数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)
Vol. 44 ( 2024 )
No. 6

# 新算子等式下谱的共同性质

孔瑶兵, 严　锴
(福州大学数学与统计学院, 福建 福州 350108)

**摘 要**:　本文研究了无限维 Banach 空间上满足算子等式组的有界线性算子 $A$ 和 $BC^k$ 的谱性质, 其中 $k$ 为某个非负整数. 具体而言, 设 $A$, $B$, $C$ 是定义在无限维 Banach 空间 $X$ 上的有界线性算子满足 $C^kBC^k = AC^k$ 和 $C^kBA^k = A^{k+1}$. 本文从正则集的角度证明了算子 $A$ 和 $BC^k$ 的 19 类谱是一致的. 特别地, 我们利用 $A$ 和 $BC^k$ 的 Fredholm 谱相等, 获得了 $A$ 和 $BC^k$ 的广义 Drazin-Riesz 可逆性是等价的. 这些结果是对 Yan [7] 中结论的推广.

**关 键 词**:　算子等式; 正则集; 广义 Drazin-Riesz 逆
MR(2010) **主题分类号**:　47A10; 47A53　　　　**中 图 分 类 号**:　O177.2
**文 献 标 识 码**:　A　　　　**文 章 编 号**:　0255-7797(2024)06-0535-10

## 1 引言

设 $X$ 为无限维 Banach 空间, $\mathcal{B}(X)$ 表示 $X$ 上全体有界线性算子构成的 Banach 代数. 任取 $A$, $B$, $C$ 和 $D \in \mathcal{B}(X)$. 经典的 Jacobson 引理体现了 $AB$ 和 $BA$ 的谱在零点外是相等的:

$$\sigma(AB)\backslash\{0\} = \sigma(BA)\backslash\{0\}. \tag{1.1}$$

近年来, 许多学者致力于研究 Jacobson 引理以及将等式 (1.1) 推广到其他谱上. 1998 年, Barnes [1] 进一步研究了 $AB$ 和 $BA$ 关于零空间和值域的共同性质，并证明了它们的点谱、近似点谱也有形似 (1.1) 式的结论. 在文献 [2, 3] 中, 当 $A$ 和 $B$ 满足算子等式

$$ABA = A^2 \text{ 和 } BAB = B^2 \tag{1.2}$$

Duggal 和 Schmoeger 证明了 $A$ 和 $BA$ 的点谱、近似点谱及本性谱等各类谱集是相同的. 2013 年, Corach, Duggal 和 Harte [4] 在条件 $ABA = ACA$ 下研究了元素乘积 $AC$ 和 $BA$ 的谱在零点外是相等的. 随后, Zeng 和 Zhong [5] 从正则集的角度进一步研究了它们共同的谱性质. 在文献 [6,7] 中, Yan 引入了新条件

$$\begin{cases} ACD = DBD \\ DBA = ACA \end{cases}, \tag{1.3}$$

在有界线性算子的范畴内, 将文献 [4,5] 中的结论推广到了 $AC$ 和 $BD$ 上. 在本文中, 我们引入了一个新的算子等式

$$\begin{cases} C^kBC^k = AC^k \\ C^kBA^k = A^{k+1}, \end{cases} \tag{1.4}$$

*收稿日期: 2024-06-20　　接收日期: 2024-09-02
基金项目: 福建省自然科学基金资助 (2022J01104).
作者简介: 孔瑶兵 (2000–), 女, 湖南岳阳, 硕士, 主要研究方向: 泛函分析. E-mail:1448520261@qq.com

并研究了在其成立时 $A$ 和 $BC^k$ 的谱性质. 1996 年, Kordula 和 Müller [8] 引入了正则集的概念, 给出了一个谱理论公理化的描述. 接下来, 介绍正则集的定义及相关记号.

对 $T \in \mathcal{B}(X)$, $\mathcal{R}(T)$ 和 $\mathcal{N}(T)$ 分别表示 $T$ 的值域和零空间. 定义 $T$ 的超值域和超零空间如下:

$$\mathcal{R}(T^\infty) := \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(T^n) \text{ 和 } \mathcal{N}(T^\infty) := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(T^n).$$

**定义 1.1** 非空子集 $R \subseteq \mathcal{B}(X)$ 称为正则集, 若满足以下两点 *:*
(1) 对任意的 $A \in \mathcal{B}(X)$ 和任意的正整数 $n$, 有

$$A \in \mathcal{B}(X) \iff A^n \in \mathcal{B}(X),$$

(2) 对于两两之间均可交换的算子 $A,\ B,\ C,\ D \in \mathcal{B}(X)$, 并且满足 $AC + BD = I$, 有

$$AB \in R \iff A \in R, B \in R.$$

对任意的 $T \in \mathcal{B}(X)$, $T$ 关于正则集 $R$ 的正则谱 $\sigma_R(T)$ 定义为

$$\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :\ \lambda - T \notin R\}.$$

