compare the accuracy of the traditional Brauer set with the generalized Brauer set in eigenvalue estimation.

Keywords: matrix Polynomial; eigenvalue estimation; the generalized Brauer set

2010 MR Subject Classification: 15A18; 15A22