Vol. 44 (2024)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

f 范数下马氏链的收敛性

朱志锋, 黄　弘
(湖北工程学院数学与统计学院, 湖北 孝感 432000)

摘 要: 本文研究了 f 范数下马氏链的收敛性问题, 利用基本耦合和 f 范数的等式, 得到 f 范数下离散时间一般状态空间下时齐 Markov 链的收敛的充分条件, 推广了全变差范数下马氏链的收敛性.

关键词: Markov 链; 耦合方法; f 范数; 收敛性
MR(2010) **主题分类号**: 60J25　　**中图分类号**: O211.4
文献标识码: A　　**文章编号**: 0255-7797(2024)06-0494-09

1 引言

Markov 链的收敛性在 Markov 链蒙特卡洛 (MCMC) 方法和非线性时间序列分析中有广泛的应用. 耦合方法 (coupling method) 在随机过程中有广泛的应用, 耦合方法已成为研究 $Markov$ 过程稳定性的一个重要工具. 陈木法 ([1]) 对概率距离和耦合方法做了一些总结, 同时研究了全变差范数意义下时齐马氏链的收敛性. 文献 [2, 3, 4] 用耦合方法研究非时齐马氏链的收敛性和时齐马氏链 f 指数遍历. 文献 [5] 系统地研究了离散时间时齐马氏链的随机稳定性.

为了更进一步研究了时齐马氏链的收敛性, 本文先证得一个关于基本耦合和 f 范数的等式, 然后利用该等式和耦合方法, 在 $f-$ 范数的意义下, 研究离散时间一般状态空间下时齐马氏链的收敛性. 得到了一个时齐马氏链的收敛的充分条件.

设 $(X, \rho, \mathscr{B}(X))$ 是波兰空间. 为叙述方便, 先引入几个记号. 设 g 是 X 上的可测函数, μ 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的符号测度, K 是 $(X, \mathscr{B}(X))$ 上的可测核. 记

$$\mu(g) := \int g d\mu,$$

$$Kg(x) := \int K(x, dy) g(y),$$

定义 1　设 μ 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的符号测度, g, f 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的可测函数, 定义 μ 的全变差范数为

$$\|\mu\| := \sup\{|\mu(g)| : |g| \le 1\},$$

定义 μ 的 f 范数为

$$\|\mu\|_f := \sup\{|\mu(g)| : |g| \le f\}, \;\; f \ge 1.$$

*收稿日期: 2024-07-16　　接收日期: 2024-09-02
基金项目: 国家自然科学基金“几类性质优良的密码函数研究” (11601138); 湖北省自然科学基金“高非线性密码函数若干问题研究” (2021CFB275).
作者简介: 朱志锋 (1979–), 男, 博士, 副教授, 主要从事马尔可夫过程的研究, E-mail: zhuzf@hbeu.cn.
通讯作者: 黄弘 (1968–), 男, 硕士, 主要从事概率论的研究, E-mail: 2369844949@qq.com

说明: μ 可以是测度, 也可以是函数, 还可以是点.

设 $\Phi=\{\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_n,\cdots\}$ 是 $(X,\rho,\mathscr{B}(X))$ 上的时齐马氏链, 设 $P(x,dy)$(或简记为 P) 是 $(X,\rho,\mathscr{B}(X))$ 上的概率核, 递推地定义 P 的第 n 步转移概率为 P 的 n 次幂 P^n.

$$P^n(x,A):=\int P(x,dy)P^{n-1}(y,A)\ \ (x\in X, A\in\mathscr{B}(X), n\in N).$$

设 $\mathscr{P}(X)$ 为 X 上的全体概率测度, x_0 为 X 上某个给定的点 (等价地任意给定的点 x_0). 设 $\mu\in\mathscr{P}(X)$, 定义

$$\mu P(A):=\int \mu(dx)P(x,A)\ \ (A\in\mathscr{B}(X).$$

记

$$\mathscr{M}=\{\mu\in\mathscr{P}(X):\int\rho(x_0,x)\mu(dx)<\infty\}.$$

定义 2 设 μ_1,μ_2 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的任意概率测度, $\widetilde{\mu}$ 是 $\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X)$ 上的概率测度, 称 $\widetilde{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的耦合, 若满足边缘性:

$$\widetilde{\mu}(A_1\times X)=\mu_1(A_1),\ \ A_1\in\mathscr{B}(X),$$

$$\widetilde{\mu}(X\times A_2)=\mu_2(A_2),\ \ A_2\in\mathscr{B}(X).$$

记 $K(\mu_1,\mu_2)$ 为 μ_1 与 μ_2 的全体耦合.

