Vol. 44 (2024)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

具有较小点数区本原对称设计的分类

占莉雯, 詹小秦
(华东交通大学理学院, 江西 南昌 330013)

摘 要: 研究区传递 2- 设计的分类是置换群与组合设计领域中的重要课题之一. 目前关于区传递 2- 设计的分类主要集中在自同构群具有旗传递性和点本原性上. 本文研究了区本原 2-(v,k,λ) 对称设计的分类问题, 并证明了当设计的点数不大于 200 且自同构群不为仿射型时, 在同构意义下只存在 54 个这样的设计.

关键词: 区本原; 自同构群; 对称设计; 几乎单型; 乘积型
MR(2010) **主题分类号**: 05B05; 20B25 **中图分类号**: O152.1
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)06-0551-11

1 引言

一个 2-(v,k,λ) 设计 $\mathcal{D}$ 是指满足下列条件的关联结构 $(\mathcal{P},\mathcal{B})$:
(1) $\mathcal{P}$ 是由 v 个元素组成的一个集合, $\mathcal{P}$ 中的元素称为点;
(2) $\mathcal{B}$ 是由 $\mathcal{P}$ 中的 k 元子集组成的一个集族, $\mathcal{B}$ 中的元素称为区组或者区;
(3) $\mathcal{P}$ 中任意两个点恰好包含在 $\mathcal{B}$ 中的 λ 个区组内.

在一个 2-(v,k,λ) 设计 $\mathcal{D}$ 中, 通常用 b 来表示 $\mathcal{B}$ 中元素的个数, 即 $|\mathcal{B}|=b$, 用 r 来表示 $\mathcal{P}$ 中任意一点所在区组的个数. 以上所给出的参数都是正整数, 若参数满足 $3<k<v-1$, 则称设计 $\mathcal{D}$ 是非平凡设计. 此外, 若参数还满足 $b<\binom{v}{k}$, 则称设计 $\mathcal{D}$ 是非完全设计. 特别地, 当 $b=v$ 时, 称 $\mathcal{D}$ 为对称设计.

设计 $\mathcal{D}$ 到自身的同构称为它的自同构, 显然它是保持 $\mathcal{B}$ 不变的 $\mathcal{P}$ 上的一个置换. 一个设计的所有自同构组成一个群, 称其为这个设计的全自同构群, 记为 $Aut(\mathcal{D})$. 其中它的任意一个子群 G 称为 $\mathcal{D}$ 的一个自同构群, 记为 $G\le Aut(\mathcal{D})$. 若 G 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上是传递 (本原) 的, 则称 G 是点传递 (点本原) 的, 或称设计 $\mathcal{D}$ 是点传递 (点本原) 的. 若 G 作用在区集 $\mathcal{B}$ 上是传递 (本原) 的, 则称 G 是区传递 (区本原) 的, 或称设计 $\mathcal{D}$ 是区传递 (区本原) 的. 类似地还有旗 (反旗) 传递的定义, 旗和反旗都是 $\mathcal{D}$ 上的一个点区对 (α,B), 其中旗满足 $\alpha\in B$; 而反旗满足 $\alpha\notin B$. 若自同构群 G 是区 (旗) 传递的, 则称设计 $\mathcal{D}$ 中的任意一个区为基区. 令 $\mathcal{B}'=\{\mathcal{P}\setminus \mathrm{B}|\mathrm{B}\in\mathcal{B}\}$, 则称关联结构 $\mathcal{D}'=(\mathcal{P},\mathcal{B}')$ 为 $\mathcal{D}$ 的补设计, 且 $\mathcal{D}'$ 是一个 2-$(v,v-k,b-2k+\lambda)$ 设计.

*收稿日期: 2024-08-05 接收日期: 2024-09-23
基金项目: 国家自然科学基金资助 (12361004); 江西省自然科学基金资助 (20224BAB211005, 20242BAB25005).
作者简介: 占莉雯 (2001–), 女, 研究生, 研究方向: 置换群与组合设计. E-mail: 2731976870@qq.com.
通讯作者: 詹小秦 (1988–), 男, 副教授, 主要研究方向: 置换群与组合设计.
E-mail: zhanxiaoqinshuai@163.com.

