

一类多体态的量子失协

倪慧, 王丽, 贺衍

(太原理工大学数学学院, 山西太原 030024)

摘要: 本文先研究了一类三体态的量子失协, 而后将其推广到 N 体态. 本文给出的计算公式推广了现有多体态量子失协的研究成果. 进一步, 本文根据量子态中体的个数和泡利矩阵对量子失协计算的影响, 将 N 体态的量子失协分为五类进行表征.

关键词: 量子失协; 多体态; 条件测量

MR(2010) 主题分类号: 81P43; 81P15

中图分类号: O413.1

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2024)06-0503-08

1 引言

量子关联是量子系统中的一个重要特性, 是量子信息处理任务中重要的物理资源. 量子失协作为一种重要的量子关联在量子计算, 量子远程态制备和量子相变等研究领域发挥着重要作用, 参见文献 [1-3]. 对于任意的量子态 ρ , 其量子失协与量子纠缠的值不一定相等. 此外, 部分文章中证明了两体态的量子失协比量子纠缠具有更强的鲁棒性, 参见文献 [4]. 因此我们可以认为量子失协在某些方面比量子纠缠具有更强的优越性, 是一种极为重要的量子资源. 关于量子失协的单配性, 退相干等性质的研究也在不断发展, 参见文献 [5-10].

作为最重要的量子关联之一, 量子失协在两体系统上的定义由 Ollivier, Zurek^[11] 和 Henderson, Vedral^[12] 首次提出, 其被定义为量子态测量前后总关联的差 (总关联通过量子互信息进行表征), 其中量子态测量前后的总关联被认为是在经典部分等价, 量子部分不同, 参见文献 [13-14]. 尽管量子失协在两体系统的定义已经给出, 但由于其计算所需优化过程的复杂性, 在两体系统中只给出了 X 型量子态和一些特殊形式的非 X 型量子态量子失协的解析结果, 参见文献 [15-22]. 而在多体量子系统中由于缺乏对量子失协的合理定义, 目前关于多体态的量子失协研究较少, 特别是多体量子失协的解析表达这方面.

最近, Radhakrishnan 给出了一种多体量子系统的测量方式, 其在 N 体系统中执行 $N-1$ 次有序测量, 且每次测量均以之前的测量结果为条件, 可以表示为

$$\Pi_{j_1 \dots j_{N-1}}^{A_1 \dots A_{N-1}} = \Pi_{j_1}^{A_1} \otimes \Pi_{j_2 | j_1}^{A_2} \dots \otimes \Pi_{j_{N-1} | j_1 \dots j_{N-2}}^{A_{N-1}}, \quad (1.1)$$

其中 $\Pi_{j_2 | j_1}^{A_2}$ 指以子系统 A_1 的测量结果 j_1 为条件在子系统 A_2 上执行的测量, 测量采用 $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{N-1}$ 的顺序. 此外, 文章根据此测量方式给出了量子失协在多体系统上定义

*收稿日期: 2024-03-09

接收日期: 2024-04-23

基金项目: 国家自然科学基金资助 (12271394); 山西省重点研发计划项目基金资助 (202102 010101004).

作者简介: 倪慧 (2000-), 男, 山西朔州, 硕士, 主要研究方向: 算子理论与量子计算,

E-mail: nihui202210@163.com.

通讯作者: 王丽, 女, 山西, 副教授, 主要研究方向: 算子理论与量子计算. E-mail: 3276396504@qq.com.

的合理推广, 参见文献 [23]. 值得注意, 此定义与两体系统中量子失协的定义是一致的, 参见文献 [11,12]. 基于此定义, 一类特殊形式的多体态 $\rho = \frac{1}{2^N}(I + \sum_j c_j \sigma_j \otimes \sigma_j \dots \otimes \sigma_j)$ 量子失协的解析表达被研究, 参见文献 [24]. 事实上, 由于优化过程的复杂性, 给出一般形式的 N 体态量子失协的解析表达是非常困难的. 在本文中, 我们研究了一类相比之前更加广泛的 N 体态的量子失协, 并给出了解析结果.