对任意的非负整数 $n$, 令

$$c_n(T) = \dim \mathcal{R}(T^n)/\mathcal{R}(T^{n+1}),\ c'_n(T) = \dim \mathcal{N}(T^{n+1})/\mathcal{N}(T^n).$$

由文献 [9] 中的引理 3.2 知

$$c_n(T) = \dim X/(\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^n)),\ c'_n(T) = \dim \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^n).$$

并且 $T$ 的 stable defect $c(T)$ 和 stable nullity $c'(T)$ 分别定义为

$$c(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(T) \text{ 和 } c'(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n(T).$$

对于 $T \in \mathcal{B}(X)$ 以及任意的非负整数 $n$, 存在 $T$ 诱导的线性变化:

$$\mathcal{R}(T^n)/\mathcal{R}(T^{n+1}) \longrightarrow \mathcal{R}(T^{n+1})/\mathcal{R}(T^{n+2}),$$

记 $k_n(T)$ 为该诱导线性变化的零空间的维数, 同时记

$$k(T) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n(T).$$

由文献 [10] 中的引理 2.3 可知, 对任意的非负整数 $n$, 有

$$\begin{aligned} k_n(T) &= \dim(\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^n))/(\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{R}(T^{n+1})) \\ &= \dim(\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^{n+1}))/(\mathcal{R}(T) + \mathcal{N}(T^n)) \end{aligned}$$

和

$$k(T)=\dim\mathcal{N}(T)/(\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{R}(T^{\infty}))=\dim(\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^{\infty}))/\mathcal{R}(T).$$

下面我们给出 19 种具体的正则集 $R_i\subseteq\mathcal{B}(X)$, 其中 $01\leq i\leq 19$, 详见文献 [7, 11].

**定义 1.2** 对任意的 $T\in\mathcal{B}(X)$,

(1) $R_1=\{T\in\mathcal{B}(X):\ c(T)=0\}$,

(2) $R_2=\{T\in\mathcal{B}(X):\ c(T)<\infty\}$,

(3) $R_3=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N}$ 使得 $c_d(T)=0$ 且 $\mathcal{R}(T^{d+1})$ 为闭集$\}$,

(4) $R_4=\{T\in\mathcal{B}(X):$ 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有 $c_n(T)<\infty\}$,

(5) $R_5=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N}$ 使得 $c_d(T)<\infty$且 $\mathcal{R}(T^{d+1})$ 为闭集$\}$,

(6) $R_6=\{T\in\mathcal{B}(X):\ c'(T)=0$ 且 $\mathcal{R}(T)$ 为闭集$\}$,

(7) $R_7=\{T\in\mathcal{B}(X):\ c'(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T)$ 为闭集$\}$,

(8) $R_8=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N}$ 使得 $c'_d(T)=0$ 且 $\mathcal{R}(T^{d+1})$ 为闭集$\}$,

(9) $R_9=\{T\in\mathcal{B}(X):$ 对于 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有$c'_n(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T)$ 为闭集$\}$,

(10) $R_{10}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N}$ 使得 $c'_d(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T^{d+1})$ 为闭集$\}$,

(11) $R_{11}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ k(T)=0$ 且 $\mathcal{R}(T)$ 为闭集$\}$,

(12) $R_{12}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ k(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T)$ 为闭集$\}$,

(13) $R_{13}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N},\ \forall n\geq d$ 有 $k_n(T)=0$ 且 $\mathcal{R}(T^{d+1})$ 为闭集$\}$,

(14) $R_{14}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \forall n\in\mathbb{N},\ k_n(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T)$ 为闭集$\}$,

(15) $R_{15}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N},\ \forall n\geq d$ 有 $k_n(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T^{d+1})$ 为闭集$\}$,

(16) $R_{16}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N}$ 使得 $c_d(T)=0$ 且 $\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^d)$ 为闭集$\}$,

(17) $R_{17}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N}$ 使得 $c_d(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^d)$ 为闭集$\}$,

(18) $R_{18}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N},\ \forall n\geq d$ 有 $k_n(T)=0$ 且 $\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^d)$ 为闭集$\}$,

(19) $R_{19}=\{T\in\mathcal{B}(X):\ \exists d\in\mathbb{N},\ \forall n\geq d$ 有 $k_n(T)<\infty$ 且 $\mathcal{R}(T)+\mathcal{N}(T^d)$ 为闭集$\}$.