在研究组合设计的分类问题时, 我们常常赋予该设计某种传递性, 比如旗传递、区传递、点传递、区本原、点本原、点非本原等等, 由上面给出的相关定义可知, 若 2-(v,k,λ) 设计的自同构群 G 是旗传递的, 则 G 即是点传递的也是区传递的. 1967 年 Block[1] 证明了区传递自同构群一定是点传递的, 特别地, 对于对称设计而言, 其自同构群作用在点上和区上的轨道数相等, 因此, 对称设计自同构群的区传递性与点传递性等价. 然而, 自同构群的旗传递性、区传递性或区本原性都不能推导出点本原性. 因此学者们在研究这部分内容时往往要对设计的参数或者设计的自同构群类型加以限制. 早在 1961 年 Higman 和 McLaughlin[2] 证明了 2-$(v,k,1)$ 设计的旗传递自同构群是点本原的. 1989 年 Delandtsheer 和 Doyen[3] 证明了当 $v>(\binom{k}{2}-1)^2$ 时, t-(v,k,λ) 设计的区传递自同构群是点本原的. 同年 Delandtsheer[4] 证明了若 2-$(v,k,1)$ 设计的自同构群 G 是区本原的, 则 G 一定是几乎单型或仿射型本原群. 之后关于自同构群为区本原的研究结果大都集中在 2-$(v,k,1)$ 设计上, 详细可参考文献 [5–7].

1985 年, Kantor[8] 对自同构群为 2- 传递的对称设计完成了分类. 2001 到 2004 年期间 Dempwolff[9, 10] 完成自同构群为本原秩 3 几乎单型或仿射型对称设计的分类. 2010 年 Braić[11] 等四人给出了点数为素数次幂且小于 2500 的所有点本原对称设计, 紧接着在 2011 年他们 [12] 又给出了点数不为素数次幂且小于 2500 的所有点本原对称设计. 近期 Alavi[13] 对基柱为散在单群的旗传递对称设计进行了分类, 并得到了一个点非本原的旗传递对称设计.

本文将从另外一个角度来研究具有高度对称性 2- 设计的分类, 并给出了点数不超过 200 的区本原对称设计的分类, 得到如下结果:

定理 1.1 设 $\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个非平凡的区本原对称 2-(v,k,λ) 设计, 若 $G\le Aut(\mathcal{D})$ 不是仿射型且 $v\le 200$, 则存在 54 个两两不同构的设计. 特别地, 当 $k\le\frac{v}{2}$ 时, $\mathcal{D}$ 为下列情形之一:

(1) $\mathcal{D}$ 是射影几何 $PG(n,q)$ 中的点 - 超平面设计, 即 2-$(\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\frac{q^n-1}{q-1},\frac{q^{n-1}-1}{q-1})$ 设计. 其中 (n,q) 为下表 17 种情况之一:

表 1 射影几何 $PG(n,q)$ 中的 17 个点 - 超平面设计

情形	n	q	情形	n	q
1	2	2	10	2	8
2	2	3	11	3	4
3	3	2	12	2	9
4	2	4	13	4	3
5	4	2	14	6	2
6	2	5	15	2	11
7	3	3	16	3	5
8	2	7	17	2	13
9	5	2			

(2) $\mathcal{D}$ 是一个 $2-(\frac{3^m(3^m+1)}{2},\frac{3^{m-1}(3^m-1)}{2},\frac{3^{m-1}(3^{m-1}-1)}{2})$ 对称设计, 其中 $m=2$, 即 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(45,12,3) 设计;

(3) $\mathcal{D}$ 是一个 2-$(4t-1,2t-1,t-1)$ 设计 (Hadamard 设计), 其中 $t=3$ 或 $t=9$, 即 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(11,5,2) 设计、2-(35,17,8) 设计;

(4) $\mathcal{D}$ 是一个 2-$(4t^2,2t^2-t,t^2-t)$ 设计 (Menon 设计), 其中 $t=3$ 或 $t=6$, 即 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(36,15,6) 设计、2-(144,66,30) 设计;

(5) $\mathcal{D}$ 是一个 2-(56,11,2) 设计 (Biplane);

(6) $\mathcal{D}$ 是一个 2-(176,50,14) 设计 (Higman 设计).

注 当设计的自同构群具有区本原性时, 在同构意义下, 存在两个不同的 2-(36,15,6) 设计、两个不同的 2-(40,13,4) 设计和两个不同的 2-(63,31,15) 设计; 其余设计在同构意义下均只有一个.

推论 1.1 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 对称设计, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ 是区本原的, 当 $v \leq 200$ 时, 除了唯一一个 2-(144,66,30) 设计, 其他设计的自同构群 G 都是点本原的.

推论 1.2 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 对称设计, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ 是区本原的, 当 $v \leq 200$ 时, 则 G 只能是仿射型或几乎单型.

推论 1.3 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 对称设计, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ 是区本原的, 当 $v \leq 200$ 时, 除了下面 12 种情形之外, 其余 42 个设计的自同构群只能是旗传递的.