为了便于叙述本文的主要结果, 这里介绍几个相关定义.

定义 1.1 [11] 对于 AB 系统上的任意两体态 ρ , 量子失协定义为

$$D_{A;B}(\rho) = \min_{\Pi^A} [-S_{B|A}(\rho) + S_{B|\Pi^A}(\rho)],$$

其中条件熵 $S_{B|A}(\rho) = S(\rho) - S_A(\rho)$ 且有 $S(X) = -\text{Tr} X \log_2 X$ 表示量子态 X 的冯诺依曼熵, $S_A(\rho)$ 表示 ρ 在子系统 A 上的约化态的冯诺依曼熵, $S_{B|\Pi^A}(\rho) = \sum_j p_j^A S(\Pi_j^A \rho \Pi_j^A)$, Π_j^A 表示在子系统 A 上执行的冯诺依曼投影测量, $p_j^A = \text{Tr}(\Pi_j^A \rho \Pi_j^A)$ 表示在子系统 A 上的测量结果为 j 时的概率.

定义 1.2 [23] 对于任意 N 体态 ρ , 量子失协定义为

$$D_{A_1;A_2;\dots;A_N}(\rho) = \min_{\Pi^{A_1}\dots\Pi^{A_{N-1}}} [-S_{A_2\dots A_N|A_1}(\rho) + S_{A_2|\Pi^{A_1}\dots} + S_{A_N|\Pi^{A_1}\dots A_{N-1}}(\rho)], \quad (1.2)$$

其中 $S_{A_k|\Pi^{A_1}\dots A_{k-1}}(\rho) = \sum_{j_1\dots j_{k-1}} p_j^{(k-1)} S_{A_1\dots A_k}(\Pi_j^{(k-1)} \rho \Pi_j^{(k-1)})$, $\Pi_j^{(k)} \equiv \Pi_{j_1\dots j_k}^{A_1\dots A_k}$, $p_j^{(k)} = \text{Tr}(\Pi_j^{(k)} \rho \Pi_j^{(k)})$ 且 $S(X) = -\text{Tr} X \log_2 X$ 表示量子态 X 的冯诺依曼熵.

本文剩余内容组织如下: 在第二部分, 我们计算了一类特殊三体态的量子失协并给出了详细的过程; 在第三部分, 我们给出了一类 N 体态的量子失协的解析结果, 并证明其可分为五类进行表征; 在第四部分, 我们讨论并总结了本文的结果.

2 一类三体态的量子失协

我们首先对一类三体态的量子失协进行了计算.

定理 2.1 令

$$\rho = \frac{1}{8}(I + c_1 \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 + c_2 \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \sigma_1 + c_3 \sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \sigma_3), \quad (2.1)$$

其中 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, I 表示恒等算子.

则量子态 ρ 的量子失协为

$$D_{A_1;A_2;A_3}(\rho) = \frac{1+\xi}{2} \log_2(1+\xi) + \frac{1-\xi}{2} \log_2(1-\xi) - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) - \frac{1-c}{2} \log_2(1-c), \quad (2.2)$$

其中 $\xi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$, $c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$.

证 根据式 (1.2), 任意三体态的量子失协为

$$D_{A_1;A_2;A_3}(\rho) = \min_{\Pi^{A_1 A_2}} [-S_{A_2 A_3|A_1}(\rho) + S_{A_2|\Pi^{A_1}}(\rho) + S_{A_3|\Pi^{A_1 A_2}}(\rho)]. \quad (2.3)$$

通过计算得 $S_{A_1}(\rho) = 1$,

$$S(\rho) = -4 \times \frac{1+\xi}{8} \log_2 \frac{1+\xi}{8} - 4 \times \frac{1-\xi}{8} \log_2 \frac{1-\xi}{8},$$