其中, $R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$ 和 $R_5$ 中的算子分别称为满射算子、下半 Browder 算子、右 Drazin 可逆算子、下半 Fredholm 算子和右本质 Drazin 可逆算子. $R_6$、$R_7$、$R_8$、$R_9$ 和 $R_{10}$ 中的算子分别称为下有界算子、上半 Browder 算子、左 Drazin 可逆算子、上半 Fredholm 算子和左本质 Drazin 可逆算子. $R_{11}$、$R_{12}$、$R_{13}$ 和 $R_{18}$ 中的算子分别称为半正则算子、本质半正则算子、拟 Fredholm 算子和具有最终拓扑均匀下降性质的算子.

本文主要参考了文献 [7,12] 中的方法, 在有界线性算子全体组成的 Banach 代数内，研究了满足新条件 (1.4) 的 $A$ 和 $BC^k$ 关于 19 类正则谱的共同性质, 进一步证明了 $A$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的当且仅当 $BC^k$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的.

## 2 主要定理

本节采用了文献 [7] 中的方法, 在条件 (1.4) 成立的前提下, 通过建立一些商空间的同构关系, 证明了 $A$ 和 $BC^k$ 的 19 类正则谱相同, 即 $\sigma_{R_i}(A)=\sigma_{R_i}(BC^k)$, 其中 $1\leq i\leq 19$. 根据上述 19 类正则集的定义, 我们需要给出如下 (引理 2.1 ) 有关 $A$ 和 $BC^k$ 的零空间与值域的基本关系.

**引理 2.1** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A,\ B,\ C\in\mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则

(1) $C^k\mathcal{R}(BC^k-I)^n\subseteq\mathcal{R}(A-I)^n$,

(2) $C^k\mathcal{N}(BC^k-I)^n \subseteq \mathcal{N}(A-I)^n$,

(3) $BA^k\mathcal{R}(A-I)^n \subseteq \mathcal{R}(BC^k-I)^n$,

(4) $BA^k\mathcal{N}(A-I)^n \subseteq \mathcal{N}(BC^k-I)^n$.

**证** (1) 任取 $y\in\mathcal{R}(BC^k-I)^n$, 则存在 $x\in X$ 使得 $y=(BC^k-I)^nx$. 由 $C^kBC^k=AC^k$ 可得

$$C^ky=C^k(BC^k-I)^nx=(A-I)^nC^kx\in\mathcal{R}(A-I)^n.$$

因此, $C^k\mathcal{R}(BC^k-I)^n\subseteq\mathcal{R}(A-I)^n$.

(2) 任取 $x\in\mathcal{N}(BC^k-I)^n$, 根据 $C^kBC^k=AC^k$ 可知

$$(A-I)^nC^kx=C^k(BC^k-I)^nx=0.$$

因此, $C^k\mathcal{N}(BC^k-I)^n\subseteq\mathcal{N}(A-I)^n$.

(3) 任取 $y\in\mathcal{R}(A-I)^n$, 则存在 $x\in X$ 使得 $y=(A-I)^nx$. 由 $C^kBA^k=A^{k+1}$ 可得

$$BA^ky=BA^k(A-I)^nx=(BC^k-I)^nBA^kx\in\mathcal{R}(BC^k-I)^n.$$

因此, $BA^k\mathcal{R}(A-I)^n\subseteq\mathcal{R}(BC^k-I)^n$.

(4) 任取 $x\in\mathcal{N}(A-I)^n$, 根据 $C^kBA^k=A^{k+1}$ 可知

$$(BC^k-I)^nBA^kx=BA^k(A-I)^nx=0.$$

因此, $BA^k\mathcal{N}(A-I)^n\subseteq\mathcal{N}(BC^k-I)^n$.

**引理 2.2** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A,\ B,\ C\in\mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则 $c'_n(A-I)=c'_n(BC^k-I)$. 进而有 $c'(A-I)=c'(BC^k-I)$.

**证** 为了证明商空间 $\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1}/\mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 与商空间 $\mathcal{N}(A-I)^{n+1}/\mathcal{N}(A-I)^n$ 的维数相等, 我们定义由 $C^k$ 诱导的线性映射 $f$:

$$\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1}/\mathcal{N}(BC^k-I)^n\longrightarrow\mathcal{N}(A-I)^{n+1}/\mathcal{N}(A-I)^n$$

以及由 $BA^k$ 诱导的线性映射 $g$:

$$\mathcal{N}(A-I)^{n+1}/\mathcal{N}(A-I)^n\longrightarrow\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1}/\mathcal{N}(BC^k-I)^n.$$

根据引理 2.1 (2) 和 (4) 可知上述两个映射均是良定义的. 因此只需要证明 $f$ 和 $g$ 都是单射. 一方面, 任取 $x\in\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1}$ 满足 $C^kx\in\mathcal{N}(A-I)^n$. 根据引理 2.1 (4) 知 $BA^kC^kx\in\mathcal{N}(BC^k-I)^n$. 由 $C^kBC^k=AC^k$ 可得 $BA^kC^k=(BC^k)^{k+1}$, 进而有

$$\begin{aligned}x&=x-BA^kC^kx+BA^kC^kx=BA^kC^kx+x-(BC^k)^{k+1}x\\&=BA^kC^kx-[(BC^k)^k+\cdots+BC^k+I](BC^k-I)x\in\mathcal{N}(BC^k-I)^n.\end{aligned}$$

