

公共不动点集的通有稳定性

莫春镛, 杨彦龙

(贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 本文研究了 Hausdorff 拓扑向量空间紧凸集上的集值映射族公共不动点集的通有稳定性, 利用 Fort 定理, 得到了在 Baire 分类意义下, 存在一个稠密剩余子集使得公共不动点问题是本质的, 从而是稳定的.

关键词: 公共不动点; 广义等度 KKM 映射族; 稠密剩余集; 通有稳定性

MR(2010) 主题分类号: 47H10

中图分类号: O177.91

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2024)06-0545-06

1 引言

不动点和不动点定理是非线性分析和很多研究领域的基本工具, 如微分方程、拓扑学、泛函分析、最优控制和博弈论等. 较早的不动点定理是 1910 年 Brouwer^[1] 提出的, 即 R^n 中非空有界闭凸集上的连续自映射存在一个不动点. 后来许多学者将 Brouwer 不动点定理推广到集值映射, 取得了较多成果. 如 Kakutani 不动点定理^[2]、Fan-Browder 不动点定理^[3] 和 Fan-Glicksberg 不动点定理^[4,5] 等. 关于不动点定理的推广的另一个角度是空间凸结构的推广. 1987 年, Horvath^[6] 用可缩性代替了原有的线性凸, 提出了 H -空间 (或 C -空间) 并研究了集值映射的不动点定理. 此后涌现出大量的凸结构以及在具有这些凸结构的拓扑空间中推广的不动点定理及其在非线形分析方面的应用. 例如在 G -凸空间、 FC -空间、半格凸空间、抽象凸空间等空间上推广不动点定理及其应用 (见文献 [7-21]).

2009 年, Agarwal^[22] 等人提出了关于其他集值映射是广义 KKM 映射的概念. 并利用这个概念在局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中建立了几个公共不动点定理, 并应用于证明 Ky Fan 型极大极小不等式. 2010 年, Balaj^[23] 利用 Brouwer 不动点定理在拓扑线性空间中研究了广义等度 KKM 集值映射族的一个公共不动点定理. 作为这一结果的应用, 得到了关于平衡问题和极大极小不等式的一些重要结果. 这些平衡问题的存在性结果不同于经典的平衡存在性结果. 更多细节见文献 [23]. 此后, 公共不动点定理以及其在变分不等式、向量平衡问题和 Ky Fan 型极大极小不等式等方面的应用得到了深入的研究, 取得了一些研究成果 [24-27].

不动点的稳定性在非线形分析中也是一个非常重要的主题. 1950 年, Fort^[28] 提出了连续映射的本质不动点的概念, 证明了每一个连续映射都可以由任意一个不动点都是本质的映

*收稿日期: 2024-06-24 接收日期: 2024-09-18

基金项目: 国家自然科学基金项目基金资助 (71961003); 贵州省科技厅联合基金项目基金资助 (黔科合 LH 字 (2017)7223); 贵州大学博士基金资助 (贵大人基合字 (2019) 49).

作者简介: 莫春镛 (2000-), 女, 贵州平塘, 研究生, 主要研究方向: 非线性分析,
E-mail: 3540879901@qq.com.

通讯作者: 杨彦龙 (1980-), 男, 副教授, 主要研究方向: 博弈论、非线性分析,
E-mail: yylong1980@163.com.

射来逼近. 1962 年, Jiang^[29] 给出了集值映射的本质不动点的概念并证明了相应的逼近定理. 不动点的本质概念是一个稳定性性质. 文献 [28] 和 [29] 研究了映射上具有扰动的不动点的稳定性. 2011 年, Mishra^[30] 等人利用新的收敛性概念证明了 Hausdorff 一致空间中一族映射序列及其公共不动点的稳定性. 此后, Mishra^[31] 等人根据 G -收敛和 H -收敛的定义在 2-度量空间中研究了公共不动点的稳定性. 2013 年, Alotaibi^[32] 等人引入新的混合迭代算法并根据拟压缩算子对公共不动点的稳定性进行了研究. 2022 年, Maldar^[33] 等人在复值巴拿赫空间中利用新的 Jungck 型迭代方法证明了迭代序列收敛于复值映射的公共不动点并研究了稳定性. 2023 年, Pant^[34] 给出了一类集值映射在度量空间中的不动点定理并研究了集值映射不动点集的稳定性和良定性. 更多关于不动点稳定性的结果可见文献 [30 – 32, 35] 及其中的文献.