陈木法 ([1])、Lindvall([6])、张绍义 ([7]) 研究过时齐 $Markov$ 链的收敛性, 不过他们都是从全变差范数角度研究的. 本文将推导得出更加一般的 f 范数角度时齐 $Markov$ 链的收敛性的一个充分条件.

定理 1 设 $(X,\rho,\mathscr{B}(X))$ 是波兰空间, 设 $\Phi=\{\Phi_0,\Phi_1,\cdots,\Phi_n,\cdots\}$ 是取值于 X 上的时齐马氏链, P 是 Φ 的转移概率核. 如果满足:

$(i)\forall x\in X$, 有 $P(x,\cdot)\in\mathscr{M}$;

(ii) 存在耦合和与 x,y 无关的常数 $0\le c<1$ 使得

$$\int\varphi(u,v)\widetilde{P}(x,y;du,dv)\le c\varphi(x,y).$$

其中 $\widetilde{P}(x,y;du,dv)$ 为 $P(x,du)$ 与 $P(y,dv)$ 的耦合.

那么, 存在 $\mathscr{M}$ 上唯一的平稳分布 π, 使得对 $\mathscr{M}$ 上的任意概率测度 μ, 当 $n\to\infty$ 时有

$$\|\mu P^n-\pi\|_f\to 0.$$

注: 当 $f\equiv 1$, 则 f 范数变成了全变差范数.

2 引理及其证明

引理 1 [6] 设 μ_1,μ_2 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的任意概率测度, 令 $\mu'=\mu_1+\mu_2$ 记

$$g_1=\frac{d\mu_1}{d\mu'},\ \ g_2=\frac{d\mu_2}{d\mu'},$$

$$g=\min\{g_1,g_2\},\ \ \gamma=\int gd\mu',$$

$$v_1(A)=\int_A(g_1-g)d\mu',\ \ A\in\mathscr{B}(X),$$

$$v_2(A)=\int_A(g_2-g)d\mu',\ \ A\in\mathscr{B}(X),$$

$$Q(B)=\int_{B\cap\{(x,y):x=y\}}g(x)d\mu'(x),\ \ B\in\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X).$$

易得 $0\le\gamma\le1, v_1, v_2$ 是 $\mathscr{B}(X)$ 上的两个测度, Q 是 $\mathscr{B}(X)\times\mathscr{B}(X)$ 上的测度. 令

$$\overline{\mu}=\begin{cases}Q, & \gamma=1,\\ \frac{v_1\times v_2}{1-\gamma}+Q, & \gamma\neq1.\end{cases}$$

则 $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的耦合, 称 $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的基本耦合.

点测度 δ_x 与概率测度 μ 的基本耦合记为 $\overline{\mu}$.

记 $\varphi(x,y):=d(x,y)[f(x)+f(y)]$, 可测函数 $f\ge1$, 其中

$$d(x,y):=\begin{cases}1, & x\neq y,\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

定理 2 设 μ_1,μ_2 是任意概率测度, $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的基本耦合. 则有

$$\|\mu_1-\mu_2\|_f=\int\varphi(x,y)\overline{\mu}(dx,dy). \tag{2.1}$$

证

$$\begin{aligned}\|\mu_1-\mu_2\|_f&=\sup_{|v|\le f}|\int vd\mu_1-\int vd\mu_2|\\&=\sup_{|v|\le f}|\int vg_1d\mu^{'}-\int vg_2d\mu^{'}|\\&=\int_{\{g_1\ge g_2\}}f(g_1-g_2)d\mu^{'}-\int_{\{g_1<g_2\}}f(g_1-g_2)d\mu^{'}\\&=\int f|g_1-g_2|d\mu^{'}\qquad(|g_1-g_2|\equiv(g_1-g)+(g_2-g))\\&=\int f(g_1-g)d\mu^{'}+\int f(g_2-g)d\mu^{'}.\end{aligned}$$