表 2 自同构群具有反旗传递性的对称设计

情形	(v,k,λ)	G	次级数	传递性
1	(15,7,3)	A_6	1, 6, 8	反旗传递
		S_6	1, 6, 8	反旗传递
		A_7	7, 8	旗传递
		$PSL(4,2)$	7, 8	旗传递
2	(35,17,8)	A_7	1, 4, 12, 18	反旗传递
		S_7	1, 4, 12, 18	反旗传递
		A_8	1, 16, 18	反旗传递
		S_8	1, 16, 18	反旗传递
3	(36,15,6)	$P\Gamma U(3,3)$	1, 14, 21	反旗传递
		$PSp(4,3)$	1, 15, 20	旗传递
		$PSp(4,3):2$	1, 15, 20	旗传递
4	(36,21,12)	$P\Gamma U(3,3)$	1, 14, 21	旗传递
		$PSp(4,3)$	1, 15, 20	反旗传递
		$PSp(4,3):2$	1, 15, 20	反旗传递
5	(40,13,4)	$PSp(4,3)$	1, 12, 27	反旗传递
		$PSp(4,3):2$	1, 12, 27	反旗传递
		$PSL(4,3)$	13, 27	旗传递
		$PGL(4,3)$	13, 27	旗传递
6	(45,33,24)	$PSp(4,3)$	1, 12, 32	反旗传递
		$PSp(4,3):2$	1, 12, 32	反旗传递
7	(56,11,2)	$PSL(3,4)$	1, 10, 45	反旗传递
		$PSL(3,4).2_1$	1, 10, 45	反旗传递
		$PSL(3,4).2_2$	1, 10, 45	反旗传递
		$PSL(3,4).2_3$	1, 10, 45	反旗传递
		$PSL(3,4).2^2$	1, 10, 45	反旗传递
8	(63,31,15)	$PSU(3,3)$	1, 6, 24, 32	反旗传递
		$PSU(3,3).2$	1, 6, 24, 32	反旗传递
		$PSp(6,2)$	1, 30, 32	反旗传递
		$PSL(6,2)$	31, 32	旗传递

情形	(v,k,λ)	G	次级数	传递性
9	(85,21,5)	$PSp(4,4)$	1, 20, 64	反旗传递
		$PSp(4,4).2$	1, 20, 64	反旗传递
		$PSL(4,4)$	21, 64	旗传递
		$P\Sigma L(4,4)$	21, 64	旗传递
10	(144,78,42)	M_{12}	1, 11, 11, 55, 66	反旗传递
		$M_{12}.2$	1, 22, 55, 66	反旗传递
11	(156,31,6)	$PSp(4,5)$	1, 30, 125	反旗传递
		$PSp(4,5).2$	1, 30, 125	反旗传递
		$PSL(4,5)$	1, 30, 125	反旗传递
		$PSL(4,5).2$	31, 125	旗传递
		$PGL(4,5)$	31, 125	旗传递
12	(176,50,14)	M_{22}	15, 35, 126	反旗传递
		HS	50, 126	旗传递

2 相关引理

下面给出证明定理 1.1 的一些重要引理.

引理 2.1 [14] 设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 对称设计, 则其参数 (v,k,λ) 满足 $\lambda(v-1)=k(k-1)$.

引理 2.2 [15] 若存在以 G 为区本原自同构群的 2-(v,k,λ) 设计 $\mathcal{D}$, 则区长 k 一定是区稳定子群 G_B 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的若干个轨道的长度之和.

证 设 G 是一个 2-(v,k,λ) 设计的区本原自同构群, 对任意区组 B, 都有 $B^{G_B}=B$, 所以区组 B 为 G_B 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的若干个轨道的并, 即区长 k 一定是区稳定子群 G_B 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的若干个轨道的长度之和.

由 2- 设计的定义可知:

引理 2.3 设 G 是点集 $\mathcal{P}$ 上的 2- 传递群, 对 $\mathcal{P}$ 中任意 k- 子集 B, 则关联结构 $(\mathcal{P},B^G)$ 是区传递 2- 设计.

引理 2.4 (射影几何基本定理)$G=P\Gamma L(n+1,q)$ 为射影几何 $PG(n,q)$ 中点 - 超平面设计的区本原且点本原的全自同构群.

引理 2.5 若 G 是对称设计 $\mathcal{D}$=$(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 上的区本原自同构群, 则 G 也一定是其补设计 $\mathcal{D}'$ 上的区本原自同构群.

