Vol. 44 (2024)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一类带对数阻尼项的类波方程解的整体存在性与爆破

张星娅, 李兴泉, 杨 晗
(西南交通大学数学学院, 四川 成都 611756)

摘 要: 该文研究一类具有对数阻尼项的对数型类波方程的柯西问题. 通过 Fourier 变换和 Laplace 变换得到了相应线性问题的衰减估计. 基于此衰减估计, 建立合适的求解空间, 运用压缩映像原理得到了该问题在小初值条件下存在整体解, 利用测试函数法证明解在有限时刻爆破. 推广了带结构阻尼项波动方程的有关结论.
关键词: 类波方程; 对数阻尼项; 柯西问题; 整体解; 爆破
MR(2010) **主题分类号**: 35A01; 35B33; 35B44; 35G25 **中图分类号**: O175.29
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)06-0511-16

1 引言

本文考虑如下带有对数阻尼项波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}+Lu+(I+L)^{-1}u_t=|u|^p, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ u(0,x)=u_0(x),\quad u_t(0,x)=u_1(x), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{1.1}$$

算子

$$L=\log(I+(-\Delta)^{\sigma}),\sigma\in R,\tag{1.2}$$

其通过如下 Fourier 逆变换定义

$$(Lf)(x)=\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(\log\left(1+|\xi|^{2\sigma}\right)\widehat{f}(\xi)\right)(x),\tag{1.3}$$

这里

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\cdot\xi}f(x)\,dx,\quad \xi\in\mathbb{R}^n,\tag{1.4}$$

问题 (1.1) 可以看成某种带有结构阻尼机制的类波方程, 下面先回顾已有波动方程的研究结果. Strauss[1] 研究了如下经典波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=|u|^p, & t>0,x\in\mathbb{R}^n,\\ u(0,x)=u_0(x),u_t(0,x)=u_1(x), & x\in\mathbb{R}^n,\end{cases}\tag{1.5}$$

得到临界指数 p_c, p_c 为 $(n-1)p^2-(n-1)p-2=0, n\geqslant 2$ 的正根. 若 $p>p_c$ 时, 问题 (1.5) 的解在小初值情形下整体存在, 若 $1<p<p_c$ 问题 (1.5) 的解在有限时刻爆破. 文 [2] 在超临

*收稿日期: 2024-04-01 接收日期: 2024-05-15
基金项目: 国家自然科学基金资助 (11971394).
作者简介: 张星娅 (1998–), 女, 山西晋中, 硕士生, 主要研究方向: 偏微分方程.
E-mail: xingyazhang@my.swjtu.edu.cn

界情形下证明问题 (1.5) 解的整体解存在, 文 [3,4] 在次临界情形下证明问题 (1.5) 的解在有限时刻爆破.

随后, 一些学者研究带阻尼项的波动方程 [5,6]. 文 [5] 研究如下半线性阻尼波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u_t = |u|^p, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.6}$$

得到了临界指数

$$p_c = 1 + \frac{2}{n}.$$

若初值足够小且具有紧支集, 非线性指数 p 满足如下条件时

$$\begin{cases} p_c < p < \infty, \ (n = 1, 2), \\ p_c < p < \frac{n}{n-2}, \ (n \geqslant 3), \end{cases}$$

问题 (1.6) 的解整体存在. 文 [6] 研究次临界时, 若 $\int_{R^n} u_0(x)dx > 0$, 问题 (1.6) 的解在有限时刻爆破.

近年来, 许多学者将问题 (1.6) 推广到带有分数阶结构阻尼的波动方程. 文 [7] 研究如下分数阶波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\triangle)^{\sigma} u + (-\triangle)^{\delta} u_t = |u|^p, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(0,x) = (u_0, u_1)(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.7}$$

得到了临界指数

$$p_c = 1 + \frac{2\sigma}{(n - 2\delta)_+}.$$

在假设小初值情形下, 通过整体迭代法证明了当 $p > p_c$ 时, 问题 (1.7) 的解整体存在, 利用检验函数法证明了 $0 < p < p_c$ 问题 (1.7) 的解在有限时刻爆破.

Charao[8] 在波动方程中引入了对数型阻尼项, 研究如下具有对数阻尼项波动方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \varDelta u + \log(I + (-\varDelta)^{\theta}) u_t = 0, \ (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = 0, u_t(0,x) = u_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.8}$$

得到了问题 (1.8) 解的渐近性态, 以及解在 L^2 意义下的最优估计.

文 [9] 将问题 (1.8) 推广到带对数阻尼机制的对数型类波方程

$$\begin{cases} u_{tt} + Lu + (I + L)^{-1} u_t = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 $L = \log(I - \Delta)$, 问题 (1.9) 可以看成是如下模型的推广

$$u_{tt} - \varDelta u_{tt} - \varDelta u + \varDelta^2 u + u_t = 0, \tag{1.10}$$

得到了其在 L^2 框架下解的渐近性态, 并应用它来研究关于 L^2 范数的解的最优衰减率.

基于以上文献的启发, 本文在问题 (1.9) 基础上考虑非线性问题 (1.1), 研究是否可以得到一个临界指数 p_c, 使得 $p>p_c$ 时问题 (1.1) 的解整体存在, $0<p<p_c$ 时问题 (1.1) 的解有限时刻爆破. 本文的难点在于合理处理对数阻尼项的估计. 本文结构安排如下: 第二节引入相关符号以及证明文章主要结论所需公式引理; 第三节证明问题 (1.1) 解的整体存在性; 第四节证明问题 (1.1) 解的爆破. 下面给出本文的主要结论.

定理 1.1 假设 $m\in[1,2)$, $\max\{\sigma,\ n(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})+2k\}\leqslant l<k+\sigma$. 若

$$\frac{2}{m}\leqslant p\leqslant\begin{cases}\infty & n\leqslant\frac{4k}{2-m},\\ \frac{n-2(l-\sigma)}{n-2k} & n>2k,\end{cases}$$

指数 p 满足

$$p>1+\frac{2\sigma m}{n},$$

初值 $(u_0,u_1)\in\mathcal{A}=(L^m\cap\dot{H}^{k+l})\times(L^m\cap\dot{H}^{k+l-\sigma})$, 且存在一个足够小的常数 ε 使得

$$\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}=\|u_0\|_{L^m}+\|u_0\|_{\dot{H}^{k+l}}+\|u_1\|_{L^m}+\|u_1\|_{\dot{H}^{k+l-\sigma}}\leqslant\varepsilon,$$

问题 (1.1) 存在唯一的整体解

$$u\in C([0,\infty),\dot{H}^k),$$

且有如下衰减估计

$$\|u\|_{\dot{H}^k}\lesssim(1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}.$$

定理 1.2 假设 $\sigma\geqslant1$, $m\in[1,2)$, $0<k<\sigma$, 当 $n\leqslant2k$, $p>1$ 或 $n>2k, p\leqslant\frac{n}{n-2k}$ 时, 设初值 $(u_0,u_1)\in(L^m\cap\ L^2)\times(L^m\cap L^2)$, 满足 $\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)dx\geqslant0$ 且

$$\int_{\mathbb{R}^n}u_1(x)dx>0, m=1,$$

或

$$u_1(x)\gtrsim|x|^{-\frac{n}{m}}(\log(1+|x|))^{-1},\ |x|\to\infty,\ m\in(1,2),$$

若 $1<p<1+\frac{2\sigma m}{n}$ 时, 问题 (1.1) 的解在有限时刻爆破.