在上述研究的基础上, 本文利用一个已知的公共不动点定理, 首先构造了一个由存在公共不动点的集值映射组成的“问题空间”并证明了这个空间是完备度量空间; 其次证明了解映射是一个上半连续且具有紧值的集值映射; 然后利用 Fort 定理证明了存在一个稠密剩余子集, 使得存在公共不动点的集值映射都是本质的, 从而公共不动点集是稳定的.

2 预备知识

我们用符号 2^X 、 $\langle X \rangle$ 分别表示集合 X 的一切子集和一切非空有限子集构成的集族.

定义 2.1^[23] 设 Y 是一个任意非空集, X 是拓扑向量空间 E 的一个非空凸子集, 集值映射族 $\Gamma = \{T|T: Y \rightarrow 2^X\}$. 如果对任意非空有限子集 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 存在 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \langle X \rangle$, 使得对每个非空子集 $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 每个 $T \in \Gamma$, 有 $co\{x_i: i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} T(y_i)$, 则称集值映射族 Γ 是广义等度 KKM 映射族.

定义 2.2^[24] 设 X, Y 是任意非空集合, $T: X \times Y \rightarrow 2^X$ 为一个集值映射, 如果对每个 $y \in Y$, 存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_0 \in T(x_0, y)$, 则称 x_0 是映射族 $\{T(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ 的公共不动点.

定义 2.3^[36] 设 X 是一个拓扑空间, Q 是 X 的非空子集, 如果 Q 包含 X 中一系列稠密开集的交集, 则称 Q 是 X 中的一个剩余集. 如果 X 是 Baire 空间, 则 Q 在 X 中稠密.

此外, 我们还需要集值映射连续性的基本知识以及一些已知结果. 参见 [36].

定义 2.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $F: X \rightarrow 2^Y$ 是一个集值映射.

(1) 如果对 Y 中的任意开集 G , $G \supset F(x)$ (或 $G \cap F(x) \neq \emptyset$), 存在 $x \in X$ 的开邻域 $O(x)$, 使得对任意 $x' \in O(x)$, 有 $G \supset F(x')$ (或 $G \cap F(x') \neq \emptyset$), 则称集值映射 F 在 x 上是上半连续的 (简记为 u.s.c.) (或下半连续的 (简记为 l.s.c.)).

(2) 如果对 $x \in X$, 集值映射 F 在 x 上既上半连续又下半连续, 则称 F 在 x 上是连续的.

(3) 如果对任意 $x \in X$, F 在 x 上是连续的 (或上半连续的, 或下半连续的), 则称集值映射 F 在 X 上是连续的 (或上半连续的, 或下半连续的).

若集值映射 F 是上半连续且具有紧值, 则称 F 为一个 usco 映射.

引理 2.1 设 X 和 Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间, Y 是紧空间, 如果集值映射 $F: X \rightarrow 2^Y$ 是闭的当且仅当 F 在 X 上是上半连续且是闭值的.

引理 2.2 设 (X, d) 是一个完备度量空间, $K(X)$ 是 X 中所有非空紧集的集合, 则 $(K(X), h)$ 也是一个完备度量空间. 其中 h 是 X 上的 Hausdorff 距离.

引理 2.3 (Fort 定理) 设 X 是一个 Baire 空间, Y 是一个度量空间, $F: X \rightarrow 2^Y$ 是一

个usco映射, 则存在 X 中的一个稠密剩余集 Q , 使得对任意 $x \in Q$, F 在 x 上是下半连续的, 从而是连续的.

3 公共不动点集的通有稳定性

在给出公共不动点集通有稳定性之前, 我们需要以下引理. 参见 [23].

引理 3.1 设 X 是拓扑向量空间的一个非空凸子集, Y 是非空集合, 集值映射 $T : X \times Y \rightarrow 2^X$ 具有紧值且满足以下条件:

- (1) 对每个 $y \in Y$, 集合 $\{x \in X : x \in T(x, y)\}$ 是闭的;
- (2) 集值映射族 $\{T(x, \cdot)\}_{x \in X}$ 是 Y 上的广义等度 KKM 映射族.

则集值映射族 $\{T(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ 有一个公共不动点, 即存在 $x_0 \in X$, 使得 $x_0 \in T(x_0, y)$.

以上引理给出了集值映射族公共不动点的存在性. 下面我们构造一个“问题”空间, 进而证明该空间中的公共不动点问题的通有稳定性.

设 X 是 Hausdorff 拓扑向量空间 E 中的完备凸紧集, Y 是非空集合, 令

$$\Xi = \left\{ T : X \times Y \rightarrow 2^X : T \text{ 满足引理 3.1 且 } x \rightarrow T(x, y) \text{ 是上半连续的.} \right\}$$

对任意 $T_1, T_2 \in \Xi$, 定义它们之间的距离如下:

$$\rho(T_1, T_2) = \sup_{(x, y) \in X \times Y} h(T_1(x, y), T_2(x, y)).$$

定理 3.1 (Ξ, ρ) 是一个完备度量空间.