其中 $\xi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$, 则有

$$-S_{A_2 A_3 | A_1}(\rho) = -[S(\rho) - S_{A_1}(\rho)] = \frac{1+\xi}{2} \log_2(1+\xi) + \frac{1-\xi}{2} \log_2(1-\xi) - 2. \quad (2.4)$$

首先, 我们在子系统 A_1 上执行冯诺依曼测量 $A_{1k} = V_{A_1} \Pi_k V_{A_1}^\dagger$, 其中 $\Pi_k = |k\rangle \langle k|$ ($k = 0, 1$), $V_{A_1} = t_{A_1} I + i \vec{y}_{A_1} \cdot \vec{\sigma}$ 是一个酉算子且满足 $t_{A_1} \in \mathbb{R}$, $\vec{y}_{A_1} = (y_{A_1 1}, y_{A_1 2}, y_{A_1 3}) \in \mathbb{R}^3$, $t_{A_1}^2 + y_{A_1 1}^2 + y_{A_1 2}^2 + y_{A_1 3}^2 = 1$. 测量后的量子态用系综 $\{\rho_k, p_k\}$ 表示, 其中 $\rho_k = \frac{1}{p_k} (A_{1k} \otimes I) \rho (A_{1k} \otimes I)$, $p_k = \text{Tr}[(A_{1k} \otimes I) \rho (A_{1k} \otimes I)]$. 计算可得 $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \frac{1}{4} V_{A_1} \Pi_0 V_{A_1}^\dagger \otimes (I \otimes I + c_1 b_2 \sigma_1 \otimes \sigma_2 + c_2 b_1 \sigma_2 \otimes \sigma_1 + c_3 b_3 \sigma_3 \otimes \sigma_3), \\ \rho_1 &= \frac{1}{4} V_{A_1} \Pi_1 V_{A_1}^\dagger \otimes (I \otimes I - c_1 b_2 \sigma_1 \otimes \sigma_2 - c_2 b_1 \sigma_2 \otimes \sigma_1 - c_3 b_3 \sigma_3 \otimes \sigma_3), \end{aligned}$$

其中 $b_1 = 2(-t_{A_1} y_{A_1 2} + y_{A_1 1} y_{A_1 3})$, $b_2 = 2(t_{A_1} y_{A_1 1} + y_{A_1 2} y_{A_1 3})$, $b_3 = t_{A_1}^2 - y_{A_1 1}^2 - y_{A_1 2}^2 + y_{A_1 3}^2$. 而测量后的量子态 ρ_0, ρ_1 在子系统 A_1, A_2 上的约化态为 $\text{Tr}_{A_3}(\rho_0) = \frac{1}{2} V_{A_1} \Pi_0 V_{A_1}^\dagger \otimes I$, $\text{Tr}_{A_3}(\rho_1) = \frac{1}{2} V_{A_1} \Pi_1 V_{A_1}^\dagger \otimes I$. 则关于测量 Π^{A_1} 的量子条件熵为

$$S_{A_2 | \Pi^{A_1}}(\rho) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = 1. \quad (2.5)$$

为计算 $S_{A_3 | \Pi^{A_1} A_2}(\rho)$, 我们基于子系统 A_1 的测量结果 j 测量 A_2 , 记

$$\{A_{2k}^j = V_{A_2}^j \Pi_k V_{A_2}^{j\dagger}, k = 0, 1\}, j = 0, 1$$

为在子系统 A_2 上执行的冯诺依曼投影测量, 其中 $V_{A_2}^j = t_{A_2}^j I + i \vec{y}_{A_2}^j \cdot \vec{\sigma}$ 是一个酉算子满足 $t_{A_2}^j \in \mathbb{R}$, $\vec{y}_{A_2}^j = (y_{A_2}^j 1, y_{A_2}^j 2, y_{A_2}^j 3) \in \mathbb{R}^3$, $t_{A_2}^j 2 + y_{A_2}^j 1 2 + y_{A_2}^j 2 2 + y_{A_2}^j 3 2 = 1$.