2 预备知识

本文引入如下记号.

(1) 齐次 Sobolev 空间

$$\dot{H}^s_p:=\{f\in S':\|\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s\widehat{f})\|_{L^p}<\infty,s\geqslant0\}.$$

(2) $f\lesssim g$ 表示存在一个常数 C 使得 $f\leqslant Cg$.

下面通过引理 2.1 给出 $\rho(\xi)$ 的定义.

引理 2.1 设 $\delta_0\in(0,1)$, 令 $\varphi(\xi)=\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))$, $\psi(\xi)=\dfrac{1}{1+\log(1+|\xi|^{2\sigma})}$, $\phi(\xi)=\sqrt{\log(1+|\xi|^{2\sigma})}$, 则

(1) 若 $|\xi|\leqslant\delta_0$，则 $\varphi(\xi)\leqslant\psi(\xi),\varphi(\xi)\leqslant\phi(\xi)$.

(2) 若 $|\xi|\geqslant\delta_0$，则 $\psi(\xi)\leqslant\varphi(\xi),\psi(\xi)\leqslant\phi(\xi)$.

证 当 $r\geqslant 0$ 时, 设 $\theta(r)=(1+\log(1+r^{2\sigma}))\sqrt{\log(1+r^{2\sigma})}-1$.

由于 $\theta(0)=-1$ 和 $\theta(1)=(1+\log 2)\sqrt{2}-1>0$, $\theta(r)$ 关于 r 连续, 存在 $0<\delta_0<1$ 使得 $\theta(\delta_0)=0$.
当 $0\leqslant r\leqslant\delta_0$ 时, 有 $(1+\log(1+r^{2\sigma}))\sqrt{\log(1+r^{2\sigma})}\leqslant 1$, 即 $\varphi(r)\leqslant\phi(r)\leqslant\psi(r)$.
当 $r\geqslant\delta_0$ 时, 有 $(1+\log(1+r^{2\sigma}))\sqrt{\log(1+r^{2\sigma})}\geqslant 1$, 即 $\varphi(r)\geqslant\phi(r)\geqslant\psi(r)$. 综上, 证毕.

对于 $\delta_0>0$, 当 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 定义如下函数

$$\rho(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma})), & |\xi|\leqslant\delta_0,\\ \dfrac{1}{2(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))}, & |\xi|>\delta_0.\end{cases}\tag{2.1}$$

设 $G(t,\xi)$, $H(t,\xi)$ 是下面线性问题的基本解

$$\begin{cases}(I+\log(I+(-\Delta)^{\sigma}))\,G_{tt}+\log(I+(-\Delta)^{\sigma})\,(I+\log(I+(-\Delta)^{\sigma}))\,G+G_t=0,\\ G(0,x)=\delta(x),\\ G_t(0,x)=0.\end{cases}$$
$$\begin{cases}(I+\log(I+(-\Delta)^{\sigma}))\,H_{tt}+\log(I+(-\Delta)^{\sigma})\,(I+\log(I+(-\Delta)^{\sigma}))\,H+H_t=0,\\ H(0,x)=0,\\ H_t(0,x)=\delta(x).\end{cases}\tag{2.2}$$

其中 $\delta(x)$ 是 Dirichlet 函数. (2.2) 式在 Fourier 空间中的解可以写为

$$\begin{aligned}\widehat{G}(t,\xi)&=\mathcal{L}^{-1}[\frac{\lambda}{1+\log(1+|\xi|^{2\sigma})\lambda^2+\lambda+\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))}],\\ \widehat{H}(t,\xi)&=\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{1+\log(1+|\xi|^{2\sigma})\lambda^2+\lambda+\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))}].\end{aligned}\tag{2.3}$$

(2.3) 式由 Laplace 逆变换定义. 由于在此过程中并未考虑到分母的零点, 下面证明算子 $\widehat{G}(t,\xi)$, $\widehat{H}(t,\xi)$ 存在.

引理 2.2 $\widehat{G}(t,\xi),\widehat{H}(t,\xi)$ 存在.

证 定义

$$F(\lambda)=(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))\lambda^2+\lambda+\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}).$$

为了证明 $\mathcal{L}^{-1}[\lambda/F(\lambda)]$ 存在, 我们需要考虑 $F(\lambda)$ 的零点. 若 $\lambda_1=\sigma_1+i\nu_1$ 是 $F(\lambda)$ 的一个零点, 即 σ_1 和 ν_1 满足

$$\begin{aligned}ReF(\lambda)&=(\sigma_1^2-\nu_1^2)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))+\sigma_1+\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))=0,\\ ImF(\lambda)&=2\sigma_1\nu_1(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))+\nu_1=0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

当 $|\xi|=0$ 时, $\sigma_1=\nu_1=0$ (显然), 当 $|\xi|\neq 0$ 时, $\sigma_1<0$. (反证法) 若 $\sigma_1\geqslant 0$, $\nu_1=0$.

$$ReF(\lambda_1)=\sigma_1^2(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))+\sigma_1+\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))\geqslant 0,$$

与 $ReF(\lambda_1)=0$ 矛盾. 若 $\sigma_1 \geqslant 0$, $\nu_1 \neq 0$.

$$ImF(\lambda_1)=\nu_1(2\sigma_1(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))+1)\neq 0,$$

与 $ImF(\lambda_1)=0$, 矛盾. 因此 $\sigma_1<0$.

