

具有记忆时滞的捕食者 - 食饵模型的分支分析

周鑫炎, 王小利

(西南大学数学与统计学院, 重庆 400715)

摘要: 本文研究了一类在 Neumann 边界条件下带有记忆时滞的捕食者 - 食饵模型稳定性以及分支的相关问题. 利用强极大值原理和抛物方程的比较原理得到了模型的适定性 (存在性、唯一性和正性), 然后分析了系统中常数稳态解的稳定性; 同时以基于记忆的扩散系数为分支参数, 得到了系统的 Turing 分支和 Hopf 分支; 说明了在该系统中对于任意的记忆时滞, 总会存在大于临界值的记忆扩散系数, 使得正常数稳态解是不稳定的; 最后利用数值模拟验证相应结论.

关键词: 反应 - 扩散方程; 记忆时滞; 适定性; Turing 分支; Hopf 分支

MR(2010) 主题分类号: 34K18; 34K20; 35K57 中图分类号: O175

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2024)05-0460-11

1 引言

生态系统中两个种群之间除了有捕食 - 被捕食、竞争和互惠合作三种常见的相互关系外, 还可能会出现种群团内捕食现象, 即两个种群之间既存在捕食 - 被捕食关系, 还存在相互竞争的关系. Holt 和 Polis 在文献 [1] 中提出下列动力学模型来研究上述团内捕食现象:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u \left(\frac{be}{cv + eu} - dv - \eta \right), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{dv}{dt} = v \left(\frac{bc}{cv + eu} + du - \kappa \right), & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

这里, $u = u(t)$ 和 $v = v(t)$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度, b 为公共资源, c 和 e 为竞争参数, d 为捕食率, η 和 κ 分别表示食饵和捕食者的自然死亡率. Fang 等人在模型 (1.1) 的基础上考虑了种群的随机扩散现象 [2], 发现种群的扩散可能导致时空非齐次模式解的出现; Wang 等人在文献 [3] 中假设捕食者种群除了随机扩散外可能会朝着食饵做定向的运动, 得到了反应 - 扩散 - 对流模型, 研究发现捕食者种群趋饵的定向运动在一定条件下也可能导致时空周期解的出现.

近年来, 生物数学工作者发现生物种群自身的空间记忆和认知会对本身的移动有很大的影响, 并在模型的对流项中加入时滞来描述这种记忆. Shi 等人在文献 [4] 中首次根据动物的情景式空间记忆, 利用修正的 Fick 定律和种群的记忆模式, 给出了如下在单种群中结合自由

*收稿日期: 2024-04-19 接收日期: 2024-07-10

作者简介: 周鑫炎 (2000-), 男, 湖北仙桃, 研究生, 主要研究方向: 生物数学

E-mail: zxy200003@email.swu.edu.cn

通讯作者: 王小利, 女, 教授, 主要研究方向: 生物数学.

扩散和基于记忆扩散的数学模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_1 \Delta u + D_2 \operatorname{div}(u \nabla u_\tau) + f(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

其中, $u = u(x, t)$, $u_\tau = u(x, t - \tau)$, $u(x, t)$ 为空间 $x \in \Omega$ 和时间 $t \geq 0$ 处某物种的种群密度, ν 表示边界 $\partial \Omega$ 上的单位外法向量, $D_1 > 0$ 表示 Fickian 扩散系数; $D_2 \in \mathbb{R}$ 表示基于记忆的扩散系数, $D_2 > 0$ 表示动物从高密度向低密度移动, $D_2 < 0$ 表示动物从低密度向高密度移动, 时滞 τ 是平均记忆周期. 文献 [4] 分析了模型 (1.2) 中古典解的适定性、稳态解的渐近稳定性, 以及两个扩散系数对稳态解的影响. 结果表明, 空间齐次稳态解的稳定性完全取决于两个扩散系数之间的关系, 与记忆时滞无关.

此后, 越来越多的学者都开始研究相关的记忆时滞, 文献 [5-7] 中针对单种群分别考虑了分布时滞、两个不同离散时滞以及空间异质等动力学模型; 同时, 在多种群中考虑空间记忆时滞可以参见文献 [8-12]. 这类模型中作者主要研究了记忆时滞以及基于记忆的扩散系数对模型动力学行为的影响.