若在子系统 A_1 上的测量结果为 0, 测量后的量子态为 ρ_0 , 我们在 ρ_0 上执行测量 $\{A_{2k}^0\}$ 后可得 $p_{00} = p_{01} = \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} \rho_{00} &= \frac{1}{2} V_{A_1} \Pi_0 V_{A_1}^\dagger \otimes V_{A_2}^0 \Pi_0 V_{A_2}^{0\dagger} \otimes (I + c_1 b_2 l_1 \sigma_2 + c_2 b_1 l_2 \sigma_1 + c_3 b_3 l_3 \sigma_3), \\ \rho_{01} &= \frac{1}{2} V_{A_1} \Pi_0 V_{A_1}^\dagger \otimes V_{A_2}^0 \Pi_1 V_{A_2}^{0\dagger} \otimes (I - c_1 b_2 l_1 \sigma_2 - c_2 b_1 l_2 \sigma_1 - c_3 b_3 l_3 \sigma_3), \end{aligned}$$

其中

$$l_1 = 2(-t_{A_2}^0 y_{A_2}^0 2 + y_{A_2}^0 1 y_{A_2}^0 3), \quad l_2 = 2(t_{A_2}^0 y_{A_2}^0 1 + y_{A_2}^0 2 y_{A_2}^0 3), \quad l_3 = t_{A_2}^0 2 - y_{A_2}^0 1 2 - y_{A_2}^0 2 2 + y_{A_2}^0 3 2.$$

若在子系统 A_1 上的测量结果为 1, 测量后的量子态为 ρ_1 , 我们在 ρ_1 上执行测量 $\{A_{2k}^1\}$ 后可得 $p_{10} = p_{11} = \frac{1}{4}$,

$$\rho_{10} = \frac{1}{2} V_{A_1} \Pi_1 V_{A_1}^\dagger \otimes V_{A_2}^1 \Pi_0 V_{A_2}^{1\dagger} \otimes (I - c_1 b_2 m_1 \sigma_2 - c_2 b_1 m_2 \sigma_1 - c_3 b_3 m_3 \sigma_3),$$

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}V_{A_1}\Pi_1V_{A_1}^\dagger \otimes V_{A_2}\Pi_1V_{A_2}^\dagger \otimes (I + c_1b_2m_1\sigma_2 + c_2b_1m_2\sigma_1 + c_3b_3m_3\sigma_3),$$

其中

$$m_1 = 2(-t_{A_2^1}y_{A_2^1} + y_{A_2^1}y_{A_2^1}), \quad m_2 = 2(t_{A_2^1}y_{A_2^1} + y_{A_2^1}y_{A_2^1}), \quad m_3 = t_{A_2^1}^2 - y_{A_2^1}^2 - y_{A_2^1}^2 + y_{A_2^1}^2.$$

令 $\alpha_1 = \sqrt{c_1^2b_2^2l_2^2 + c_2^2b_1^2l_2^2 + c_3^2b_3^2l_3^2}$, $\alpha_2 = \sqrt{c_1^2b_2^2m_1^2 + c_2^2b_1^2m_2^2 + c_3^2b_3^2m_3^2}$, 则有

$$\begin{aligned} S_{A_3|\Pi^{A_1A_2}}(\rho) = & -\frac{1+\alpha_1}{4}\log_2(1+\alpha_1) - \frac{1-\alpha_1}{4}\log_2(1-\alpha_1) \\ & -\frac{1+\alpha_2}{4}\log_2(1+\alpha_2) - \frac{1-\alpha_2}{4}\log_2(1-\alpha_2) + 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

易证 $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1$, $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$, $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1$, 取 $c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$ 则有

$$\alpha_1 \leq \sqrt{c^2(|b_2|^2|l_1|^2 + |b_1|^2|l_2|^2 + |b_3|^2|l_3|^2)} \leq c,$$

$$\alpha_2 \leq \sqrt{c^2(|b_2|^2|m_1|^2 + |b_1|^2|m_2|^2 + |b_3|^2|m_3|^2)} \leq c.$$