综上, 当 $|\xi|=0$ 时, $\lambda/F(\lambda)$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}, Re(\lambda)>0$ 解析. 当 $|\xi|\neq 0$ 时, $\lambda/F(\lambda)$ 在 $\lambda\in\mathbb{C}, Re(\lambda)\geqslant 0$ 解析, 若 $\lambda=\sigma+iv$, $\sigma>max\{Re\lambda_s\}$, 其中 λ_s 是 $F(\lambda)$ 所有奇异点. 有

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{\lambda}{F(\lambda)}]=\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\lambda e^{\lambda t}}{F\left(\lambda\right)}d\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\left(\sigma+i\nu\right)e^{(\sigma+i\nu)t}}{F\left(\sigma+i\nu\right)}d\nu=\int_{\{\nu;|\nu|\leqslant R\}}+\int_{\{\nu;|\nu|>R\}}=J_1+J_2,$$

易知 J_1 收敛, 下面我们考虑 J_2, 由

$$\frac{\lambda}{F(\lambda)}=\frac{1}{\lambda}-\frac{\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))}{\lambda F(\lambda)},$$

知 J_2 收敛, 所以 $\widehat{G}(t,\xi)$ 存在. 同理得 $\widehat{H}(t,\xi)$ 存在.

由 Duhamel 原理, 问题 (1.1) 的解可以表示为

$$u=G(t,x)*u_0(x)+H(t,x)*u_1(x)+\int_0^t H(t-\tau,x)*|u|^p d\tau, \tag{2.5}$$

其线性问题的解为

$$u^{ln}=G(t,x)*u_0(x)+H(t,x)*u_1(x). \tag{2.6}$$

为得到算子 $\widehat{G}(t,\xi)$, $\widehat{H}(t,\xi)$ 的估计, 先利用能量法得到问题 (1.1) 的解在 Fourier 空间中的逐点估计. 下面先对其线性问题进行 Fourier 变换, 得

$$\begin{cases}\left(1+\log\left(1+|\xi|^{2\sigma}\right)\right)\widehat{u}_{tt}+\log\left(1+|\xi|^{2\sigma}\right)\left(1+\log\left(1+|\xi|^{2\sigma}\right)\right)\widehat{u}+\widehat{u}_t=0, t>0,\xi\in\mathbb{R}^n,\\ \widehat{u}\left(0,\xi\right)=\widehat{u}_0\left(\xi\right), \quad \widehat{u}_t\left(0,\xi\right)=\widehat{u}_1\left(\xi\right), \qquad \xi\in\mathbb{R}^n.\end{cases} \tag{2.7}$$

引理 2.3 若 $t>0$, $\xi\in R_\xi^n$, 假设 $u(t,x)$ 是问题 (1.1) 的解, 则

$$\begin{aligned}&(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2+\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}(t,\xi)|^2\\ \lesssim\ &(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))e^{-\frac{\rho(\xi)}{2}t}|\widehat{u}_1(t,\xi)|^2+\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))e^{-\frac{\rho(\xi)}{2}}|\widehat{u}_0(\xi)|^2.\end{aligned} \tag{2.8}$$

证 (2.7) 式两边同乘 $\overline{\widehat{u}_t}$ 得

$$\frac{d}{dt}E^{'}(t,\xi)+|\widehat{u}_t|^2=0, \tag{2.9}$$

其中

$$E^{'}(t,\xi)=\frac{1}{2}(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}_t|+\frac{1}{2}\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}|^2. \tag{2.10}$$

(2.7) 式两边同时乘 $\rho(\xi)$ 得

$$\rho(\xi)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))\widehat{u}_{tt}\overline{\widehat{u}}+\rho(\xi)\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}|^2+\frac{1}{2}\rho(\xi)\frac{d}{dt}|\widehat{u}|^2=0, \tag{2.11}$$

取实部得

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[\rho(\xi)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))\mathrm{Re}(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}})+\frac{1}{2}\rho(\xi)\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))] \\
&\quad+\rho(\xi)\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}|^2 \\
&=\rho(\xi)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}_t|^2.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

定义如下函数

$$
\begin{aligned}
&E(t,\xi)=E^{'}(t,\xi)+\rho(\xi)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))Re(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}})+\frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}|^2, \\
&F(t,\xi)=|\widehat{u}_t|^2+\rho(\xi)\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}|^2, \\
&R(t,\xi)=\rho(\xi)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}_t|^2.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

得

$$
\frac{d}{dt}E(t,\xi)+F(t,\xi)=R(t,\xi),\qquad t>0,\ \xi\in R^n_\xi. \tag{2.14}
$$

下面估计 $E(t,\xi)$

$$
\begin{aligned}
E(t,\xi)&\leqslant E^{'}(t,\xi)+\rho(\xi)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}_t||\widehat{u}|+\frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}|^2 \\
&\leqslant E^{'}(t,\xi)+\frac{1}{2}(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}_t|^2+\frac{1}{2}\rho(\xi)^2(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}|^2+\frac{1}{2}\rho(\xi)|\widehat{u}|^2 \\
&\leqslant 3E^{'}(t,\xi), \\
E(t,\xi)&=\rho(\xi)(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))\mathrm{Re}(\widehat{u}_t\overline{\widehat{u}})+\frac{\rho(\xi)}{2}|\widehat{u}|^2 \\
&\geqslant\frac{1}{4}(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}_t|^2+\frac{1}{4}\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}|^2 \\
&=\frac{1}{2}E^{'}(t,\xi),
\end{aligned}
$$

得

$$
\frac{1}{2}E^{'}(t,\xi)\leqslant E(t,\xi)\leqslant 3E^{'}(t,\xi), \tag{2.15}
$$

由 (2.13) 和 (2.14) 式得

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t,\xi)+\frac{1}{2}\rho(\xi)E(t,\xi)&=R(t,\xi)-F(t,\xi)+\frac{1}{2}\rho(\xi)E(t,\xi) \\
&\leqslant-\frac{1}{8}|\widehat{u}_t|^2-\frac{1}{4}\rho(\xi)\log(1+|\xi|^{2\sigma})(1+\log(1+|\xi|^{2\sigma}))|\widehat{u}|^2 \\
&\leqslant 0,
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

即

$$
E(t,\xi)\lesssim E(0,\xi)e^{-\frac{\rho(\xi)}{2}t},
$$

将 (2.15) 式代入上式得

$$
E(t,\xi)\lesssim E^{'}(0,\xi)e^{-\frac{\rho(\xi)}{2}t}. \tag{2.17}
$$

将 $E(t,\xi)$, $E^{'}(t,\xi)$ 代入 (2.17) 式, 引理 2.3 得证.