本文在模型 (1.1) 的基础上, 假设食饵会基于记忆进行定向运动, 从而得到如下模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \rho \nabla \cdot (u \nabla u_\tau) + u \left(\frac{be}{cv + eu} - dv - \eta \right), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v \left(\frac{bc}{cv + eu} + du - \kappa \right), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = u_0(x, t), \quad v(x, t) = v_0(x), & x \in \Omega, t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $u_\tau = u(x, t - \tau)$. 在模型 (1.3) 中, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ 分别表示食饵和捕食者的自由扩散系数, $\rho (\rho \neq 0)$ 表示食饵基于记忆的扩散系数, τ 表示食饵的平均记忆周期, $\rho \nabla \cdot (u \nabla u_\tau)$ 描述的是食饵根据自身的记忆 τ 而选择靠近 ($\rho < 0$) 或者远离 ($\rho > 0$) 某地. Ω 是空间 $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ 内具有光滑边界的有界连通开区域, ν 是边界 $\partial \Omega$ 的单位外法向量. 模型的初始条件满足:

$$\begin{cases} u_0(x, t) \geq 0 (\neq 0), \quad v_0(x) \geq 0 (\neq 0), \\ u_0(x, t) \in C^{2+\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [-\tau, 0]), \quad v_0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}), \quad \alpha \in (0, 1), \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial \Omega \times [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1.4)$$

同时, 系统 (1.3) 中的其余参数 b, c, d, e, η, κ 均为正常数, 生物意义如模型 (1.1). 本文的目的是考虑基于记忆的扩散系数 ρ 和时滞 τ 对模型动力学行为的影响.

在整篇文章中, \mathbb{N} 表示所有正整数的集合, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ 表示所有非负整数的集合.

2 适定性

定理 2.1 若系统 (1.3) 的初始条件满足 (1.4), 则系统 (1.3) 存在唯一的解 $u(x, t), v(x, t) \in C^{2+\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$, $\alpha \in (0, 1)$, 并且 $u(x, t) > 0, v(x, t) > 0$.

证 首先, 当 $0 \leq t \leq \tau$ 时, $u(x, t - \tau) = u_0(x, t - \tau)$, 此时得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + \rho \nabla u_0(x, t - \tau) \cdot \nabla u \\ \quad + \rho \Delta u_0(x, t - \tau) u + u \left(\frac{be}{cv + eu} - dv - \eta \right), & x \in \Omega, t \in [0, \tau], \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + v \left(\frac{bc}{cv + eu} + du - \kappa \right), & x \in \Omega, t \in [0, \tau], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t \in [0, \tau], \\ u(x, 0) = u_0(x, 0), \quad v(x, 0) = v_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

定义

$$\begin{aligned} f &:= (\rho \Delta u_0(x, t - \tau)) u + u \left(\frac{be}{cv + eu} - dv - \eta \right), \\ g &:= v \left(\frac{bc}{cv + eu} + du - \kappa \right), \end{aligned}$$

则 f, g 关于 x, t 满足 Höld 连续, 关于 u, v 满足 Lipschitz 条件. 根据文献 [13] 的定理 4.2, 存在 $T \in (0, \tau]$, 使得当 $0 \leq t < T$ 时, (2.1) 存在唯一的解 $u, v \in C^{2+\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times [0, T])$. 下面说明可以将解从 $t \in [0, T)$ 延拓到 $[0, \tau]$, 以至 $[0, \infty)$.

由强极大值原理知 $u(x, t) \geq 0, v(x, t) \geq 0$, 所以有

$$u \left(\frac{be}{cv + eu} - dv - \eta \right) \leq u \left(\frac{b}{u} - \eta \right) = b - \eta u. \quad (2.2)$$

从而利用 (2.1) 和 (2.2) 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} \leq d_1 \Delta u + (\rho \nabla u_0(x, t - \tau)) \cdot \nabla u + (\rho \Delta u_0(x, t - \tau)) u + b - \eta u, & x \in \Omega, t \in [0, \tau], \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x, 0) \geq 0 (\neq 0), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

由于 $u_0 \in C^{2+\alpha, \frac{\alpha}{2}}$, 所以由抛物方程的比较原理知, 存在 $B_0 > 0$, 使得 $u(x, t) \leq B_0$. 从而根据 (2.1) 的第二个方程可得

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} \leq d_2 \Delta v + b + dB_0 v - \kappa v, & x \in \Omega, t \in [0, \tau], \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 (\neq 0), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

又因为 $b + dB_0 v - \kappa v$ 关于 v 是线性的, 因此由 (2.3) 和 (2.4) 知 $u(x, t), v(x, t)$ 能延拓到 $[0, \tau]$ 上. 重复该过程, 则可将解的存在区间延拓到 $[\tau, 2\tau]$; 反复进行该操作, 对于任意 $m \in \mathbb{N}$, 可将解的存在区间延拓到 $[m\tau, (m+1)\tau]$, 故系统 (1.3) 的解在 $t \in [0, \infty)$ 内全局存在. 同时根据强极大值原理可得到 $u(x, t) > 0, v(x, t) > 0$.