证 设 $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Ξ 中的任意 Cauchy 序列, 且 $T_n \rightarrow T$, 则对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N(\varepsilon)$, 使得当 $m, n \geq N(\varepsilon)$ 时, 有

$$\rho(T_n, T_m) = \sup_{(x, y) \in X \times Y} h(T_n(x, y), T_m(x, y)) < \varepsilon.$$

令 $m \rightarrow \infty$, 可以得到 $\sup_{(x, y) \in X \times Y} h(T_n(x, y), T(x, y)) < \varepsilon$, 现证 $T \in \Xi$. 分三步证明:

(1) 因为 X 是完备凸紧集, 由引理 2.2, $\forall x \in X, \forall y \in Y, T(x, y)$ 为一个非空紧集, 从而 $\{x \in X : x \in T(x, y)\}$ 是闭的.

(2) 取 $n_0 \geq N(\varepsilon)$, 则 $\forall x \in X, \forall y \in Y, h(T_{n_0}(x, y), T(x, y)) < \varepsilon$. 由 T_{n_0} 在 x 上是上半连续的, 存在 x 的开邻域 $O(x)$, 使得 $\forall x' \in O(x)$, 有 $T_{n_0}(x') \subset U(\varepsilon, T_{n_0}(x))$, 于是 $T(x') \subset U(2\varepsilon, T_{n_0}(x')) \subset U(3\varepsilon, T_{n_0}(x)) \subset U(5\varepsilon, T(x))$. 因 ε 是任意的, 所以 T 在 x 上是上半连续的.

(3) 假设 $\{T(x, \cdot)\}_{x \in X}$ 不是 Y 上的广义等度 KKM 映射族, 则存在有限子集 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in \langle Y \rangle$, 对任意有限子集 $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \in \langle X \rangle$, 存在非空子集 $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $co\{z_i : i \in I\} \not\subset \bigcup_{i \in I} T(y_i)$. 即存在 $z \in co\{z_i : i \in I\}$, 使得 $z \notin \bigcup_{i \in I} T(y_i)$. 又由 $T_n \rightarrow T$, 取 $n_1 \geq N(\varepsilon)$, 则 $T_{n_1}(x) \subset U(2\varepsilon, T(x))$, 从而有 $z \notin \bigcup_{i \in I} T_{n_1}(y_i)$, 这与 $\{T_n(x, \cdot)\}_{x \in X}$ 是 Y 上的广义等度 KKM 映射族矛盾. 因此 $\{T(x, \cdot)\}_{x \in X}$ 是 Y 上的广义等度 KKM 映射族.

综上可得 $T \in \Xi$, 因此 (Ξ, ρ) 是一个完备度量空间.

$\forall T \in \Xi$, 由引理 3.1, 集值映射族 $\{T(\cdot, y)\}_{y \in Y}$ 存在公共不动点, 令 $F : \Xi \rightarrow 2^X$, $F(T)$ 表示 T 在 X 中的所有公共不动点的集合.

定理 3.2 F 是 Ξ 上的一个 usco 映射.

证 因为 X 是紧集, 由引理 2.1, 只需证明集值映射 F 的图是闭的, 即要证明 $\forall T_n \in \Xi, T_n \rightarrow T, \forall x_n \in F(T_n), x_n \rightarrow x$, 则 $x \in F(T)$.

由 $x_n \in F(T_n), x_n \in \bigcap_{y \in Y} T_n(x_n, y)$, 令 $\varepsilon_n = \sup_{(x,y) \in X \times Y} h(T_n(x, y), T(x, y))$, 则 $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 且 $h(T_n(x_n, y), T(x_n, y)) < \varepsilon_n$. 设 E 上的距离函数为 d , 因 $\forall y \in Y, x_n \in T_n(x_n, y)$, 存在 $x'_n \in T(x_n, y)$, 使 $d(x_n, x'_n) < \varepsilon_n$. 由 $d(x'_n, x) \leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, x) \rightarrow 0$, 得 $x'_n \rightarrow x$. 因为 T 在 x 上是上半连续的且 $T(X \times Y)$ 是 X 中的紧集. T 的图是闭的, 从而有 $x \in T(x, y), \forall y \in Y$, 即 $x \in F(T)$.

为了进一步讨论公共不动点集的稳定性的稳定性, 我们需要以下定义.