引理 2.4 基本解 $G(t,\xi), H(t,\xi)$ 满足

$$|\widehat{G}(t,\xi)| \lesssim e^{-c\rho(\xi)t},\ |\widehat{H}(t,\xi)| \lesssim [\log(1+|\xi|^{2\sigma})]^{-\frac{1}{2}} e^{-c\rho(\xi)t}.$$

证 在 (2.8) 式中, u 满足 (2.6) 式, 令 $\widehat{u}_1=0$, 得

$$|\widehat{G}_t(t,\xi)|^2+\log(1+|\xi|^{2\sigma})|\widehat{G}(t,\xi)|^2 \lesssim \log(1+|\xi|^{2\sigma})e^{-\frac{\rho(\xi)}{2}t}, \tag{2.18}$$

令 $\widehat{u}_0=0$, 得

$$|\widehat{H}_t(t,\xi)|^2+\log(1+|\xi|^{2\sigma})|\widehat{H}(t,\xi)|^2 \lesssim e^{-\frac{\rho(\xi)}{2}t}. \tag{2.19}$$

引理 2.5 假设 $k\geqslant 0,\ l\geqslant 0,\ m\in[1,2)$ 有

$$\begin{aligned} &\|D_x^k G(t)*\varphi\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2\sigma}}\|\varphi\|_{L^m}+(1+t)^{-\frac{l}{2\sigma}}\|\varphi\|_{\dot{H}^{k+l}},\\ &\|D_x^k H(t)*\psi\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})-\frac{k}{2\sigma}}\|\psi\|_{L^m}+(1+t)^{-\frac{l}{2\sigma}}\|\psi\|_{\dot{H}^{k+l-\sigma}}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

证 当 $|\xi|\leqslant\delta_0$ 时, $\rho(\xi)|\gtrsim|\xi|^{2\sigma}$; 当 $|\xi|>\delta_0$ 时, $\rho(\xi)|\gtrsim|\xi|^{-2\sigma}$, 由引理 2.4 得

$$\begin{aligned} \|D_x^k G(t)*\varphi\|_{L^2}^2 &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2k}e^{-c\rho(\xi)t}|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\\ &\lesssim \int_{\{\xi;|\xi|\leqslant\delta_0\}}|\xi|^{2k}e^{-c|\xi|^{2\sigma}t}|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi+\int_{\{\xi;|\xi|>\delta_0\}}|\xi|^{2k}e^{-c|\xi|^{-2\sigma}t}|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi\\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{2}{m}-1\right)-\frac{k}{\sigma}}\|\varphi\|_{L^m}^2+(1+t)^{-\frac{l}{\sigma}}\|\varphi\|_{\dot{H}^{k+l}}^2,\\ \|D_x^k H(t)*\psi\|_{L^2}^2 &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2k}\left[\log\left(1+|\xi|^{\sigma}\right)\right]^{-1}e^{-c\rho(\xi)t}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\\ &\lesssim \int_{\{\xi;|\xi|\leqslant\delta_0\}}|\xi|^{2k}e^{-c|\xi|^{2\sigma}t}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi+\int_{\{\xi;|\xi|>\delta_0\}}|\xi|^{-\sigma}e^{-c|\xi|^{-2\sigma}t}|\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{2}{m}-1\right)-\frac{k}{\sigma}}\|\psi\|_{L^m}^2+(1+t)^{-\frac{l}{\sigma}}\|\psi\|_{\dot{H}^{k+l-\sigma}}^2, \end{aligned} \tag{2.21}$$

其中 $k\geqslant 0,\ l\geqslant 0,\ m\in[1,2)$.

引理 2.6 (G-N 不等式) 假设 $p,\ p_0,\ p_1\in(1,\infty)$ 且 $k\in[0,s),\ s>0,\ f\in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)\cap\dot{H}_{p_1}^s(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\|f\|_{\dot{H}_p^k(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}^{1-\beta}\|f\|_{\dot{H}_{p_1}^s(\mathbb{R}^n)}^{\beta},$$

其中 $\beta=\beta_{k,s}=\frac{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}+\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}+\frac{s}{n}\right)}$ 且 $\beta\in\left[\frac{k}{s},1\right]$.

引理 2.7 (Leibniz 法则) 假设 $s>0,\ 1\leqslant r\leqslant\infty,\ 1<p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2\leqslant\infty$ 满足

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2},$$

当 $f\in\dot{H}_{p_1}^s(\mathbb{R}^n)\cap L^{q_1}(\mathbb{R}^n),\ g\in\dot{H}_{p_2}^s(\mathbb{R}^n)\cap L^{q_2}(\mathbb{R}^n)$ 时, 有

$$\|fg\|_{\dot{H}_{p_2}^s(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{\dot{H}_{p_1}^s(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^n)}+\|f\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{\dot{H}_{q_2}^s(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 2.8 (链式法则) 假设 $s>0$, $p>[s]$, 且 $1<r,r_1,r_2<\infty$ 满足

$$\frac{1}{r}=\frac{p-1}{r_1}+\frac{1}{r_2},$$

当 $f\in \dot{H}^s_{r_2}(\mathbb{R}^n)\cap L^{r_1}(\mathbb{R}^n)$ 时, 有

$$\|f|f|^{p-1}\|_{\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n)}+\||f|^p\|_{\dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n)}\lesssim \|f\|^{p-1}_{L^{r_1}(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{\dot{H}^s_{r_2}(\mathbb{R}^n)}.$$

引理 2.9[5] 若 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, 有

$$\int_0^t(1+t-\tau)^{-\alpha}(1+\tau)^{-\beta}d\tau\lesssim\begin{cases}(1+t)^{-\min\{\alpha,\beta\}} & \max\{\alpha,\beta\}>1,\\ (1+t)^{-\min\{\alpha,\beta\}}\log(e+t) & \max\{\alpha,\beta\}=1,\\ (1+t)^{1-\alpha-\beta} & \max\{\alpha,\beta\}<1.\end{cases}$$

3 定理 1.1 的证明

定义空间

$$X(T)=\{u\in C([0,T],\ \dot{H}^k)\},$$

装备相应的范数

$$\|u\|_{X(T)}:=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\{(1+t)^{\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})}\|u(t,\cdot)\|_{L^2}+(1+t)^{\frac{k}{2\sigma}+\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})}\||D|^ku(t,\cdot)\|_{L^2}\}.$$

定义算子 N

$$\begin{aligned}Nu(t,x)&=G(t,x)*u_0(x)+H(t,x)*u_1(x)+\int_0^tH(t-\tau,x)*|u|^pd\tau\\&=u^{ln}(t,x)+u^{nl}(t,x),\end{aligned}$$

下证算子 N 满足如下两个不等式

$$\|Nu\|_{X(T)}\lesssim\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}+\|u\|^p_{X(T)}. \tag{3.1}$$

$$\|Nu-Nv\|_{X(T)}\lesssim\|u-v\|_{X(T)}(\|u\|^{p-1}_{X(T)}+\|v\|^{p-1}_{X(T)}). \tag{3.2}$$