$\alpha_1 = c$ 在以下几类情况成立:

(1) 若 $c=|c_1|$, 则 $|b_2| = |l_1| = 1$, $b_1 = b_3 = l_2 = l_3 = 0$, 取 $|t_{A_1}| = |y_{A_1}| = |t_{A_2^0}| = |y_{A_2^0}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_{A_12} = y_{A_13} = y_{A_2^0} = y_{A_2^0} = 0$;

(2) 若 $c=|c_2|$, 则 $|b_1| = |l_2| = 1$, $b_2 = b_3 = l_1 = l_3 = 0$, 取 $|t_{A_1}| = |y_{A_12}| = |t_{A_2^0}| = |y_{A_2^0}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_{A_11} = y_{A_13} = y_{A_2^0} = y_{A_2^0} = 0$;

(3) 若 $c=|c_3|$, 则 $|b_3| = |l_3| = 1$, $b_1 = b_2 = l_1 = l_2 = 0$, 取 $y_{A_11} = y_{A_12} = y_{A_2^0} = y_{A_2^0} = 0$.

同理, $\alpha_2 = c$ 也可成立. 则 $S_{A_3|\Pi^{A_1A_2}}(\rho)$ 的最小值

$$\min[S_{A_3|\Pi^{A_1A_2}}(\rho)] = -\frac{1+c}{2}\log_2(1+c) - \frac{1-c}{2}\log_2(1-c) + 1. \quad (2.7)$$

通过等式 (2.3), 我们可得出式 (2.2), 定理得证.

3 一类 N 体态的量子失协

我们考虑以下这类 N 体态,

定理 3.1

令

$$\rho = \frac{1}{2^N}(I + c_1\sigma_{k_1} \otimes \sigma_{k_2} \dots \otimes \sigma_{k_N} + c_2\sigma_{l_1} \otimes \sigma_{l_2} \otimes \dots \otimes \sigma_{l_N} + c_3\sigma_3 \otimes \sigma_3 \otimes \dots \otimes \sigma_3), \quad (3.1)$$

其中 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, I 表示恒等算子, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为泡利矩阵, $l_i = 1, 2$, $k_j = 1, 2 (i, j = 1, 2, \dots, N)$.

若 $i = j$ 时, $l_i \neq k_j$ 恒成立, 则量子态 ρ 的量子失协为

1) 若 $N = 2v + 1$, $v \in \mathbb{Z}^+$,

$$\begin{aligned} D_{A_1; A_2; \dots; A_{2v+1}}(\rho) = & \frac{1+\xi}{2}\log_2(1+\xi) + \frac{1-\xi}{2}\log_2(1-\xi) \\ & - \frac{1+c}{2}\log_2(1+c) - \frac{1-c}{2}\log_2(1-c), \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $\xi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$, $c = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$.

2) 若 $N = 4v - 2$, $v \in \mathbb{Z}^+$. 我们记 m 为 (3.1) 式中 $c_1\sigma_{k_1} \otimes \sigma_{k_2} \dots \otimes \sigma_{k_N}$ 这一项中满足 $k_i = 1$ 的泡利矩阵的个数.

若 m 是奇数, 则有

$$\begin{aligned} D_{A_1; A_2; \dots; A_{4v-2}}(\rho) = & \frac{1}{4} [(1 + c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 - c_3) \\ & + (1 + c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 + c_3) \\ & + (1 - c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 - c_3) \\ & + (1 - c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 + c_3)] \\ & - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) - \frac{1-c}{2} \log_2(1-c). \end{aligned} \quad (3.3)$$

若 m 是偶数, 则有

$$\begin{aligned} D_{A_1; A_2; \dots; A_{4v-2}}(\rho) = & \frac{1}{4} [(1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3) \\ & + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) \\ & + (1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \\ & + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3)] \\ & - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) - \frac{1-c}{2} \log_2(1-c). \end{aligned} \quad (3.4)$$

3) 若 $N = 4v$, $v \in \mathbb{Z}^+$. 我们记 m 为 (3.1) 式中 $c_1\sigma_{k_1} \otimes \sigma_{k_2} \dots \otimes \sigma_{k_N}$ 这一项中满足 $k_i = 1$ 的泡利矩阵的个数.