这说明 $f$ 是单射, 故 $c'_n(A-I)\geq c'_n(BC^k-I)$. 另一方面, 任取 $x\in\mathcal{N}(A-I)^{n+1}$ 满足 $BA^kx\in\mathcal{N}(BC^k-I)^n$. 根据引理 2.1 (2) 知 $C^kBA^kx\in\mathcal{N}(A-I)^n$. 由于 $C^kBA^k=A^{k+1}$ 可知 $x$ 有以下分解:

$$\begin{aligned}x&=x-C^kBA^kx+C^kBA^kx=C^kBA^kx+x-A^{k+1}x\\&=C^kBA^kx-(A^k+\cdots+A+I)(A-I)x\in\mathcal{N}(A-I)^n.\end{aligned}$$

这说明 $g$ 是单射, 故 $c'_n(A-I)=c'_n(BC^k-I)$.

**引理 2.3** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A$, $B$, $C\in\mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则 $c_n(A-I)=c_n(BC^k-I)$. 进而有 $c(A-I)=c(BC^k-I)$.

**证** 为了证明商空间 $\mathcal{R}(BC^k-I)^n/\mathcal{R}(BC^k-I)^{n+1}$ 与商空间 $\mathcal{R}(A-I)^n/\mathcal{R}(A-I)^{n+1}$ 的维数相等, 我们定义由 $C^k$ 诱导的线性映射 $f$:

$$\mathcal{R}(BC^k-I)^n/\mathcal{R}(BC^k-I)^{n+1}\longrightarrow\mathcal{R}(A-I)^n/\mathcal{R}(A-I)^{n+1}$$

以及由 $BA^k$ 诱导的线性映射 $g$:

$$\mathcal{R}(A-I)^n/\mathcal{R}(A-I)^{n+1}\longrightarrow\mathcal{R}(BC^k-I)^n/\mathcal{R}(BC^k-I)^{n+1}.$$

根据引理 2.1 (1) 和 (3) 可知上述两个映射均是良定义的. 接下来我们只需要证明 $f$ 和 $g$ 都是单射. 一方面, 任取 $x\in\mathcal{R}(BC^k-I)^n$ 满足 $C^kx\in\mathcal{R}(A-I)^{n+1}$. 由引理 2.1 (3) 知 $BA^kC^kx\in\mathcal{R}(BC^k-I)^{n+1}$. 根据引理 2.2 中的证明过程可知 $x$ 有以下分解:

$$x=BA^kC^kx-(BC^k-I)((BC^k)^k+\cdots+BC^k+I)x\in\mathcal{R}(BC^k-I)^{n+1}.$$

这说明 $f$ 是单射, 故 $c_n(A-I)\geq c_n(BC^k-I)$. 另一方面, 任取 $x\in\mathcal{R}(A-I)^n$ 满足 $BA^kx\in\mathcal{R}(BC^k-I)^{n+1}$. 由引理 2.1 (1) 知 $C^kBA^kx\in\mathcal{R}(A-I)^{n+1}$. 又根据引理 2.2 中的证明过程可知 $x$ 有以下分解:

$$x=C^kBA^kx-(A^k+\cdots+A+I)(A-I)x\in\mathcal{R}(A-I)^{n+1}.$$

这说明 $g$ 是单射, 故 $c_n(A-I)=c_n(BC^k-I)$.

**引理 2.4** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A$, $B$, $C\in\mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则 $k_n(A-I)=k_n(BC^k-I)$. 进而有 $k(A-I)=k(BC^k-I)$.

**证** 为了证明商空间 $(\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1})/(\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n)$ 与商空间 $(\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^{n+1})/(\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n)$ 的维数相等, 我们定义由 $C^k$ 诱导的从商空间

$$(\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1})/(\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n)$$

到商空间

$$(\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^{n+1})/(\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n)$$

的线性映射 $f$ 以及由 $BA^k$ 诱导的从商空间

$$(\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^{n+1})/(\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n)$$

到商空间

$$(\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1})/(\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n)$$

的线性映射 $g$. 根据引理 2.1 可知上述两个映射均是良定义的. 接下来我们只需要证明 $f$ 和 $g$ 都是单射. 一方面, 任取 $x\in\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^{n+1}$ 满足 $C^kx\in\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n$,