证 反证法, 设 $G\leq Aut(\mathcal{D})$ 作用在 $\mathcal{B}'$=$\{\mathcal{P}\setminus \mathrm{B}|\mathrm{B}\in\mathcal{B}\}$ 是非本原的, 且 $\{\triangle_1',\triangle_2',\cdots,\triangle_t'\}$ 是区集 $\mathcal{B}'$ 的非本原划分, 其中每个非本原块 $\triangle_t'(1\leq i\leq t)$ 的长为 s, 则有 $\mathcal{B}'$=$\triangle_1'\cup\triangle_2'\cup\cdots\cup\triangle_t'$ 且 $b=st$. 再令 $\triangle_i$=$\{\mathrm{B}|\mathcal{P}\setminus\mathrm{B}\in\triangle_t'\}$, 则 $\{\triangle_1,\triangle_2,\cdots,\triangle_t\}$ 为 $\mathcal{B}$ 上的非本原划分, 即 G 在区集 $\mathcal{B}$ 上存在非本原划分, 与 G 是 $\mathcal{D}$ 上的区本原自同构群矛盾.

3 定理的证明

下面用 3.1 和 3.2 节来证明定理 1.1, 在 3.3 节中用两个具体的实例来说明本文的方法.

3.1 参数的可能性

由于 $\mathcal{D}$ 的非平凡性及引理 2.1 可知, 对称设计 $\mathcal{D}$ 的参数 (v,k,λ) 必须满足下面三个条件:

(1) $v\leq 200$;

(2) $3 \le k \le v-2$;

(3) $\lambda = \frac{k(k-1)}{v-1}$ 是一个整数.

根据这三个条件, 并借助代数软件 Magma 共得到了 400 组满足这些条件的参数 (v,k,λ). 由引理 2.5 可知, 若 $\mathcal{D}$ 是一个区本原 2-(v,k,λ) 对称设计, 则其补设 $\mathcal{D}'$ 也是区本原的. 因此不妨假定 $k \le \frac{v}{2}$, 这时只需考虑 200 组参数 (v,k,λ).

3.2 参数的分析

下面在这 200 组的 (v,k,λ) 基础上筛选出符合设计条件的参数 (v,k,λ,G).

易知当点数 $v \le 200$ 时, 自同构群 G 可以由 Magma 命令 PrimitiveGroup(v,n) 得到, 且 G 只能是仿射型、几乎单型或乘积型. 若只考虑自同构群为几乎单型或乘积型的情况, 此时共有 598 组 (v,k,λ,G).

当 $Soc(G)=A_v$ 或 S_v 时, G 是 $(v-2)$- 传递作用在点集 $\mathcal{P}$ 上. 由引理 2.3 可知, 对 $\mathcal{P}$ 中任意 k- 子集 B, 关联结构 $(\mathcal{P},B^G)$ 一定是区数 $b=\binom{v}{k}$ 的一个设计. 又由 $\mathcal{D}$ 的非平凡性可知 $b \ne v$, 与 $\mathcal{D}$ 是对称设计矛盾, 因此 $Soc(G)=A_v$ 或 S_v 时的情况不予考虑. 剔除完这两种情况, 还剩下 335 组 (v,k,λ,G).

根据引理 2.4 可知, 当 $v \le 200$ 时, 一定会存在 17 组点 - 超平面设计, 其中参数为 $(\frac{q^{n+1}-1}{q-1},\frac{q^n-1}{q-1},\frac{q^{n-1}-1}{q-1})$, 即定理 1.1 中的情况 (1). 此时有 28 组 (v,k,λ,G), 其中 G 的基柱为 $PSL(n,q)$. 因此, 下面对剩余的 307 组 (v,k,λ,G) 进行分析.

设 $\mathcal{D}$=$(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个 2-(v,k,λ) 对称设计, G 是 $\mathcal{D}$ 的一个区本原自同构群. 则 $\mathcal{D}$ 和 G 必须要依次满足下面 3 个条件:

(1) G_B 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上某些轨道长之和等于 k (引理 2.2).

由于文章讨论的是区本原对称设计, 利用命令 PrimitiveGroup(v,n) 得到的是区集上的本原自同构群, 又由于 $|G:G_B|$=$|G:G_\alpha|$, 其中 B 是 $\mathcal{D}$ 的任一区, α 是 $\mathcal{P}$ 的任一点, 因此 G 中至少会存在一个指数为 v 的子群 H. 利用陪集作用的命令 F,G:=CosetAction(G,H) 可以得到群 G 作用在 v 个点上的传递置换群 G, 其中 H 可由命令 Subgroups(G:OrderEqual:=n) 得到, 且 $n=\frac{|G|}{b}$. 利用这两个命令并结合 Orbits(G_B) 得到 G_B 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的轨道.