由引理 2.5 得

$$\begin{aligned}\|u^{\ln}(t,x)\|_{L^2}&\lesssim\|G(t)*u_0\|_{L^2}+\|H(t)*u_1\|_{L^2}\\&\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}},\\\||D|^ku^{\ln}(t,x)\|_{L^2}&\lesssim\|G(t)*u_0\|_{\dot{H}^k}+\|H(t)*u_1\|_{\dot{H}^k}\\&\lesssim(1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})}\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}},\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中 $l\geqslant n(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})+2k$. 综上, 有

$$\|u^{\ln}(t,x)\|_{X(T)}\lesssim\|(u_0,u_1)\|_{\mathcal{A}}. \tag{3.4}$$

下证

$$\|u^{nl}\|_{X(T)} \lesssim \|u\|^p_{X(T)}. \tag{3.5}$$

在 $[0,t/2]$ 用 $(L^2\cap L^m)-L^2$ 估计和 $[t/2,t]$ 用 L^2-L^2 估计, 可得

$$\begin{aligned}\|u^{nl}(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^t \|H(t-\tau,\cdot)*|u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2}d\tau \\ &\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^m}d\tau+\int_{\frac{t}{2}}^t\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2}d\tau.\end{aligned} \tag{3.6}$$

由引理 2.6 得

$$\begin{aligned}\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^m} &= \|u\|^p_{L^{mp}} \lesssim \|u\|^{(1-\beta_1)p}_{L^2}\||D|^k u\|^{\beta_1 p}_{L^2} \lesssim (1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{mp}\right)}\|u(\tau,\cdot)\|^p_{X(T)}, \\ \||u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2} &= \|u\|^p_{L^{2p}} \lesssim \|u\|^{(1-\beta_2)p}_{L^2}\||D|^k u\|^{\beta_2 p}_{L^2} \lesssim (1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p}\right)}\|u(\tau,\cdot)\|^p_{X(T)}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中 β_1,β_2 满足

$$\beta_1=\tfrac{n}{k}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{mp}\right)\in[0,1],\ \beta_2=\tfrac{n}{k}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2p}\right)\in[0,1]. \tag{3.8}$$

解得

$$\begin{cases} p\geqslant \frac{2}{m} & n\leqslant 2k, \\ \frac{2}{m}\leqslant p\leqslant \frac{n}{n-2k} & n>2k. \end{cases}$$

若 $-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{mp})+1<0$, 即 $p>1+\frac{2\sigma m}{n}$ 有

$$\int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{mp}\right)}d\tau \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}, \tag{3.9}$$

若 $-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p})+1<-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})$, 即 $p>1+\frac{2\sigma m}{n}$ 有

$$\int_{\frac{t}{2}}^t (1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p}\right)}d\tau \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}, \tag{3.10}$$

其中 $\tau\in[0,t/2]$, $(1+t-\tau)\approx(1+t), \tau\in[t/2,t]$, $(1+\tau)\approx(1+t)$. (3.9) 和 (3.10) 式代入 (3.6) 式 得

$$\|u^{nl}(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u\|^p_{X(T)}. \tag{3.11}$$

下面对 $\||D|^k u^{nl}(t,\cdot)\|_{L^2}$ 估计, 由 (3.7) 式得

$$\begin{aligned}\||D|^k u^{nl}(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^m}d\tau \\ &\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}}\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2}d\tau+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{l}{2\sigma}}\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{\dot H^{k+l-\sigma}}d\tau \\ &\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})}(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{mp})}\|u(\tau,\cdot)\|^p_{X(T)}d\tau \\ &\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}}(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p})}\|u(\tau,\cdot)\|^p_{X(T)}d\tau \\ &\quad+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{l}{2\sigma}+\frac{k}{2\sigma}}\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{\dot H^{l-\sigma}}d\tau.\end{aligned} \tag{3.12}$$

当 $\sigma \leqslant l < k+\sigma$, 由引理 2.6 和引理 2.8 得

$$\begin{aligned}
\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{\dot H^{l-\sigma}} &\lesssim \|u(\tau,\cdot)\|_{L^{r_1}}^{p-1}\|u(\tau,\cdot)\|_{\dot H^{l-\sigma}_{r_2}},\\
\|u(\tau,\cdot)\|_{L^{r_1}}^{p-1} &\lesssim \|u(\tau,\cdot)\|_{L^2}^{(1-\beta_{r_1})(p-1)}\||D|^k u(\tau,\cdot)\|_{L^2}^{\beta_{r1}(p-1)}\\
&\lesssim (1+\tau)^{-\frac{n(p-1)}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r_1})}\|u\|_{X(T)}^{p-1},\\
\|u(\tau,\cdot)\|_{\dot H^{l-\sigma}_{r_2}} &\lesssim \|u(\tau,\cdot)\|_{L^2}^{(1-\beta_{r_2})}\||D|^k u(\tau,\cdot)\|_{L^2}^{\beta_{r2}}\\
&\lesssim (1+\tau)^{-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{r_2}+\frac{l-\sigma}{n})}\|u\|_{X(T)}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $\frac{1}{2}=\frac{p-1}{r_1}+\frac{1}{r_2}, \beta_{r_1}, \beta_{r_2}$ 满足

$$\beta_{r_1}=\frac{n}{k}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_1})\in[0,1],\ \beta_{r_2}=\frac{n}{k}(\frac{1}{2}-\frac{1}{r_2}+\frac{l-\sigma}{n})\in[\frac{l-\sigma}{k},1].$$

解得

$$\begin{cases} p>1 & n\leqslant 2k,\\ 1<p\leqslant \frac{n-2(l-\sigma)}{n-2k} & n>2k.\end{cases}$$

由 (3.13) 式得

$$\||u(\tau,\cdot)|^p\|_{\dot H^{l-\sigma}} \lesssim (1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p})}\|u\|_{X(T)}^p. \tag{3.14}$$

若 $k<\sigma, p>1+\frac{2\sigma m}{n}$ 则

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{mp}\right)} &\lesssim (1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)},\\
\int_{\frac{t}{2}}^{t}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}}(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p}\right)} &\lesssim (1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中 $\tau\in[0,t/2]$, $(1+t-\tau)\approx(1+t), \tau\in[t/2,t], (1+\tau)\approx(1+t)$. 若 $l\geqslant n(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})+2k$, 且 $p>1+\frac{2\sigma m}{n}$, 由引理 2.9 得

$$\begin{aligned}
\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{l}{2\sigma}+\frac{k}{2\sigma}}\||u|^p\|_{\dot H^{l-\sigma}}d\tau &\lesssim \int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{l}{2\sigma}+\frac{k}{2\sigma}}(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u\|_{X(T)}^p\\
&\lesssim (1+t)^{-\min\left\{\frac{l}{2\sigma}-\frac{k}{2\sigma},\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)\right\}}\|u\|_{X(T)}^p\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u\|_{X(T)}^p.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.15) 和 (3.16) 式代入 (3.12) 式得

$$\||D|^k u^{nl}(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u\|_{X(T)}^p. \tag{3.17}$$