于是, 只需证

$$\int\varphi(x,y)\overline{\mu}(dx,dy)=\int f(g_1-g)d\mu'+\int f(g_2-g)d\mu'.$$

往证之. (a) 当 $\gamma=1$ 时,

$$\begin{aligned}\int d(x,y)\overline{\mu}(dx,dy)&=\int d(x,y)Q(dx,dy)\\&=\int d(x,y)\int_{\{(x,y):x=y\}}g(x)\mu' d(x)\\&=\int\int_{\{(x,y):x=y\}}d(x,y)g(x)\mu' d(x)\\&=0.\end{aligned}$$

从而有

$$\int d(x,y)\overline{\mu}(dx,dy)=0=1-\gamma.$$

(b) 当 $\gamma<1$ 时, 当 $x=y$ 时,

$$\int d(x,y)\overline{\mu}(dx,dy)=0.$$

所以有

$$\begin{aligned}\int d(x,y)\overline{\mu}(dx,dy)&=\int d(x,y)\frac{v_1(dx)\times v_2(dy)}{1-\gamma}+\int d(x,y)Q(dx,dy)\\&=\int d(x,y)\frac{v_1(dx)\times v_2(dy)}{1-\gamma}+0\\&=\int d(x,y)\frac{(1-\gamma)\times(1-\gamma)}{1-\gamma}\\&=\int d(x,y)(1-\gamma)\\&=1-\gamma.\end{aligned}$$

定理获证.

引理 2 设 μ_1,μ_2 是任意概率测度, P 是波兰空间 $(X,\rho,\mathscr{B}(X))$ 上的概率核, $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的基本耦合,$\widetilde{P}(x,y;du,dv)$ 为 $P(x,du)$ 与 $P(y,dv)$ 的耦合. 则有

$$\|\mu_1P-\mu_2P\|_f\leq\int\overline{\mu}\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v).\tag{2.2}$$

证 要证明 (2.2) 式成立, 先证明 $\overline{\mu}\widetilde{P}$ 是 μ_1P 与 μ_2P 的耦合. 下面验证边缘性条件:

$$\begin{aligned}\overline{\mu}\widetilde{P}(A\times X)&=\int\overline{\mu}(dx,dy)\widetilde{P}(x,y;A\times X)\\&=\int\overline{\mu}(dx,dy)P(x,A)\\&=\int\mu_1(dx)P(x,A)\\&=\mu_1P(A).\end{aligned}$$

同理可证 $\overline{\mu}\widetilde{P}(X\times B)=\mu_2P(B)$. 故 $\overline{\mu}\widetilde{P}$ 是 μ_1P 与 μ_2P 的耦合.

令 $|g|\le f$, 则有 $g(u)-g(v)\le\varphi(u,v)$. 于是

$$\begin{aligned}\int gd\mu_1P-\int gd\mu_2P &= \int\overline{\mu}\widetilde{P}(x,y;du,dv)[g(u)-g(v)]\\ &\le \int\overline{\mu}\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v).\end{aligned}$$

同理:

$$\int gd\mu_2P-\int gd\mu_1P\le\int\overline{\mu}\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v),$$

于是有

$$\left|\int gd\mu_1P-\int gd\mu_2P\right|\le\int\overline{\mu}\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v).$$

在上面不等式中, 对 $|g|\le f$ 求上确界, 得

$$\|\mu_1P-\mu_2P\|_f\le\int\overline{\mu}\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v).$$

(2.2) 式得证.