利用上述结论可知有 210 组参数 (v,k,λ,G) 不满足条件 (1), 接下来只需考虑剩余的 97 组参数 (详见下面的表 3)

表 3 可能存在的 2-(v,k,λ,G) 设计和对应的自同构群 G

情形	(v,k,λ)	G	设计/参考条件	说明
1	(11,5,2)	$PSL(2,11)$	D_1	Hadamard 设计
2	(15,7,3)	A_6	D_2	同构于点 - 超平面
3		S_6	$\cong D_2$	同构于点 - 超平面
4		A_7	$\cong D_2$	同构于点 - 超平面
5	(21,5,1)	$PGL(2,7)$	(3)	
6	(25,16,10)	$(A_5\times A_5):2$	(3)	
7		$(A_5\times A_5):2^2$	(3)	
8		$(A_5\times A_5):4$	(3)	
9		$(S_5\times S_5):2$	(3)	
10	(35,17,8)	A_7	D_3	Hadamard 设计

情形	(v,k,λ)	G	设计/参考条件	说明
11		S_7	$\cong D_3$	Hadamard 设计
12		A_8	$\cong D_3$	Hadamard 设计
13		S_8	$\cong D_3$	Hadamard 设计
14	(36,15,6)	$PSL(2,8)$	(3)	
15		M_{10}	(3)	
16		$PGL(2,9)$	(3)	
17		$P\Gamma L(2,9)$	(3)	
18		$P\Gamma L(2,8)$	(3)	
19		$PSU(3,3)$	(3)	
20		$P\Gamma U(3,3)$	D_4	Menon 设计
21		$PSp(4,3)$	D_5	Menon 设计
22		$PSp(4,3):2$	$\cong D_5$	Menon 设计
23		A_9	(3)	
24		S_9	(3)	
25	(40,13,4)	$PSp(4,3)$	D_6	同构于点 - 超平面
26		$PSp(4,3):2$	D_7	
27	(45,12,3)	M_{10}	(3)	
28		$PGL(2,9)$	(3)	
29		$P\Gamma L(2,9)$	(3)	
30		$PSp(4,3)$	D_8	
31		$PSp(4,3):2$	$\cong D_8$	
32	(49,16,5)	$(PSL(3,2)\times PSL(3,2)):2$	(3)	
33	(52,18,6)	$PSL(3,3).2$	(3)	
34	(55,27,13)	$PSL(2,11)$	(3)	
35		$PGL(2,11)$	(3)	
36	(56,11,2)	$PSL(3,4)$	D_9	Biplane
37		$PSL(3,4).2_1$	$\cong D_9$	Biplane
38		$PSL(3,4).2_2$	$\cong D_9$	Biplane
39		$PSL(3,4).2_3$	$\cong D_9$	Biplane
40		$PSL(3,4).2^2$	$\cong D_9$	Biplane
41	(63,31,15)	$PSU(3,3)$	D_{10}	
42		$PSU(3,3).2$	D_{11}	同构于点 - 超平面
43		$PSp(6,2)$	$\cong D_{11}$	同构于点 - 超平面
44	(64,28,12)	$PGL(2,7)\wr S_2$	(3)	
45		$S_8\wr S_2$	(3)	
46	(66,26,10)	$PGL(2,11)$	(3)	
47	(78,22,6)	$PSL(2,13)$	(3)	
48		$PGL(2,13)$	(3)	
49	(81,16,3)	$PSL(2,8)\wr S_2$	(3)	
50		$PSL(2,8)^2.S_3$	(3)	
51		$PSL(2,8)^2.6$	(3)	
52		$P\sum L(2,8)\wr S_2$	(3)	
53		$A_9\wr S_2$	(3)	
54		${A_9}^2.4$	(3)	
55		${A_9}^2.2^2$	(3)	
56		$S_9\wr S_2$	(3)	