则存在 $y \in X$ 以及 $z \in \mathcal{N}(A-I)^n$ 使得 $C^kx=(A-I)y+z$, 从而 $y=Ay+z-C^kx$. 由引理 2.1 (4) 可知 $BC^kBA^kz \in \mathcal{N}(BC^k-I)^n$. 由 $C^kBC^k=AC^k$ 可知 $BC^kBA^kC^k=(BC^k)^{k+2}$, 进而得到 $x$ 有以下分解:

$$\begin{aligned}
x &= x-BA^kC^kx+BA^kC^kx = x-BA^kC^kx+BA^k(A-I)y+BA^kz\\
&= x-BA^kC^kx+(BC^k-I)BA^k(Ay+z-C^kx)+BA^kz\\
&= x-BC^kBA^kC^kx+(BC^k-I)BA^{k+1}y+BC^kBA^kz\\
&= (BC^k-I)(BA^{k+1}y-[(BC^k)^{k+1}+\cdots+BC^k+I]x)+BC^kBA^kz\\
&\in \mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n.
\end{aligned}$$

这说明 $f$ 是单射, 故 $k_n(A-I)\geq k_n(BC^k-I)$. 另一方面, 任取 $x \in \mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^{n+1}$ 满足 $BA^kx \in \mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n$, 则存在 $y \in X$ 和 $z \in \mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 使得 $BA^kx=(BC^k-I)y+z$, 从而 $y=BC^ky-BA^kx+z$. 根据引理 2.1 (2) 知 $AC^kz \in \mathcal{N}(A-I)^n$. 由 $C^kBA^k=A^{k+1}$ 可知 $C^kBC^kBA^k=A^{k+2}$, 进而有

$$\begin{aligned}
x &= x-C^kBA^kx+C^kBA^kx = x-C^kBA^kx+C^k(BC^k-I)y+C^kz\\
&= x-C^kBA^kx+C^k(BC^k-I)(BC^ky-BA^kx+z)+C^kz\\
&= x+C^k(BC^k-I)BC^ky-C^kBC^kBA^kx+C^kBC^kz\\
&= (A-I)[AC^ky-(A^{k+1}+\cdots+A+I)x]+AC^kz\\
&\in \mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n.
\end{aligned}$$

这说明 $g$ 是单射, 故 $k_n(A-I)=k_n(BC^k-I)$.

**引理 2.5** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A$, $B$, $C \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则 $\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n$ 是闭的当且仅当 $\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 是闭的.

**证** 假设 $\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n$ 是闭的. 任取序列 $\{x_j\}\subseteq \mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 满足 $x_j$ 收敛于 $x$, 则存在 $y_j \in \mathcal{R}(BC^k-I)$ 和 $z_j \in \mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 使得 $x_j=y_j+z_j$. 从而

$$C^kx=\lim_{j\to\infty}C^kx_j=\lim_{j\to\infty}(C^ky_j+C^kz_j).$$

由引理 2.1 (1) 和 (2) 可知 $C^ky_j \in \mathcal{R}(A-I)$ 和 $C^kz_j \in \mathcal{N}(A-I)^n$. 因为 $\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n$ 是闭的, 所以存在 $y \in X$ 和 $z \in \mathcal{N}(A-I)^n$ 使得 $C^kx=(A-I)y+z$, 从而 $y=Ay+z-C^kx$. 由引理 2.1 (4) 可知 $BC^kBA^kz \in \mathcal{N}(BC^k-I)^n$. 根据引理 2.4 中的证明可知 $x$ 有以下分解:

$$\begin{aligned}
x &= (BC^k-I)[BA^{k+1}y-((BC^k)^{k+1}+\cdots+BC^k+I)x]+BC^kBA^kz\\
&\in \mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n).
\end{aligned}$$

因此, $\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 是闭的.

另一方面, 假设 $\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 是闭的. 任取序列 $\{x_n\}\subseteq \mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n$ 满足 $x_n$ 收敛于 $x$, 则存在 $y_n \in \mathcal{R}(A-I)$ 和 $z_n \in \mathcal{N}(A-I)^n$ 使得 $x_n=y_n+z_n$. 从而

$$BA^kx=\lim_{n\to\infty}BA^kx_n=\lim_{n\to\infty}(BA^ky_n+BA^kz_n).$$

由引理 2.1 (3) 和 (4) 可知 $BA^ky_n \in \mathcal{R}(BC^k-I)$ 和 $BA^kz_n \in \mathcal{N}(BC^k-I)^n$. 因为 $\mathcal{R}(BC^k-I)+\mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 是闭的, 所以存在 $y \in X$ 和 $z \in \mathcal{N}(BC^k-I)^n$ 使得 $BA^kx=(BC^k-I)y+z$, 从而 $y=BC^ky+z-BC^kx$. 由引理 2.1 (4) 可知 $BC^kBA^kz \in \mathcal{N}(BC^k-I)^n$. 由引理 2.1 (2) 可知 $AC^kz \in \mathcal{N}(A-I)^n$. 根据引理 2.4 中的证明可知 $x$ 有以下分解:

$$x=(A-I)[AC^ky-(A^{k+1}+\cdots+A+I)x]+AC^kz \in \mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n.$$

因此, $\mathcal{R}(A-I)+\mathcal{N}(A-I)^n$ 是闭的.