若 m 是奇数, 则有

$$\begin{aligned} D_{A_1; A_2; \dots; A_{4v}}(\rho) = & \frac{1}{4} [(1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3) \\ & + (1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) \\ & + (1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3) \\ & + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3)] \\ & - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) - \frac{1-c}{2} \log_2(1-c). \end{aligned} \quad (3.5)$$

若 m 是偶数, 则有

$$\begin{aligned} D_{A_1; A_2; \dots; A_{4v}}(\rho) = & \frac{1}{4} [(1 + c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 - c_3) \\ & + (1 + c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 + c_3) \\ & + (1 - c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 - c_3) \\ & + (1 - c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 + c_3)] \\ & - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) - \frac{1-c}{2} \log_2(1-c). \end{aligned} \quad (3.6)$$

证 易证 $S_{A_1}(\rho) = 1$,

$$S_{A_2|\Pi^{A_1}}(\rho) = S_{A_3|\Pi^{A_1 A_2}}(\rho) = \dots = S_{A_{N-1}|\Pi^{A_1 A_2 \dots A_{N-2}}}(\rho) = 1, \quad (3.7)$$

且有

$$\min[S_{A_N|\Pi^{A_1 \dots A_{N-1}}}(\rho)] = -\frac{1-c}{2} \log_2(1-c) - \frac{1+c}{2} \log_2(1+c) + 1. \quad (3.8)$$

记 $A = \frac{1}{2^N}(a_{ij})_{2^N \times 2^N}$ 为 ρ 的密度矩阵, 易知 A 为 X 型矩阵, 我们从以下几类进行说明:

1) 当 $N = 2v + 1$ 时, 若 $a_{ii} = 1 - c_3$, 则 $a_{2^N-i+1|2^N-i+1} = 1 + c_3$, $a_{i|2^N-i+1} = \overline{a_{2^N-i+1|i}}$, 且 $a_{i|2^N-i+1} = c_1 + c_2 i, c_1 - c_2 i, -c_1 + c_2 i$ 或者 $-c_1 - c_2 i, c_1 i + c_2, -c_1 i + c_2, c_1 i - c_2, -c_1 i - c_2$.

注 本文 $a_{i|j}$ 的符号表示与 a_{ij} 相同, 均表示矩阵中第 i 行、第 j 列的元素.

此时 ρ 的特征值为

$$\lambda = \frac{1}{2^{2v+1}}(1 \pm \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}), \quad (3.9)$$

且每个特征值重数为 2^{2v} . 因此

$$\begin{aligned} -S_{A_2; A_3; \dots; A_{2v+1}|A_1}(\rho) &= -[S(\rho) - S_{A_1}(\rho)] \\ &= \frac{1+\xi}{2} \log_2(1+\xi) + \frac{1-\xi}{2} \log_2(1-\xi) - 2v. \end{aligned} \quad (3.10)$$

通过式 (1.2), 我们可以得出式 (3.2).

2) 当 $N = 4v - 2$ 且 m 为奇数时, 若 $a_{ii} = 1 + c_3$, 则 $a_{2^N-i+1|2^N-i+1} = 1 + c_3$, $a_{i|2^N-i+1} = \overline{a_{2^N-i+1|i}}$, 且 $a_{i|2^N-i+1} = (c_1 + c_2)i, -(c_1 + c_2)i$; 若 $a_{ii} = 1 - c_3$, 则 $a_{2^N-i+1|2^N-i+1} = 1 - c_3$, $a_{i|2^N-i+1} = \overline{a_{2^N-i+1|i}}$, 且 $a_{i|2^N-i+1} = (c_1 - c_2)i, -(c_1 - c_2)i$. 此时 ρ 的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 + c_1 + c_2 + c_3), & \lambda_1 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 + c_1 - c_2 - c_3), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 - c_1 - c_2 + c_3), & \lambda_3 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 - c_1 + c_2 - c_3). \end{aligned} \quad (3.11)$$