引理 3 设 P 是波兰空间 $(X,\rho,\mathscr{B}(X))$ 上的概率核, μ_1,μ_2 是任意概率测度, 若存在耦合和与 x,y 无关的常数 $0\le c\le 1$ 使得

$$\int\varphi(u,v)\widetilde{P}(x,y;du,dv)\le c\varphi(x,y),\tag{2.3}$$

其中,$\widetilde{P}(x,y;du,dv)$ 为 $P(x,du)$ 与 $P(y,dv)$ 的耦合.

则对任意概率测度 μ_1,μ_2 有

$$\|\mu_1P-\mu_2P\|_f\le c\|\mu_1-\mu_2\|_f.\tag{2.4}$$

证 设 $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的基本耦合, 由 (2.2)(2.3) 式可得

$$\begin{aligned}\|\mu_1P-\mu_2P\|_f &\le \int\overline{\mu}\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v)\\ &= \int\overline{\mu}(dx,dy)\int\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v)\\ &\le \int\overline{\mu}(dx,dy)c\varphi(x,y)\\ &= c\int\overline{\mu}(dx,dy)\varphi(x,y)\\ &= c\|\mu_1-\mu_2\|_f.\end{aligned}$$

引理 4 在满足引理 3 的条件下, 若 $P\in\mathscr{M}$, 任意概率测度 $\mu\in\mathscr{M}$, 则 $\mu P\in\mathscr{M}$.

证 设 $\overline{\mu}$ 是点测度 δ_x 与概率测度 μ 的基本耦合, 由 (1) 式可得

$$\|\delta_x-\mu\|_f=\int\overline{\mu}(du,dv)\varphi(u,v)=\int\mu(dv)\varphi(x,v).$$

因为 $\mu \in \mathscr{M}, P \in \mathscr{M}$, 故有

$$\|\delta_{x_0} - \mu\|_f = \int \mu(dy)\varphi(x_0, y) < \infty.$$

$$\|\delta_{x_0} - \delta_{x_0}P\|_f = \int P(x_0, dy)\varphi(x_0, y) < \infty.$$

注意到, 在满足引理 3 的条件下, 有

$$\|\delta_{x_0}P - \mu P\|_f \le c\|\delta_{x_0} - \mu\|_f.$$

所以

$$\begin{aligned}
\int \mu P(x_0, dy)\varphi(x_0, y) &= \|\delta_{x_0} - \mu P\|_f \\
&\le \|\delta_{x_0} - \delta_{x_0}P\|_f + \|\delta_{x_0}P - \mu P\|_f \\
&\le \|\delta_{x_0} - \delta_{x_0}P\|_f + c\|\delta_{x_0} - \mu\|_f \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

从而 $\mu P \in \mathscr{M}$.

引理 5 设 μ_1, μ_2 是任意概率测度, 若 $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{M}$, 则 $\|\mu_1 - \mu_2\|_f < \infty$.

证 由于 $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{M}$, 从而有

$$\begin{aligned}
\|\mu_1 - \mu_2\|_f &= \int \varphi(x, y)\overline{\mu}(dx, dy) \\
&\le \int \varphi(x, x_0)\overline{\mu}(dx, dy) + \int \varphi(x_0, y)\overline{\mu}(dx, dy) \\
&= \int \varphi(x, x_0)\mu_1(dx) + \int \varphi(x_0, y)\mu_2(dy) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

引理 6 设 P 是波兰空间 $(X, \rho, \mathscr{B}(X))$ 上的概率核, 若存在 $0 \le c < 1$ 使得对任意概率测度 μ_1, μ_2 有

$$\|\mu_1 P - \mu_2 P\|_f \le c\|\mu_1 - \mu_2\|_f,$$

则对 $\forall m \in Z_+, \mu \in \mathscr{M}$, 有

$$\|\mu P^m - \mu\|_f \le \frac{1}{1-c}\|\mu P - \mu\|_f. \tag{2.5}$$

证 由三角不等式得

$$\begin{aligned}
\|\mu P^m - \mu\|_f &\le \sum_{k=1}^{m} \|\mu P^k - \mu P^{k+1}\|_f \\
&\le \|\mu P - \mu\|_f \sum_{k=0}^{m-1} c^k \\
&\le \|\mu P - \mu\|_f \sum_{k=0}^{\infty} c^k \\
&= \frac{1}{1-c}\|\mu P - \mu\|_f.
\end{aligned}$$

引理 7 设 P 是波兰空间 $(X, \rho, \mathscr{B}(X))$ 上的概率核, 若存在 $0 \le c < 1$ 使得对任意概率测度 μ_1, μ_2 有

$$\|\mu_1 P - \mu_2 P\|_f \le c\|\mu_1 - \mu_2\|_f.$$

则对 $\forall \mu \in \mathscr{M}$, $\{\mu P^n : n \ge 1\}$ 是 *Cauchy* 列.