当引理 2.5 中的 $n=0$ 时, 可以得到以下推论:

**推论 2.6** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则 $\mathcal{R}(A-I)$ 是闭的当且仅当 $\mathcal{R}(BC^k-I)$ 是闭的.

**推论 2.7** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则 $\mathcal{R}(A-I)^n$ 是闭的当且仅当 $\mathcal{R}(BC^k-I)^n$ 是闭的.

**证** 对于任意的正整数 $n$, 设

$$A_n=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}A^j=I-(I-A)^n \text{ 和 } B_n=\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}B(C^kB)^{j-1}.$$

因为 $C^kB_n=C^k\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}B(C^kB)^{j-1}=I-(I-C^kB)^n$ 以及 $(C^kB)^nC^k=A^nC^k$, 所以直接计算可知

$$\begin{aligned}C^kB_nC^k&=(I-(I-C^kB)^n)C^k=C^k-(I-C^kB)^nC^k\\&=C^k-C^k(I-BC^k)^n=C^k-(I-A)^nC^k\\&=(I-(I-A)^n)C^k=A_nC^k.\end{aligned}$$

又因为利用 $(I-C^kB)^nA^k=A^k(I-A)^n$ 可得

$$\begin{aligned}C^kB_nA_n^k&=(I-(I-A)^n)^k-(I-C^kB)^n(I-(I-A)^n)^k\\&=(I-(I-A)^n)^k-(I-C^kB)^nA^k(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}A^{j-1})^k\\&=(I-(I-A)^n)^k-(I-A)^nA^k(\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j-1}A^{j-1})^k\\&=(I-(I-A)^n)^k-(I-A)^n(I-(I-A)^n)^k=A_n^{k+1}.\end{aligned}$$

所以 $C^kB_nC^k=A_nC^k$ 以及 $C^kB_nA_n^k=A_n^{k+1}$. 根据引理 (2) 可知 $\mathcal{R}(A_n-I)=\mathcal{R}(A-I)^n$ 是闭的当且仅当 $\mathcal{R}(B_nC^k-I)=\mathcal{R}(BC^k-I)^n$ 是闭的.

上述在引理 2.2 , 2.3, 2.4, 2.5 和推论 2.7 已经分析了 19 类正则集的基础组成部分, 则以下定理成立:

**定理 2.8** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A, B, C \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k=AC^k$ 和 $C^kBA^k=A^{k+1}$, 则 $\sigma_{R_i}(A)\{0\}=\sigma_{R_i}(BC^k)\{0\}$, 其中 $1 \le i \le 19$.

## 3 广义 Drazin-Riesz 逆

1958 年, Drazin [13] 在结合环和半群中首次引入了 Drazin 逆的概念. 下面我们将在有界线性算子的框架内阐述 Drazin 逆的定义. 若对于 $T \in \mathcal{B}(X)$, 存在 $S \in \mathcal{B}(X)$ 和正整数 $n$ 满足:

$$TS = ST,\ STS = S,\ T^{n+1}S = T^n,$$

则称 $T$ 是 Drazin 可逆的, 记 $T^D = S$. 我们将满足上述等式的最小正整数 $n$ 称为 $T$ 的 Drazin 指数. 通过将上述定义中的第三个条件替换为 $T$ 是拟幂零的, Koliha 在 Banach 代数上引入并研究了广义 Drazin 逆, 详见文献 [14]. 进一步地, 通过将谱半径为零的算子推广为 Fredholm 谱半径为零 (即: Fredholm 谱 $\sigma_{R_4\cap R_9}(T) = \{0\}$) 的算子, Živković-Zlatanović S Č 和 Cvetković在 Banach 空间上定义了广义 Drazin-Riesz 逆, 并探讨了相关等价刻画. 对于 $T \in \mathcal{B}(X)$, 若存在一个 $S \in \mathcal{B}(X)$ 满足:

$$TS = ST,\ STS = S,\ TST - T \text{ 是 Riesz 算子},$$

则称 $S$ 是 $T$ 的广义 Drazin-Riesz 逆, 详见文献 [15].

设 $A$, $B$, $C$, $D$ 为含幺结合环内的元素. Cline [16] 在 1965 年证明了: 若 $AB$ 是 Drazin 可逆的, 则 $BA$ 也是 Drazin 可逆的且 $(BA)^D = B[(AB)^D]^2A$. 这个等式被称为 Cline 公式. 近年来, 许多学者对 Cline 公式进行了研究. Liao 等人 [17] 和 Wang 等人 [18] 分别研究了广义 Drazin 逆、伪 Drazin 逆的 Cline 公式. 随后, Zeng, Wu 和 Wen [19] 在条件 (1.3) 下推广了上述结论. 接下来, 我们将给出一个形似广义 Drazin-Riesz 逆 Cline 公式的新推广.