定义 3.1 设 $T \in \Xi$, 如果对 $x \in F(T)$ 的任意开邻域 $U(x) \subset X$, 存在 T 的开邻域 $O(T)$, 使得对任意 $T' \in O(T)$, 存在 $x' \in U(x)$, 有 $x' \in F(T')$, 则称 x 为 T 的本质公共不动点. 如果对任意 $x \in F(T)$, x 都是 T 的本质公共不动点, 则称 T 是本质的.

引理 3.2 设 $T \in \Xi, T$ 是本质的当且仅当 F 在 T 处是下半连续的.

证 必要性: 设 $T \in \Xi$, 如果对 X 中的任意开集 $G, G \cap F(T) \neq \emptyset$, 取 $x \in G \cap F(T)$, 则 G 是 x 的开邻域. 因为 T 是本质的, 所以 $x \in F(T)$ 是本质的, 从而存在 T 的开邻域 $O(T)$, 使得对任意 $T' \in O(T)$, 存在 $x' \in G$, 有 $x' \in F(T')$, 这表明 $G \cap F(T') \neq \emptyset$, 因此 F 在 T 处是下半连续的.

充分性: 设 $T \in \Xi, \forall x \in F(T)$, 对 x 的任意开邻域 $U(x)$, 则 $F(T) \cap U(x) \neq \emptyset$. 因为 F 在 T 处是下半连续的, 存在 T 的开邻域 $O(T)$, 使得对任意 $T' \in O(T)$, 有 $F(T') \cap U(x) \neq \emptyset$, 取 $x' \in F(T') \cap U(x)$. 因此 x 是本质的, 从而 T 是本质的.

定理 3.3 设 $T \in \Xi$, 如果 $F(T) = \{x\}$, 则 T 是本质的.

证 对 x 的任意开邻域 G , 且 $G \cap F(T) \neq \emptyset$. 由 $F(T) = \{x\}, x \in G$, 从而 $F(T) \subset G$. 根据定理 3.2, F 在 T 处是上半连续的, 存在 T 的开邻域 $O(T)$, 对任意 $T' \in O(T)$, 有 $F(T') \subset G$, 显然 $G \cap F(T') \neq \emptyset$. 因此 F 在 T 处是下半连续的, 由引理 3.2, T 是本质的.

定理 3.4 Ξ 中存在一个稠密剩余子集 Q , 使得对每个 $T \in Q, T$ 是本质的.

证 由定理 3.1 知, (Ξ, ρ) 是一个完备度量空间. 根据定理 3.2, F 是 Ξ 上的一个 usco 映射, 则由 Fort 定理, 存在一个稠密剩余子集 $Q \in \Xi$, 使得对每一个 $T \in Q, F$ 在 T 处是下半连续的. 又由引理 3.2, 对每一个 $T \in Q, T$ 是本质的.

由于 Q 是第二纲集, 因此可以说, 在 Baire 分类意义下, 对大多数的 $T \in Q$, 与 T 相关的公共不动点集 $F(T)$ 是稳定的.

4 结论

本文利用一个已知的公共不动点定理, 构造了一个“问题空间”并证明了这个空间是完备度量空间; 其次证明了解映射是一个 usco 集值映射; 然后利用 Fort 定理证明了存在一个稠密剩余子集, 使得存在公共不动点的集值映射都是本质的, 从而公共不动点集是稳定的. 即在 Baire 分类意义下, 大多数的公共不动点集是稳定的. 目前还没有文献对集值映射公共不动点集的本质连通区的存在性进行讨论分析. 因此, 可以把讨论公共不动点集本质连通区的存在性作为下一步的研究工作.