情形	(v,k,λ)	G	设计/参考条件	说明
57	(85,21,5)	$PSp(4,4)$	D_{12}	同构于点 - 超平面
58		$PSp(4,4).2$	$\cong D_{12}$	同构于点 - 超平面
59	(91,36,14)	$PSL(2,13)$	(3)	
60		$PGL(2,13)$	(3)	
61	(91,10,1)	$PSL(2,13)$	(3)	
62	(91,45,22)	$PSL(2,13)$	(3)	
63	(100,45,20)	$S_5 \wr S_2$	(3)	
64		${A_5}^2.4$	(3)	
65		${A_5}^2.2^2$	(3)	
66		$S_5 \wr S_2$	(3)	
67	(105,40,15)	$PSL(3,4).2$	(3)	
68		$PSL(3,4).2^2$	(3)	
69		$PSL(3,4).S_3$	(3)	
70		$PSL(3,4).6$	(3)	
71		$PSL(3,4).D_{12}$	(3)	
72	(117,29,7)	$PSL(3,3).2$	(3)	
73	(120,35,10)	$PSL(2,16)$	(3)	
74		$PSL(2,16).2$	(3)	
75		$P\sum L(2,16)$	(3)	
76	(121,25,5)	$PSL(2,11) \wr S_2$	(3)	
77	(121,40,13)	$PSL(2,11) \wr S_2$	(3)	
78	(136,55,22)	$PSL(2,17)$	(3)	
79		$PGL(2,17)$	(3)	
80		$PSL(2,16).2$	(3)	
81		$P\sum L(2,16)$	(3)	
82	(144,66,30)	$PSL(3,3)$	(3)	
83		$PSL(3,3).2$	(3)	
84		M_{12}	D_{13}	Menon 设计
85		$M_{12}.2$	$\cong D_{13}$	Menon 设计
86	(153,57,21)	$PSL(2,17)$	(3)	
87		$PGL(2,17)$	(3)	
88	(156,31,6)	$PSp(4,5)$	D_{14}	同构于点 - 超平面
89		$PSp(4,5).2$	$\cong D_{14}$	同构于点 - 超平面
90	(171,35,7)	$PSL(2,19)$	(3)	
91	(171,51,15)	$PSL(2,19)$	(3)	
92		$PGL(2,19)$	(3)	
93	(171,85,42)	$PSL(2,19)$	(3)	
94	(176,50,14)	M_{22}	D_{15}	Higman 设计
95		HS	$\cong D_{15}$	Higman 设计
96	(190,28,4)	$PSL(2,19)$	(3)	
97		$PGL(2,19)$	(3)	

(2) 由 (1) 得到的那些轨道中至少存在一个轨道或者某些轨道的并满足 $|B^G| = b$.

利用 Magma 命令 B^G 可以得到 B 在 G 作用下的轨道长, 易知满足条件 (1) 的所有可能的区组 B 都有 $|B^G| = b$.

(3) $\mathcal{P}$ 中任意的 2- 元子集都要包含在 B^G 中的 λ 个区组中.

利用 Magma 命令 Design< $2, v|B\hat{}G$ > 可验证以 B^G 作为区集的关联结构是否为一个 2- 设计, 在这一步可剔除 66 组参数.

经过最后一步的验证, 共得到了 31 组符合设计条件的参数. 最后通过命令 IsIsomorphic (D_i, D_j) 验证同一个参数 (v, k, λ) 下的设计是否同构, 因此在同构意义下共得到了 54 个对称设计, 即 17 个点 - 超平面设计和表 3 中 10 个非点 - 超平面设计以及它们的补设计.

3.3 实例证明

实例 1: 区本原 2-(144,66,30) 对称设计

本节将以 (144,66,30) 和 (176,50,14) 这两组参数为例子来说明如何得到满足条件的设计.

当 $v = 144$ 时, 由 Magma 命令 PrimitiveGroups(144,n) 可得到 144 次本原群 G 有 16 个, 其中乘积型有 10 个, 除去 $G = A_{144}$ 和 $G = S_{144}$ 这两种情形外, 还剩 14 个本原群需考虑 (详细见表 4).

首先, 利用命令 Subgroups(G:OrderEqual:=n), 其中 $n = |G|/b$, 可知情形 1-5 和 7-12 都有一个指数为 v 的子群共轭类, 情形 6 和 13-14 都有两个指数为 v 的子群共轭类.

在情形 1 中, 记 H 为这个子群共轭类的代表元, 利用陪集作用的命令 F,G:=CosetAction (G, H) 可以得到区本原自同构群 G 作用在 144 个点上的传递置换表示.

表 4 可能存在的 2-(144,66,30) 设计及自同构群 G

情形	G	参考条件
1	$PSL(2,11) \wr S_2$	(1)
2	$PSL(2,11)^2.4$	(1)
3	$PSL(2,11)^2.2^2$	(1)
4	$PGL(2,11) \wr S_2$	(1)
5	$M_{11} \wr S_2$	(1)
6	$M_{12} \wr S_2$	(1)
7	$A_{12} \wr S_2$	(1)
8	${A_{12}}^2.2^2$	(1)
9	${A_{12}}^2.4$	(1)
10	$S_{12} \wr S_2$	(1)
11	$PSL(3,3)$	(3)
12	$PSL(3,3).2$	(3)
13	M_{12}	D_{13}
14	$M_{12}.2$	与 D_{13} 同构

由区传递性可知, 对任意的 $B \in \mathcal{B}$, 区稳定子群 G_B 必共轭与 H, 因此存在其中一个区组 B 是 H 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的某一个轨道或者是某些轨道的并, 但 H 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的轨道长度是:

$$1,\ 22,\ 121$$

而 $|B|$=k=66, 矛盾.