证 对 $\forall n, m \in Z_+, \mu \in \mathscr{M}$, 应用引理 3 和引理 6 有

$$\begin{aligned}\|\mu P^{n+m} - \mu P^n\|_f &\le c^n \|\mu P^m - \mu\|_f \\ &\le \frac{c^n}{1-c}\|\mu P - \mu\|_f \\ &\to 0, (n \to \infty).\end{aligned}$$

故 $\{\mu P^n : n \ge 1\}$ 是 *Cauchy* 列.

引理 8 设 $(X, \rho, \mathscr{B}(X))$ 是波兰空间, μ_1, μ_2 是任意概率测度, 定义

$$W(\mu_1, \mu_2) = \|\mu_1 - \mu_2\|_f$$

则 $(\mathscr{M}, W)$ 是完备的度量空间.

证 证明见文献 [8] 第 28–29 页.

3 主要结果的证明

为了证明定理 1, 下面分三步来进行:

(a) 先证明存在概率测度 $\pi \in \mathscr{M}$, 使得当 $n \to \infty$ 时有 $\|\mu P^n - \pi\|_f \to 0$;

(b) 再证明 π 是平稳分布;

(c) 最后证明 π 的唯一性.

证 (a) 任取 $\mu \in \mathscr{M}$, 由引理 4 可归纳地证明 $\{\mu P^n : n \ge 1\} \subseteq \mathscr{M}$. 由引理 7 和引理 8 知: $\{\mu P^n : n \ge 1\}$ 是完备的度量空间 $(\mathscr{M}, W)$ 上的 *Cauchy* 列. 于是存在概率测度 $\pi \in \mathscr{M}$, 使得当 $n \to \infty$ 时有

$$\|\mu P^n - \pi\|_f \to 0.$$

(b) 在定理条件 (ii) 下, 由引理 3 有

$$\|\pi P - \mu P^n\|_f \le c\|\pi - \mu P^{n-1}\|_f.$$

又由 (a) 得,

$$\|\pi - \mu P^{n-1}\|_f \to 0, \ \ n \to \infty,$$

$$\|\mu P^n - \pi\|_f \to 0, \ \ n \to \infty.$$

从而有

$$\begin{aligned}\|\pi P - \pi\|_f &\le \|\pi P - \mu P^n\|_f + \|\mu P^n - \pi\|_f \\ &\le c\|\pi - \mu P^{n-1}\|_f + \|\mu P^n - \pi\|_f \\ &\to 0, \ \ n \to \infty.\end{aligned}$$

于是 $\|\pi P-\pi\|_f=0$, 即 $\pi P=\pi$. 证明了 π 是平稳分布.

(c) 下面证明 π 的唯一性: 设 $\pi_0\in\mathscr{M}$ 也是 P 的平稳分布, 则有

$$\|\pi_0-\pi\|_f=\|\pi_0P^n-\pi P^n\|_f\le c^n\|\pi_0-\pi\|_f\to 0,\ \ n\to\infty.$$

表明了 $\|\pi_0-\pi\|_f=0$, 即 $\pi_0=\pi$.

定理 1 的说明

说明 1: 条件 (ii) 可改为, 存在常数 $0\le c<1$ 使得 $\|\mu_1P-\mu_2P\|_f\le c\|\mu_1-\mu_2\|_f$.

说明 2: 条件 (ii) 可改为, 存在与 x,y 无关的常数 c 且 $0\le c<1$ 使得 $\|P(x,du)-P(y,dv)\|_f\le c\varphi(x,y)$.