由 (3.4) 和 (3.5) 式知 (3.1) 式成立. 下面估计 $\|u^{nl}-v^{nl}\|_{L^2}$.

$$\begin{aligned}
\|u^{nl}(t,\cdot)-v^{nl}(t,\cdot)\|_{L^2} &\lesssim \int_0^t\|H(t)*(|u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p)\|_{L^2}d\tau\\
&\lesssim \int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\||u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p\|_{L^m}d\tau\\
&\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t\||u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2}d\tau,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

由 Hölder 不等式和引理 2.6 得

$$\begin{aligned}\||u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p\|_{L^m}&\lesssim\|u(\tau,\cdot)-v(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}(\|u(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}^{p-1}+\|u(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}^{p-1})\\&\lesssim(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{mp})}\|u-v\|_{X(T)}(\|u\|_{X(T)}^{p-1}+\|v\|_{X(T)}^{p-1}),\\\||u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p\|_{L^2}&\lesssim\|u(\tau,\cdot)-v(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}(\|u(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}^{p-1}+\|u(\tau,\cdot)\|_{L^{mp}}^{p-1})\\&\lesssim(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p})}\|u-v\|_{X(T)}(\|u\|_{X(T)}^{p-1}+\|v\|_{X(T)}^{p-1}).\end{aligned}\tag{3.19}$$

(3.19) 式代入 (3.18) 式得

$$\|u^{nl}-v^{nl}\|_{L^2}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u-v\|_{X(T)}\left(\|u\|_{X(T)}^{p-1}+\|v\|_{X(T)}^{p-1}\right).\tag{3.20}$$

下面对 $\||D|^k\left(u^{nl}-v^{nl}\right)\|_{L^2}$ 估计.

$$\begin{aligned}\||D|^k\left(u^{nl}-v^{nl}\right)\|_{L^2}&\lesssim\int_0^t\||D|^kH(t-\tau)*(|u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p)\|_{L^2}d\tau\\&\lesssim\int_0^{\frac{t}{2}}(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|(|u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p)\|_{L^m}d\tau\\&\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t(1+t-\tau)^{-\frac{k}{2\sigma}}\|(|u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p)\|_{L^2}d\tau\\&\quad+\int_0^t(1+t-\tau)^{-\frac{l}{2\sigma}+\frac{k}{2\sigma}}\|(|u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p)\|_{\dot{H}^{l-\sigma}}d\tau.\end{aligned}\tag{3.21}$$

引入积分表达式

$$|u|^p-|v|^p=p\int_0^1(u-v)\cdot G(\omega u+(1-\omega)v)\,d\omega.\tag{3.22}$$

其中 $G=u|u|^{p-2}$. 由 (3.22) 式, 引理 2.7 和 Minkowski 不等式得

$$\begin{aligned}\||u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p\|_{\dot{H}^{l-\sigma}}&\lesssim\int_0^1\|D^{l-\sigma}((u-v)G(\omega u+(1-\omega)v))\|_{L^2}d\tau\\&\lesssim\|u-v\|_{\dot{H}^{l-\sigma}_{s_1}}\int_0^1\|G(\omega u+(1-\omega)v)\|_{L^{s_2}}d\omega\\&\quad+\|u-v\|_{L^{s_3}}\int_0^1\|G(\omega u+(1-\omega)v)\|_{\dot{H}^{l-\sigma}_{s_4}}d\omega\\&\lesssim\|u-v\|_{\dot{H}^{l-\sigma}_{s_1}}\left(\|u\|_{L^{s_2(p-1)}}^{p-1}+\|v\|_{L^{s_2(p-1)}}^{p-1}\right)\\&\quad+\|u-v\|_{L^{s_3}}\int_0^1\|G(\omega u+(1-\omega)v)\|_{\dot{H}^{l-\sigma}_{s_4}}d\omega,\end{aligned}\tag{3.23}$$

其中 $\frac{1}{2}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{s_3}+\frac{1}{s_4}$. 若 $\sigma\leqslant l<k+\sigma$, 由引理 2.6 得

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{\dot{H}_{s_1}^{l-\sigma}} &\lesssim \|u-v\|_{L^2}^{(1-\beta_3)}\||D|^k(u-v)\|_{L^2}^{\beta_3}\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_1})-\frac{l-\sigma}{2\sigma}}\|u-v\|_{X(T)},\\
\|u\|_{L^{s_2(p-1)}}^{p-1} &\lesssim \|u\|_{L^2}^{(1-\beta_4)(p-1)}\||D|^k u\|_{L^2}^{\beta_4(p-1)}\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n(p-1)}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_2(p-1)}\right)}\|u\|_{X(T)}^{p-1},\\
\|v\|_{L^{s_2(p-1)}}^{p-1} &\lesssim \|v\|_{L^2}^{(1-\beta_4)(p-1)}\||D|^k v\|_{L^2}^{\beta_4(p-1)}\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n(p-1)}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_2(p-1)}\right)}\|v\|_{X(T)}^{p-1}\\
\|u-v\|_{L^{s_3}} &\lesssim \|u-v\|_{L^2}^{(1-\beta_5)}\||D|^k(u-v)\|_{L^2}^{\beta_5}\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_3})}\|u-v\|_{X(T)}.
\end{aligned}\tag{3.24}$$

其中 β_3 , β_4 , β_5 满足

$$\beta_3=\frac{n}{k}(\frac{1}{2}-\frac{1}{s_1})+\frac{l-\sigma}{k}\in[\frac{l-\sigma}{k},1],\ \beta_4=\beta_5=\frac{n}{k}(\frac{1}{2}-\frac{1}{s_2})\in[0,1].$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1\|G(\omega u+(1-\omega)v)\|_{\dot{H}_{s_4}^{l-\sigma}}d\omega &= \int_0^1\|D^{l-\sigma}G(\omega u+(1-\omega)v)\|_{L^{s_4}}d\omega\\
&\lesssim \int_0^1\|D^{l-\sigma}(\omega u+(1-\omega)v)\|_{L^{s_5}}\cdot\|\omega u+(1-\omega)v\|_{L^{s_6}}^{p-2}d\omega\\
&\lesssim \int_0^1(1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_5}\right)-\frac{l-\sigma}{2\sigma}}\|\omega u+(1-\omega)v\|_{X(T)}\\
&\quad\times(1+t)^{-\frac{n(p-2)}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_6(p-2)}\right)}\|\omega u+(1-\omega)v\|_{X(T)}^{p-2}d\omega\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n(p-1)}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_4(p-1)}\right)-\frac{l-\sigma}{2\sigma}}\left(\|u\|_{X(T)}^{p-1}+\|v\|_{X(T)}^{p-1}\right),
\end{aligned}\tag{3.25}$$