**推论 3.1** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A$, $B$, $C \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k = AC^k$ 和 $C^kBA^k = A^{k+1}$, 则 $A$ 是 Riesz 算子当且仅当 $BC^k$ 是 Riesz 算子.

**证** 由定理 2.8 可知 $\sigma_{R_4\cap R_9}(A)\{0\} = \sigma_{R_4\cap R_9}(BC^k)\{0\}$, 故 $A$ 是 Riesz 算子当且仅当 $BC^k$ 是 Riesz 算子.

**定理 3.2** 若对于某个非负整数 $k$ 且 $A$, $B$, $C \in \mathcal{B}(X)$ 满足 $C^kBC^k = AC^k$ 和 $C^kBA^k = A^{k+1}$, 则 $A$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的当且仅当 $BC^k$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的.

**证** 假设 $A$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的, 那么存在 $S$ 满足以下条件:$AS = SA$, $SAS = S$ 以及 $A - ASA$ 是 Riesz 算子. 设 $T = BS^2C^k$, 接下来我们只需证明 $BC^kT = TBC^k$, $TBC^kT = T$ 以及 $BC^k - BC^kTBC^k$ 是 Riesz 算子.
首先, $BC^kT = BC^kBS^2C^k = B(C^kBA^k)S^{k+2}C^k = BS^2(AC^k) = BS^2C^kBC^k = TBC^k$.
其次, $TBC^kT = BS^2(C^kBC^k)BS^2C^k = BS^2A(C^kBA^k)S^{k+2}C^k = BS^2C^k = T$.
最后, 设幂等算子 $Q = I - AS$, $A' = AQ = QA$ 以及 $B' = BQ$, 那么 $A - ASA = A'$ 是 Riesz 算子. 直接计算可知

$$\begin{aligned} C^kB'C^k &= C^kB(I - AS)C^k = C^kBC^k - C^kB(AS)C^k \\ &= AC^k - (C^kBA^k)S^kC^k = AC^k - A^2SC^k \\ &= (I - AS)AC^k = QAC^k = A'C^k \end{aligned}$$

以及

$$C^kB'(A')^k = C^kBQA^k = (C^kBA^k)Q = A^{k+1}Q = (A')^{k+1}.$$

对于 $C^kB'C^k = A'C^k$ 和 $C^kB'(A')^k = (A')^{k+1}$, 由推论 3.1 可知

$$\begin{aligned} BC^k - BC^kTBC^k &= BC^k - BC^kBS^2(C^kBC^k) = BC^k - BC^kBS^2AC^k \\ &= BC^k - B(C^kBA^k)S^{k+1}C^k = BC^k - B(A^{k+1}S^{k+1})C^k \\ &= B(I - AS)C^k = B'C^k \end{aligned}$$

是 Riesz 算子. 因此, $BC^k$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的.

另一方面, 假设 $BC^k$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的. 那么存在 $U$ 满足以下条件: $BC^kU = UBC^k$, $UBC^kU = U$ 以及 $BC^k - BC^kUBC^k$ 是 Riesz 算子. 设 $V = C^kU^{k+2}BA^k$, 接下来我们只需证明 $AV = VA$, $VAV = V$ 以及 $A - AVA$ 是 Riesz 算子. 首先, $AV = (AC^k)U^{k+2}BA^k = C^kU^{k+2}B(C^kBA^k) = C^kU^{k+2}BA^{k+1} = VA$. 其次, 由 $C^kBC^k = AC^k$ 可知 $BA^{k+1}C^k = (BC^k)^{k+2}$, 则 $VAV = C^kU^{k+2}(BA^{k+1}C^k)U^{k+2}BA^k = C^kU^{k+2}(BC^k)^{k+2}U^{k+2}BA^k = V$. 最后, 设 $Q = I - C^kU^{k+1}BA^k$, $A' = AQ$ 以及 $B' = BQ$, 那么

$$\begin{aligned} QA &= A - C^kU^{k+1}BA^{k+1} = A - C^kU^{k+1}BC^kBA^k \\ &= A - C^kBC^kU^{k+1}BA^k = A - AC^kU^{k+1}BA^k = AQ. \end{aligned}$$

由于 $BC^k - BC^kUBC^k = BC^k - BC^kU^{k+1}(BC^k)^{k+1} = BC^k - BC^kU^{k+1}BA^kC^k = B'C^k$, 则 $B'C^k$ 是 Riesz 算子. 由 $C^kBC^k = AC^k$ 可知 $(BC^k)^{k+2} = BA^{k+1}C^k$, 从而

$$\begin{aligned} C^kB'C^k &= C^kB(I - C^kU^{k+1}BA^k)C^k = C^kBC^k - C^kBC^kU^{k+1}BA^kC^k \\ &= AC^k - AC^kU^{k+1}BA^kC^k = A(I - C^kU^{k+1}BA^k)C^k \\ &= AQC^k = A'C^k \end{aligned}$$

以及 $C^kB'(A')^k = C^kBQA^k = C^kBA^kQ = A^{k+1}Q = (A')^{k+1}$. 对于 $C^kB'C^k = A'C^k$ 和 $C^kB'(A')^k = A'^{k+1}$, 由推论 3.1 可知 $A - AVA = A'$ 是 Riesz 算子. 因此, $A$ 是广义 Drazin-Riesz 可逆的.