类似地, 情形 2-10 都不满足至少存在一个长为 k 的轨道或者存在某些轨道长之和为 k, 给予排除.

在情形 11 中, 易知子群共轭类的代表 H 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的轨道长度是:

$$1,\ 13,\ 13,\ 13,\ 13,\ 13,\ 39,\ 39$$

显然, 存在某些轨道长之和为 66, 由命令 B^G 可知这些轨道作为基区在 G 的作用下都满足 $|B^G|=b$. 接下来利用命令 Design< $2, v|B$^G > 可知以 B^G 作为区集的关联结构都不是一个 2- 设计, 因此给予排除.

类似地, 在情形 12 中会存在某些轨道长之和为 66, 并且这些轨道作为基区在 G 的作用下都满足 $|B^G|=b$. 但是以 B^G 作为区集的关联结构都不是一个 2- 设计, 因此给予排除.

在情形 13 中, 不妨记 H_1、H_2 为这两个子群共轭类的代表元, 利用陪集作用可以得到群 M_{12} 作用在 144 个点上的置换表示 G_1 和 G_2, 再由命令 IsPrimitive(Gi); (i=1,2) 可判断出其中一个是本原置换群, 而另一个是非本原置换群. 对任一区组 $B\in\mathcal{B}$, 区稳定子群 G_B 必共轭与 H_1 或 H_2.

若 G_B 共轭与 H_1, 即 G_B=H_1, 此时 H_1 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的轨道长度是:

$$12,\ 132$$

而 $|B|$=k=66, 矛盾.

若 G_B 共轭与 H_2, 即 G_B=H_2, 此时 H_2 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的轨道长度是:

$$1,\ 11,\ 11,\ 55,\ 66$$

记这五个轨道为 O_1、O_2、O_3、O_4、O_5, 显然由 $|B|$=k=66 可知, 基区 B 可能是 $O_2\cup O_4$、$O_3\cup O_4$ 或 O_5, 并且都满足 $|(O_2\cup O_4)^G|$=$|(O_3\cup O_4)^G|$=$|O_5^G|$=b=144. 类似地, 可知以 $(O_2\cup O_4)^G$ 和 $(O_3\cup O_4)^G$ 作为区集的关联结构都不是一个 2- 设计, 但是以 O_5^G 作为区集的关联结构能构成一个 2- 设计, 并且 ($\mathcal{P}$,O_5^G) 是一个旗传递区本原但点非本原的 2-(144,66,30) 对称设计.

同上面的论证一样, 还得到了一个对应于情形 14 的以 $M_{12}.2$ 为自同构群的区本原且点本原的 2-(144,66,30) 设计. 并且最后通过命令 IsIsomorphic(D_1, D_2) 验证了这两个设计是同构的.

实例 2: 区本原 2-(176,50,14) 对称设计

当 $v=176$ 时, 由 Magma 命令 PrimitiveGroups(176,n) 可得到 176 次本原群 G 有 6 个, 都是几乎单型, 除去 $G=A_{176}$ 和 $G=S_{176}$ 这两种情形外, 还剩 4 个几乎单型的本原群需考虑 (详细见表 5).

表 5 可能存在的 2-(176,50,14) 设计及自同构群 G

情形	G	参考条件
1	M_{22}	D_{15}
2	$PSU(5,2)$	(3)
3	$P\Gamma U(5,2)$	(3)
4	HS	与 D_{15} 同构

首先, 易知情形 1 和情形 4 各有两个指数为 v 的子群共轭类, 情形 2 和情形 3 各有一个指数为 v 的子群共轭类.

在情形 1 中, 两个子群共轭类都同构于 M_{22}, 不妨记 H_1、H_2 为这两个子群共轭类的代表元, 利用陪集作用得到群 M_{22} 作用在 176 个点上的本原置换表示 G_1 和 G_2. 对任一 $B\in\mathcal{B}$, 区稳定子群 G_B 必共轭与 H_1 或 H_2.

若 G_B 共轭与 H_1, 即 G_B=H_1, 此时 H_1 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的轨道长度是:

$$1,\ 70,\ 105$$

而 $|B|$=k=50, 矛盾.

若 G_B 共轭与 H_2, 即 $G_B{=}H_2$, 此时 H_2 作用在点集 $\mathcal{P}$ 上的轨道长度是:

$$15,\ 35,\ 126$$

记这五个轨道为 O_1、O_2、O_3, 并令 $B = O_1 \cup O_2$, 显然有 $|B|{=}k{=}50$ 且 $|B^G| = b = 176$, 经过验证, 得到了一个以 B 为基区的 2-(176,50,14) 设计 $\mathcal{D}$. 此外令 $B = O_3$, 还可以得到一个以 B 为基区的 2-(176,126,90) 设计, 该设计是 $\mathcal{D}$ 的补设计, 因此由定义可知 2-(176,50,14) 设计是一个以 M_{22} 为自同构群的区本原且反旗传递的对称设计.