其中 $\frac{1}{s_4}=\frac{1}{s_5}+\frac{p-2}{s_6}$. (3.24) 和 (3.25) 式代入 (3.23) 式得

$$\||u(\tau,\cdot)|^p-|v(\tau,\cdot)|^p\|_{\dot{H}^{l-\sigma}}\lesssim(1+\tau)^{-\frac{np}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u-v\|_{X(T)}\left(\|u\|_{X(T)}^{p-1}+\|v\|_{X(T)}^{p-1}\right),\tag{3.26}$$

(3.26) 式代入 (3.21) 式, 再由 (3.15) 和 (3.16) 式得

$$\begin{aligned}
\||D|^k(u^{nl}-v^{nl})\|_{L^2} &\lesssim \|u-v\|_{X(T)}(\|u\|_{X(T)}^{p-1}-\|v\|_{X(T)}^{p-1})\\
&\quad(\int_0^{\frac{t}{2}}(1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{s_5})-\frac{k}{2\sigma}}(1+t)^{-\frac{n}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{mp})}d\tau\\
&\quad+\int_{\frac{t}{2}}^t(1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}}(1+t)^{-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2p})}d\tau\\
&\quad+\int_0^t(1+t)^{-\frac{l}{2\sigma}+\frac{k}{2\sigma}}(1+t)^{-\frac{np}{2\sigma}(\frac{1}{m}-\frac{1}{2})}d\tau)\\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{k}{2\sigma}-\frac{n}{2\sigma}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)}\|u-v\|_{X(T)}\left(\|u\|_{X(T)}^{p-1}+\|v\|_{X(T)}^{p-1}\right).
\end{aligned}\tag{3.27}$$

由 (3.20) 式和 (3.27) 式知 (3.2) 式成立, 再由 Banach 不动点定理知问题 (1.1) 在小初值情形下整体解存在. 定理 1.1 证毕.

4 定理 1.2 的证明

为证明定理 1.2, 先给出如下引理.

引理 4.1[10] 假设 $\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}, m\in N$ 且 $s\in[0,1)$. 则 $q\in N,\ x\in\mathbb{R}^n$ 时, 以下估计成立

$$\left|(-\triangle)^{m+s}\langle x\rangle^{-q}\right|\lesssim\begin{cases}\langle x\rangle^{-n-2m}, & s=0,\\ \langle x\rangle^{-n-2s}, & s\in(0,1).\end{cases}$$

引理 4.2[10] 假设 $\varphi_R(x)=\varphi(x/R), x\in\mathbb{R}^n$, 其中 $\varphi(x)=\langle x\rangle^{-q}, \sigma\geqslant 1$, 则

$$(-\triangle)^{\sigma}(\varphi_R)(x)=R^{-2\sigma}\left((-\triangle)^{\sigma}\varphi\right)(x/R).$$

若 $\varphi(x)=\langle x\rangle^{-n-2s_\sigma}=(1+|x|^2)^{-n/2-s_\sigma}$, 其中当 σ 是整数时, $s_\sigma\in(0,1)$; 当 σ 是分数时, $0<s_\sigma\leqslant\sigma-[\sigma]$ 则

$$|(-\Delta)^{\sigma}\langle x\rangle^{-n-2s_\sigma}|\lesssim\langle x\rangle^{-n-2s_\sigma}.$$

下证定理 2.2

选择测试函数 $\eta(t):=\begin{cases}1 & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ \text{递减} & \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1,\\ 0 & t\geqslant 1,\end{cases}$ 满足

$$(\eta(t))^{-\frac{p'}{p}}\left(|\eta'(t)|^{p'}+|\eta''(t)|^{p'}+|\eta'''(t)|^{p'}\right)\leqslant C,\quad t\in\left[\frac{1}{2},1\right],$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

引入测试函数 $\psi_R(t,x):=\eta_R(t)\varphi_R(x):=\eta(t/R^{2\sigma})\varphi(x/R)$. 定义如下两个函数

$$\begin{aligned}I_R&:=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\psi_R(t,x)dxdt,\\ \widetilde{I}_R&:=\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x)|^p\partial_t\psi_R(t,x)dxdt,\end{aligned}$$

两式相减 并进行分部积分得

$$\begin{aligned}&I_R-\widetilde{I}_R+\int_{\mathbb{R}^n}u_1(x)\varphi_R(x)dx+(I+\log(I+(-\triangle)^{\sigma}))^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)\varphi_R(x)dx\\ =&-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}u(t,x)\left(\partial_t^3\psi_R(t,x)-\partial_t^2\psi_R(t,x)\right)dxdt\\ &+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\log(I+(-\triangle)^{\sigma})u(t,x)\left(\psi_R(t,x)-\psi_R'(t,x)\right)dxdt\\ &+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}(I+\log(I+(-\triangle)^{\sigma}))^{-1}u(t,x)\left(\psi_R''(t,x)-\psi_R'(t,x)\right)dxdt\\ =&J_1+J_2+J_3,\end{aligned}\tag{4.1}$$

由引理 4.1, 4.2 得

$$
\begin{aligned}
|J_1| &\lesssim \int_{\frac{R^{2\sigma}}{2}}^{R^{2\sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|\varphi_R(x)(|\eta_R^{'''}(t)| + |\eta_R^{''}(t))|dxdt \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{R^{2\sigma}}{2}}^{R^{2\sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_R(t,x)^{-\frac{p^{'}}{p}} \varphi_R(x)(|\eta_R^{'''}(t)| + |\eta_R^{''}(t))^{p^{'}} dxdt \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} \left(R^{-2\sigma p^{'}+2\sigma+n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \widetilde{x} \rangle^{-n-2s_\sigma} d\widetilde{x} \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} R^{-2\sigma+\frac{2\sigma+n}{p^{'}}}, \\
|J_2| &\lesssim \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\left(t,x\right) |\left(-\triangle\right)^\sigma \psi_R\left(x\right)| dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\left(t,x\right) |\left(-\triangle\right)^\sigma \psi_R^{'}\left(t,x\right)| dxdt \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{R^{2\sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_R\left(t\right) \left(\varphi_R\left(x\right)\right)^{-\frac{p^{'}}{p}} |\left(-\triangle\right)^\sigma \psi_R\left(t,x\right)|^{p^{'}} dxdt \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\quad + I_R^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{R^{2\sigma}}{2}}^{R^{2\sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} \eta_R\left(t\right) \left(\varphi_R\left(x\right)\right)^{-\frac{p^{'}}{p}} |\left(-\triangle\right)^\sigma \psi_R^{'}\left(t,x\right)|^{p^{'}} dxdt \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} \left(R^{-2\sigma p^{'}+2\sigma+n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \widetilde{x} \rangle^{-n-2s_\sigma} d\widetilde{x} \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} R^{-2\sigma+\frac{2\sigma+n}{p^{'}}}, \\
|J_3| &\lesssim \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u(t,x)|\varphi_R(|\eta^{''}(t)| + |\eta^{'}(t)|)dxdt \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{R^{2\sigma}}{2}}^{R^{2\sigma}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_R \eta_R^{-\frac{p^{'}}{p}} (|\eta^{''}(t)| + |\eta^{'}(t)|)^{p^{'}} dxdt \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} \left(R^{-2\sigma p^{'}+2\sigma+n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \widetilde{x} \rangle^{-n-2s_\sigma} d\widetilde{x} \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\lesssim I_R^{\frac{1}{p}} R^{-2\sigma+\frac{2\sigma+n}{p^{'}}}.
\end{aligned}
$$