## 参 考 文 献


[1] Barnes B A. Common operator properties of the linear operators $RS$ and $SR$[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1998, 126(4): 1055–1061.

[2] Duggal B P. Operator equations $ABA = A^2$ and $BAB = B^2$[J]. Functional Analysis Approximation and Computation, 2011, 3(1): 9–18.

[3] Schmoeger C. Common spectral properties of linear operators $A$ and $B$ such that $ABA = A^2$ and $BAB = B^2$[J]. Publications de l'Institut Mathematique, 2006, 79(93): 109–114.

[4] Corach G, Duggal B, Harte R. Extensions of Jacobson's lemma[J]. Communications in Algebra, 2013, 41: 520–531.

[5] Zeng Q P, Zhong H J. Common properties of bounded linear operators $AC$ and $BA$: Spectral theory[J]. Mathematische Nachrichten, 2014, 287(5-6): 717–725.

[6] Yan K, Fang X C. Common properties of the operator products in local spectral theory[J]. Acta Mathematica Sinica, 2015, (31): 1715–1724.

[7] Yan K, Fang X C. Common properties of the operator products in spectral theory[J]. Annals of Functional Analysis, 2015, 6(4): 60–69.

[8] Kordula V, Müller V. On the axiomatic theory of spectrum[J]. Studia Mathematica, 1996, 119(2): 109–128.

[9] Wang H, Huang J J. Reverse order law for the Drazin inverse in Banach spaces[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2019, 45(5): 1443–1456.

[10] Grabiner S. Uniform ascent and descent of bounded operators[J]. Journal of the Mathematical Society of Japan, 1982, 34(2): 317–337.

[11] Mbekhta M, Müller V. On the axiomatic theory of spectrum II[J]. Studia Mathematica, 1996, 119(2): 129–147.

[12] Yan K, Zeng Q P, Zhu Y C. On Drazin spectral equation for the operator products[J]. Complex Analysis and Operator Theory, 2020, 14(1): 2839–2848.

[13] Drazin M P. Pseudo-inverses in associative rings and semigroups[J]. The American Mathematical Monthly, 1958, 65(7): 506–514.

[14] Koliha J J. A generalized Drazin inverse[J]. Glasgow Mathematical Journal, 1996, 38(3): 367–381.

[15] Živković-Zlatanović S Č, Cvetković M D. Generalized Kato-Riesz decomposition and generaliz-ed Drazin-Riesz invertible operators[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2017, 65(6): 1171–1193.

[16] Cline R E. An application of representations for the generalized inverse of a matrix[J]. MAC Technical Report 592, 1965.

[17] Liao Y H, Chen J L, Cui J. Cline's formula for the generalized Drazin inverse[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2014, 37(2): 37–42.

[18] Wang Z, Chen J L. Pseudo Drazin inverses in associative rings and Banach algebras[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 437(6): 1332–1345.

[19] Zeng Q P, Wu Z Y, Wen Y X. New extensions of Cline's formula for generalized inverses[J]. Filomat, 2017, 31(7): 1973–1980.

# THE COMMON PROPERTIES OF SPECTRA UNDER THE NEW OPERATOR EQUATIONS

KONG Yao-bing, YAN Kai

(*School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China*)

**Abstract:** The spectral properties of bounded linear operators $A$ and $BC^k$ on infinite-dimensional Banach spaces that satisfy a system of operator equations are studied in this article, where $k$ is some non-negative integer. Specifically, let $A, B, C$ be bounded linear operators defined on the infinite-dimensional Banach space $X$ satisfying $C^kBC^k = AC^k$ and $C^kBA^k = A^{k+1}$. This paper proves that the 19 types of spectra of operators $A$ and $BC^k$ are consistent from the perspective of the regular set. In particular, we use the fact that the Fredholm spectra of $A$ and $BC^k$ are equal to obtain that the generalized Drazin-Riesz invertibility of $A$ and $BC^k$ is equivalent. These results are a generalization of the conclusions in Yan [7].

**Keywords:** operator equation; regularity; generalized Drazin-Riesz inverse

**2010 MR Subject Classification:** 47A10; 47A53