参 考 文 献

- [1] Brouwer L E J. Ber abbildung von mannigfaltigkeiten[J]. *Mathematische Annalen*, 1911, 71(1): 97–115.
- [2] Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem[J]. *Duke Mathematical Journal*, 1941, 8(8): 457–459.
- [3] Browder F E. The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces[J]. *Mathematische Annalen*, 1968, 177: 283–301.
- [4] Fan K. Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1952, 38(2): 121–126.
- [5] Glicksberg I L. A further generalization of the Kakutani fixed theorem, with application to Nash equilibrium points[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1952, 3(1): 170–174.
- [6] Horvath C D. Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity[J]. *Nonlinear and Convex Analysis*, 1987.
- [7] Chang Shihsen, Ma Yihai. Generalized KKM theorem on H-space with applications[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1992, 163(2): 406–421.
- [8] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1997, 209(2): 551–571.
- [9] Park S. Elements of the KKM theory for generalized convex spaces[J]. *Korean Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 7(1): 1–28.
- [10] Park S. New foundations of the KKM theory[J]. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, 2008, 9(3): 331–350.
- [11] Ding Xieping. Generalized G-KKM theorems in generalized convex spaces and their applications[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002, 266(1): 21–37.
- [12] Tan K K. G-KKM theorem, minimax inequalities and saddle points[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1997, 30(7): 4151–4160.
- [13] Ding Xieping. Generalized KKM type theorems in FC-spaces with applications (II)[J]. *Journal of Global Optimization*, 2007, 38: 367–385.
- [14] Luo Qun. KKM and Nash equilibria type theorems in topological ordered spaces[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, 264(2): 262–269.
- [15] Luo Qun. The applications of the Fan–Browder fixed point theorem in topological ordered spaces[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2006, 19(11): 1265–1271.
- [16] Al-Homidan S, Ansari Q H, Yao J C. Collectively fixed point and maximal element theorems in topological semilattice spaces[J]. *Applicable Analysis*, 2011, 90(6): 865–888.
- [17] Xiang Shuwen, Yang Hui. Some properties of abstract convexity structures on topological spaces[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2007, 67(3): 803–808.
- [18] Xiang Shuwen, Xia Shunyou. A further characteristic of abstract convexity structures on topological spaces[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 335(1): 716–723.
- [19] Xiang Shuwen, Xia Shunyou, Chen Jing. KKM lemmas and minimax inequality theorems in abstract convexity spaces[J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013, 2013(1): 1–12.
- [20] 陈治友. T-凸空间的结构和性质 [J]. *西南大学学报 (自然科学版)*, 2012, 34(10): 106–108.
- [21] 陈治友. T-凸空间中的KKM引理及其应用 [J]. *湖南师范大学自然科学学报*, 2017, 40(5): 84–87.
- [22] Agarwal R P, Balaj M, O'Regan D. Common fixed point theorems and minimax inequalities in locally convex Hausdorff topological vector spaces[J]. *Applicable Analysis*, 2009, 88(12): 1691–1699.

- [23] Balaj M. A common fixed point theorem with applications to vector equilibrium problems[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23(3): 241–245.
- [24] Agarwal R P, Balaj M, O'Regan D. Common fixed point theorems in topological vector spaces via intersection theorems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2017, 173: 443–458.
- [25] Agarwal R P, Balaj M, O'Regan D. A common fixed point theorem with applications[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 163: 482–490.
- [26] Balaj M, Jorquera E D, Khamsi M A. Common fixed points of set-valued mappings in hyperconvex metric spaces[J]. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 2018, 20: 1–14.
- [27] Balaj M, Khamsi M A. Common fixed point theorems for set-valued mappings in normed spaces[J]. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 2019, 113: 1893–1905.
- [28] Jiang Jiahe. Essential fixed points of the multivalued mappings[J]. Doctoral Dissertation Science in China (Series A: Mathematics), 1962, 11(3): 293–298.
- [29] Fort M K. Essential and nonessential fixed points[J]. American Journal of Mathematics, 1950, 72(2): 315–322.
- [30] Mishra S, Singh S L. Stability of common fixed points in uniform spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2011, 2011: 1–8.
- [31] Mishra S, Singh S L, Pant R, Stofile S. Some new notions of convergence and stability of common fixed points in 2-metric spaces[J]. Advances in Fixed Point Theory, 2012, 2(1): 64–78.
- [32] Alotaibi A, Kumar V, Hussain N. Convergence comparison and stability of Jungck-Kirk-type algorithms for common fixed point problems[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013: 1–30.
- [33] Maldar S, Atalan Y. Common fixed point theorems for complex-valued mappings with applications[J]. Korean Journal of Mathematics, 2022, 30(2): 205–229.
- [34] Pant R. Some new fixed points results for a class of set-valued mappings in metric spaces[J]. Advances in Fixed Point Theory, 2023, 13: 1–14.
- [35] Mishra S N, Singh S L, Pant R. Some new results on stability of fixed points[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2012, 45(7): 1012–1016.
- [36] 俞建. 博弈论与非线性分析 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

THE GENERIC STABILITY OF COMMON FIXED POINTS SET

MO Chun-rong, YANG Yan-long

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: In this paper, we study the generic stability of common fixed points of set-valued mappings on compact and convex sets of Hausdorff topological vector spaces. By using the Fort theorem, we prove that there exists a dense residual subset such that the mappings are essential and, hence, the common fixed points set is stable in the sense of Baire classification.

Keywords: Common fixed point; generalized equi-KKM family of set-valued mappings; dense residual set; generic stability

2010 MR Subject Classification: 47H10