且每个特征值重数为 2^{4v-4} . 因此

$$\begin{aligned} -S_{A_2; A_3; \dots; A_{4v-2}|A_1}(\rho) &= -[S(\rho) - S_{A_1}(\rho)] \\ &= \frac{1}{4}[(1 + c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 + c_3) \\ &\quad + (1 + c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 - c_3) \\ &\quad + (1 - c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 + c_3) \\ &\quad + (1 - c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 - c_3)] + 3 - 4v. \end{aligned} \quad (3.12)$$

通过式 (1.2), 我们可得式 (3.3).

3) 当 $N = 4v - 2$ 且 m 为偶数时, 若 $a_{ii} = 1 + c_3$, 则 $a_{2^N-i+1|2^N-i+1} = 1 + c_3$, $a_{i|2^N-i+1} = a_{2^N-i+1|i}$ 且 $a_{i|2^N-i+1} = c_1 - c_2, -c_1 + c_2$; 若 $a_{ii} = 1 - c_3$, 则 $a_{2^N-i+1|2^N-i+1} = 1 - c_3$, $a_{i|2^N-i+1} = a_{2^N-i+1|i}$ 且有 $a_{i|2^N-i+1} = c_1 + c_2, -c_1 - c_2$. 此时 ρ 的特征值为

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 + c_1 - c_2 + c_3), & \lambda_1 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 + c_1 + c_2 - c_3), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 - c_1 + c_2 + c_3), & \lambda_3 &= \frac{1}{2^{4v-2}}(1 - c_1 - c_2 - c_3). \end{aligned} \quad (3.13)$$

且每个特征值的重数为 2^{4v-4} . 因此

$$\begin{aligned}
 -S_{A_2; A_3; \dots; A_{4v-2} | A_1}(\rho) &= -[S(\rho) - S_{A_1}(\rho)] \\
 &= \frac{1}{4}[(1 + c_1 - c_2 + c_3) \log_2(1 + c_1 - c_2 + c_3) \\
 &\quad + (1 + c_1 + c_2 - c_3) \log_2(1 + c_1 + c_2 - c_3) \\
 &\quad + (1 - c_1 + c_2 + c_3) \log_2(1 - c_1 + c_2 + c_3) \\
 &\quad + (1 - c_1 - c_2 - c_3) \log_2(1 - c_1 - c_2 - c_3)] + 3 - 4v.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

通过式 (1.2), 我们可得式 (3.4). 式 (3.5), (3.6) 可类似得出, 定理得证.

4 结论

在本文中, 我们研究了一类 N 体态的量子失协, 并且获得了解析表达式. 此外, 我们还证明了这类特殊的 N 体态的量子失协可以分为五类进行表征. 相比于之前的研究, 我们所研究的 N 体态的范畴更为广泛. 但由于计算的复杂性, N 体态的量子失协的计算表达式仍不具有—般性.