说明 2 的证明: 由定理 2 知 $\|P(x,du)-P(y,dv)\|_f=\displaystyle\int\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v)$ 其中 $\widetilde{P}(x,y;du,dv)$ 为 $P(x,du)$ 与 $P(y,dv)$ 的基本耦合. 易于验证 $\overline{\mu}\widetilde{P}$ 也是 μ_1P 与 μ_2P 的耦合. 再由引理 3 有:

$$\begin{aligned}
\|\mu_1P-\mu_2P\|_f &\le \int\overline{\mu}(dx,dy)\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v)\\
&= \int\overline{\mu}(dx,dy)\int\widetilde{P}(x,y;du,dv)\varphi(u,v)\\
&= \int\overline{\mu}(dx,dy)\|P(x,dx)-P(y,dy)\|_f\\
&\le \int\overline{\mu}(dx,dy)c\varphi(x,y)\\
&= c\int\overline{\mu}(dx,dy)\varphi(x,y)\\
&= c\|\mu_1-\mu_2\|_f.
\end{aligned}$$

说明 3: 条件 (ii) 可改为, 对任意函数 $|g|\le f$, 存在与 x,y 无关的常数 c 且 $0\le c<1$ 使得 $|Pg(x)-Pg(y)|\le c\varphi(x,y)$.

说明 3 的证明: 设 $\overline{\mu}$ 是 μ_1 与 μ_2 的 φ 最优耦合,

$$\begin{aligned}
\|\mu_1P-\mu_2P\|_f &= \sup_{|g|\le f}\left|\int\mu_1(dx)P(x,du)g(u)-\int\mu_2(dy)P(y,dv)g(v)\right|\\
&= \sup_{|g|\le f}\left|\int\overline{\mu}(dx,dy)\left[\int P(x,du)g(u)-\int P(y,dv)g(v)\right]\right|\\
&\le \sup_{|g|\le f}\int\overline{\mu}(dx,dy)c\varphi(x,y)\\
&= \int\overline{\mu}(dx,dy)c\varphi(x,y)\\
&= c\int\overline{\mu}(dx,dy)\varphi(x,y)\\
&= c\|\mu_1-\mu_2\|_f.
\end{aligned}$$

参 考 文 献

[1] Chen M F. From Markov chains to non-equilibrium particle systems(second edition)[M]. Singapore: World Scientific, 2004.

[2] 朱志锋, 张绍义. 用概率距离研究非时齐马氏链的收敛性 [J]. 数学物理学报, 2018, 38A(5): 963–969.

[3] 朱志锋, 张绍义. 用耦合方法研究马氏链 f- 指数遍历 [J]. 数学学报, 2019, 62(3): 287–292.

[4] Zhu Z F, Zhang S Y and Tian F J. Study the convergence of nonhomogeneous Markov chains in general state spaces by coupling method[J]. Acta Mathematica Scientia, 2021, 41B(5): 1777–1787.

[5] Meyn S P. Tweedie R L. Markov chains and stochastic stability[M]. London: Springer Verlag, 1992.

[6] Lindvall T. Lectures on the coupling method[M]. New York: Wiley, 1992.

[7] 张绍义. 最优可测耦合的存在性与 Markov 过程的遍历性 [J]. 中国科学 (A 辑), 1998, 28(11): 999–1008.

[8] 张绍义. 最优 Markov 耦合的存在性及其应用 [D]. 北京师范大学博士毕业论文, 2000.

CONVERGENCE OF MARKOV CHAINS WITH f NORM

ZHU Zhi-feng, HUANG Hong

(*School of Mathematics and Statistics, Hubei Engineering University, Xiaogan 432000, China*)

Abstract: This article investigates the convergence problem of Markov chains under the f norm. Using the basic coupling and the f norm equation, we obtain the sufficient conditions for the convergence of time homogeneous Markov chains in discrete-time general state spaces under the f norm are obtained, and the convergence of Markov chains under the total variation norm is extended.

Keywords: Markov chains; coupling method; f norm; Convergence

2010 MR Subject Classification: 65F05