同上面的论证一样, 还存在一个对应于情形 4 的以 HS 为自同构群的旗传递区本原 2-(176, 50,14) 设计, 并且通过验证可知这两个设计是同构的.

在情形 2 和情形 3 中, 都不满足至少存在一个长为 k 的轨道或者存在某些轨道长之和为 k, 因此给予排除.

至此, 可类似地完成定理 1 的证明.

4 结束语

目前关于旗传递 2-(v,k,λ) 设计的研究已经有了非常丰富的学术成果, 当设计的自同构群的旗传递性减弱成区本原时, 研究起来愈加困难. 近年来关于区本原 2-(v,k,λ) 设计的研究结果大都集中在限制 $\lambda = 1$ 的设计上. 本文从点数不大于 200 的条件入手去进行探究, 最终找到了 54 个两两不同构的区本原对称设计, 并且存在唯一一个区本原但点非本原的对称设计. 那么, 当点数大于 200 时, 是否还会存在区本原但点非本原的设计呢? 对于区本原与点本原之间的关系仍存在很大的研究空间.

参 考 文 献

[1] Block R. On the orbits of collineation groups[J]. Mathematische Zeitschrift, 1967, 96(1): 33–49.

[2] Higman D, McLaughlin J. Geometric ABA-groups[J]. Illinois Journal of Mathematics, 1961, 5(3): 382–397.

[3] Delandtsheer A, Doyen J. Most block-transitive t-designs are point-primitive[J]. Geometriae Dedicata, 1989, 29(3): 307–310.

[4] Delandtsheer A. Line-primitive automorphism groups of finite linear spaces[J]. European Journal of Combinatorics, 1989, 10(2): 161–169.

[5] Li H, Liu W. Line-primitive 2-$(v,k,1)$ designs with $k/(k,v) \leq 10$[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 2001, 93(1): 153–167.

[6] Ding S. 2-$(v,k,1)$ Designs and $PSL(3,q)$ where q is odd[J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2003, 18(3): 343–351.

[7] Zhou S, Ma Y, Fang W. Line-primitive linear spaces with Fang-Li parameter $\gcd(k,r)$ at most 12[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2011, 27(4): 657–670.

[8] Kantor W. Classification of 2-transitive symmetric designs[J]. Graphs and Combinatorics, 1985, 1(1): 165–166.

[9] Dempwolff U. Primitive rank 3 groups on symmetric designs[J]. Designs, Codes and Cryptography, 2001, 22(2): 191–207.

[10] Dempwolff U. Affine rank 3 groups on symmetric designs[J]. Designs, Codes and Cryptography, 2004, 31(2): 159–168.

[11] Braić S, Golemac A, Mandić J, et al. Primitive symmetric designs with prime power number of points[J]. Journal of Combinatorial Designs, 2010, 18(2): 141–154.

[12] Braić S, Golemac A, Mandić J, et al. Primitive symmetric designs with up to 2500 points[J]. Journal of Combinatorial Designs, 2011, 19(6): 463–474.

[13] Alavi S, Daneshkhah A. Sporadic simple groups as flag-transitive automorphism groups of symmetric designs[J]. Journal of Combinatorial Designs, 2024, 32(3): 127–168.

[14] Colbourn J, Dinitz H. Handbook of combinatorial designs[M]. CRC Press, Boca Raton, FL, 2007.

[15] Ionin Y, Shrikhande M. Combinatorics of symmetric designs[M]. Cambridge University Press, 2006.

THE CLASSIFICATION OF BLOCK-PRIMITIVE SYMMETRIC DESIGNS WITH SMALL POINTS NUMBER

ZHAN Li-wen, ZHAN Xiao-qin

(*School of Science, East China Jiao Tong University, Nanchang 330013, China*)

Abstract: The study of the classification of block-transitive 2-designs is one of the important topics in the field of permutation group and combinatorial designs. At persent, the classification of block-transitive 2-designs mainly focuses on the flag-transitivity and point-primitivity. In this article, we study the classification of block-primitive 2-(v, k, λ) symmetric designs, and prove the following result: Let D be a 2-(v, k, λ) symmetric design with $v \leq 200$, and G be a block-primitive automorphism group of D. If G is not of affine type, then up to isomorphism there are only 54 such designs.

Keywords: Block-primitive; automorphism; symmetric design; almost simple; product type

2010 MR Subject Classification: 05B05; 20B25