由 Young 不等式得

$$
\begin{aligned}
&I_R - \widetilde{I}_R + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\varphi_R(x)dx + (I + \log(I + (-\triangle)^\sigma))^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x)\varphi_R(x)dx \\
&\lesssim I_R^{-\frac{1}{p}} R^{-2\sigma+\frac{2\sigma+n}{p^{'}}} \lesssim \frac{1}{p} I_R + \frac{1}{p^{'}} R^{-2\sigma p^{'}+2\sigma+n},
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

即

$$
\frac{1}{p^{'}} I_R - \widetilde{I}_R + \int_{\mathbb{R}^n} u_1\left(x\right)\varphi_R\left(x\right)dx \lesssim \frac{1}{p^{'}} R^{-2\sigma p^{'}+2\sigma+n}, \tag{4.3}
$$

因为 $\eta(t)$ 单调递减, 即 $-\eta_R^{'}(t) \geqslant 0, -\widetilde{I}_R \geqslant 0$. 当 $m = 1$ 时, 若 $1 < p < 1 + \frac{2\sigma m}{n}$ 即

$$
-2\sigma p^{'} + 2\sigma + n < 0,
$$

当 $R\to\infty$ 时,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\varphi_R(x)dx \lesssim R^{-2\sigma p^{'}+2\sigma+n} \to 0,$$

与 $\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\varphi_R(x)dx > 0$ 矛盾. 当 $m\in(1,2)$ 时, 若 $1<p<1+\frac{2\sigma m}{n}$ 即

$$n(1-\tfrac{1}{m}) > -2\sigma p^{'}+2\sigma+n,$$

得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\varphi_R(x)dx &\gtrsim \int_{|x|\leqslant R} u_1(x)\left\langle \frac{x}{R}\right\rangle^{-n-2s_\sigma} dx\\ &\gtrsim \int_{|x|\leqslant R} u_1(x)\,dx\\ &\gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\frac{n}{m}}(\log(|x|))^{-1}dx\\ &\gtrsim (\log(R))^{-1}R^{n\left(1-\frac{1}{m}\right)},\end{aligned} \tag{4.4}$$

当 $R\to\infty$ 时,

$$(\log(R))^{-1}R^{n(1-\frac{1}{m})} \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} u_1(x)\varphi_R(x)dx \lesssim R^{-2\sigma p^{'}+2\sigma+n},$$

即

$$(\log(R))^{-1}R^{n\left(1-\frac{1}{m}\right)-(-2\sigma p^{'}+2\sigma+n)} \lesssim 1,$$

得 $n\left(1-\frac{1}{m}\right)\leqslant -2\sigma p^{'}+2\sigma+n$ 与 $n\left(1-\frac{1}{m}\right) > -2\sigma p^{'}+2\sigma+n$ 矛盾, 故定理 1.2 得证.

参 考 文 献

[1] Strauss W A. Nonlinear scattering-theory at low-energy[J]. J.Funct.Anal., 1981, 41(1): 110–133.

[2] Georgiev V, Lindblad H, Sogge C D. Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations[J]. Am.J.Math., 1997, 119(6): 1291–1319.

[3] Glassey R T. Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations[J]. Math.Z., 1981, 177(3): 323–340.

[4] Sideris T C. Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions[J]. J.Differ.Equ., 1984, 52(3): 378–406.

[5] Ikehata R, Tanizawa K. Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in R^N with noncompactly supported initial data[J]. Nonlinear Anal-Theor, Methods Applications, 2005, 61(7): 1189–1208.

[6] Zhang Q S. A blow-up result for a nonlinear wave equation with damped: the critical case[J]. C.R.Acad.Sci.Ser.Paris.I-Math.,2001,333(2): 109–114.

[7] Dao T A, Reissig M. An application of estimates for oscillating integrals to parabolic like semi-linear structurally damped σ-evolution models[J]. J.Math. Anal.Appl., 2019, 476(2): 426–463.

[8] Charao R C, Ikehata R. Asymptotic profile and optimal decay of solutions of some wave equations with logarithmic damping[J]. Z.Angew.Math.Phys., 2020, 71(5): 1–26.

[9] Coimbra C R, Piske A, Ikehata R. A dissipative logarithmic-Laplacian type of plate equation: Asymptotic profile and decay rates[J]. arXiv,2021:2104.08468.

[10] Chen W H, Tuan A D. On the Cauchy problem for semilinear regularity-loss-type σ-evolution models with memory term [J]. Nonlinear Anal-Real, 2021, 59:103265.

[11] Liu Y, Ueda Y. Decay estimate and asymptotic profile for a plate equation with memory[J]. J.Differ.Equ., 2020, 268(5): 2435–2463.

GLOBAL EXISTENCE AND BLOW-UP FOR A CLASS OF WAVE-LIKE EQUATIONS WITH LOG-DAMPING TERMS

ZHANG Xing-ya, LI Xing-quan, YANG Han

(*School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Sichuan Chengdu 611756*)

Abstract: The purpose of this paper is to study the Cauchy problem of a class of logarithmic wave like equations with logarithmic damping mechanism. The decay estimation of the corresponding linear problem was obtained through Fourier transform and Laplace transform. Based on this decay estimation, a suitable solution space was established, and the contraction mapping principle was applied to obtain the global solution of the problem under small initial conditions. The test function method was used to prove that the solution explodes at a finite time.Some conclusions about wave equation with structural damping term are extended.

Keywords: Wave equation; Log-damping; Cauchy problems; Global solution; Blow-up

2010 MR Subject Classification: 35A01; 35B33; 35B44; 35G25