参 考 文 献

- [1] Datta A, Shaji A. Quantum discord and quantum computing — an appraisal[J]. International Journal Quantum Information, 2011, 9(07n08): 1787–1805.
- [2] Dakić B, Lipp Y O, Ma X, et al. Quantum discord as resource for remote state preparation[J]. Nature Physics, 2012, 8(9): 666–670.
- [3] Werlang T, Trippe C, Ribeiro G A P, et al. Quantum correlations in spin chains at finite temperatures and quantum phase transitions[J]. Physics Review Letters, 2010, 105(9): 095702.
- [4] Yang Q, Yang M, Li D C, et al. Quantum discord of two-qubit in dephasing model[J]. International Journal of Theoretical Physics, 2012, 51: 2160–2167.
- [5] Braga H C, Rulli C C, Oliveira T R, et al. Monogamy of quantum discord by multipartite correlations[J]. Physics Review A, 2012, 86(6): 062106.
- [6] Huang Y. Scaling of quantum discord in spin models[J]. Physics Review B, 2014, 89(5): 054410.
- [7] Perinotti P. Discord and nonclassicality in probabilistic theories[J]. Physics Review Letters, 2012, 108(12): 120502.
- [8] Köhnke S, Agudelo E, Schünemann M, et al. Quantum correlations beyond entanglement and discord[J]. Physics Review Letters, 2021, 126(17): 170404.
- [9] Gessner M, Breuer H P. Local witness for bipartite quantum discord[J]. Physics Review A, 2013, 87(4): 042107.
- [10] Hollowood T J, McDonald J I. Decoherence, discord, and the quantum master equation for cosmological perturbations[J]. Physics Review D, 2017, 95(10): 103521.
- [11] Ollivier H, Zurek W H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations[J]. Physics Review Letters, 2001, 88(1): 017901.
- [12] Henderson L, Vedral V. Classical, quantum and total correlations[J]. Journal Physics A: Mathematical General, 2001, 34(35): 6899.

- [13] Rulli C C, Sarandy M S. Global quantum discord in multipartite systems[J]. *Physics Review A*, 2011, 84(4): 042109.
- [14] Luo S, Fu S. Geometric measure of quantum discord[J]. *Physics Review A*, 2010, 82(3): 034302.
- [15] Ali M. Quantum discord for a two-parameter class of states in $2 \otimes d$ quantum systems[J]. *Journal Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, 43(49): 495303.
- [16] Vinjanampathy S, Rau A R P. Quantum discord for qubit - qudit systems[J]. *Journal Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2012, 45(9): 095303.
- [17] Xie C, Zhang Z, Chen J, et al. Analytic expression of quantum discords in Werner states under LQCC[J]. *Entropy*, 2020, 22(2): 147.
- [18] Luo S. Quantum discord for two-qubit systems[J]. *Physics Review A*, 2008, 77(4): 042303.
- [19] Lang M D, Caves C M. Quantum discord and the geometry of Bell-diagonal states[J]. *Physics Review Letters*, 2010, 105(15): 150501.
- [20] Ali M, Rau A R P, Alber G. Quantum discord for two-qubit X states[J]. *Physics Review A*, 2010, 81(4): 042105.
- [21] Ye B L, Wang Y K, Fei S M. One-way quantum deficit and decoherence for two-qubit X states[J]. *International Journal Theoretical Physics*, 2016, 55: 2237–2246.
- [22] Zhou J, Hu X, Jing N. Quantum discord of certain two-qubit states[J]. *International Journal Theoretical Physics*, 2020, 59: 415–425.
- [23] Radhakrishnan C, Laurière M, Byrnes T. Multipartite generalization of quantum discord[J]. *Physics Review Letters*, 2020, 124(11): 110401.
- [24] Li B, Zhu C L, Liang X B, et al. Quantum discord for multiqubit systems[J]. *Physics Review A*, 2021, 104(1): 012428.

QUANTUM DISCORD FOR A FAMILY OF MULTIPARTITE STATES

NI Hui, WANG Li, HE Kan

(College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024)

Abstract: This paper initially investigates the quantum discord of a specific class of three-qubit states and provides a comprehensive calculation process. Subsequently, using this three-qubit quantum discord calculation methodology, we derive analytical results for a family of N -qubit states. The analysis methodology outlined herein amplifies the prevailing findings on quantum discord in multipartite systems. Moreover, based on the influence of the number of constituents in the states and the Pauli matrix on quantum discord evaluation, we identify that the quantum discord for this N -qubit family can be classified into five distinct categories.

Keywords: quantum discord; multipartite states; conditional measurement

2010 MR Subject Classification: 81P43; 81P15.