3 半平凡常数稳态解的稳定性

易知, 系统 (1.3) 有两个半平凡常数稳态解 $E_1 = \left(\frac{b}{\eta}, 0\right)$, $E_2 = \left(0, \frac{b}{\kappa}\right)$. 当条件

$$(H1) \quad \frac{\eta}{e} < \frac{bd}{e\kappa - c\eta} < \frac{\kappa}{c}$$

成立时, 系统 (1.3) 还存在唯一的正常数稳态解 $E^* = (u^*, v^*)$, 其中

$$u^* = \frac{\kappa}{d} - \frac{bc}{e\kappa - c\eta}, \quad v^* = -\frac{\eta}{d} + \frac{be}{e\kappa - c\eta}.$$

设 μ_n 为下述特征值问题的特征值

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = \mu\varphi, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

则 $0 = \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots \rightarrow \infty$, 对应于 μ_n 的特征函数记为 $\varphi_n(x)$. 当 $\Omega = (0, l\pi)$ 时, 有 $\mu_n = \left(\frac{n}{l}\right)^2$, $\varphi_n(x) = \cos \frac{nx}{l}$ ($n \in \mathbb{N}_0, l > 0$). 本节我们主要分析两个半平凡常数稳态解 E_1, E_2 的稳定性.

定理 3.2 (i) 当 $0 < \frac{bd}{e\kappa - c\eta} < \frac{\eta}{e}$ 以及 $d_1 \geq |\rho|\frac{b}{\eta}$ 成立时, 系统 (1.3) 的半平凡常数稳态解 $E_1 = \left(\frac{b}{\eta}, 0\right)$ 是局部渐近稳定的; 否则 E_1 是不稳定的.

(ii) 当 $\frac{bd}{e\kappa - c\eta} > \frac{\kappa}{c}$ 时, 系统 (1.3) 的半平凡常数稳态解 $E_2 = \left(0, \frac{b}{\kappa}\right)$ 是局部渐近稳定的; 否则 E_2 是不稳定的.

证 (i) 将系统 (1.3) 在 E_1 处线性化, 可得到对应特征方程:

$$\left(\lambda + d_2\mu_n - \left(\frac{c\eta}{e} + \frac{bd}{\eta} - \kappa\right)\right) \left(\lambda + d_1\mu_n + \rho\frac{b}{\eta}\mu_n e^{-\lambda\tau} + \eta\right) = 0. \quad (3.2)$$

根据 (3.2) 可得, $\lambda_{1n} = -d_2\mu_n + \left(\frac{c\eta}{e} + \frac{bd}{\eta} - \kappa\right)$ 或

$$\lambda + d_1\mu_n + \rho\frac{b}{\eta}\mu_n e^{-\lambda\tau} + \eta = 0. \quad (3.3)$$

由于 $0 < \frac{bd}{e\kappa - c\eta} < \frac{\eta}{e}$, 可知 $\lambda_{1n} < 0$ 成立. 利用文献 [4] 中的推论 3.9 可知, 当 $d_1 \geq |\rho|\frac{b}{\eta}$ 时, 方程 (3.3) 中所有的根 λ_{2n} 均具有严格的负实部. 故此时特征值 $\lambda_{1n}, \lambda_{2n}$ 都有负实部, 即平衡点 $E_1 = \left(\frac{b}{\eta}, 0\right)$ 是局部渐近稳定的.

若 $d_1 < |\rho|\frac{b}{\eta}$, 同样由文献 [4] 中的推论 3.9 可知, 对于足够大的 n , 存在 λ_{2n} 具有正实部, 故 E_1 是不稳定的; 若 $\frac{bd}{e\kappa - c\eta} \geq \frac{\eta}{e}$ 成立, 存在 $n_1 \in \mathbb{N}_0$, 使得 $\lambda_{1n_1} > 0$ 成立, 故 E_1 是不稳定的.

(ii) 将系统 (1.3) 在 E_2 处线性化, 可得到对应的特征方程为:

$$\left(\lambda + d_1\mu_n - \left(\frac{e\kappa}{c} - \frac{bd}{\kappa} - \eta \right) \right) (\lambda + d_2\mu_n + \kappa) = 0.$$

则有特征值 $\lambda'_{1n} = -d_1\mu_n + \left(\frac{e\kappa}{c} - \frac{bd}{\kappa} - \eta \right)$, $\lambda'_{2n} = -d_2\mu_n - \kappa$. 当 $\frac{bd}{e\kappa - c\eta} > \frac{\kappa}{c}$ 时, 有 $\lambda'_{1n} < 0$ 成立; 而 $\lambda'_{2n} < 0$ 显然成立, 故平衡点 $E_2 = \left(0, \frac{b}{\kappa} \right)$ 是局部渐近稳定的. 若 $\frac{bd}{e\kappa - c\eta} > \frac{\kappa}{c}$ 不成立, 即存在 $n_2 \in \mathbb{N}_0$, 使得 $\lambda'_{1n_2} > 0$ 成立, 即 E_2 是不稳定的.

4 正常数稳态解的稳定性及分支分析

下面讨论正常数稳态解 (u^*, v^*) 的稳定性. 将系统 (1.3) 在 (u^*, v^*) 处线性化, 得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1\Delta u + \rho u^* \Delta u_\tau + a_{11}u + a_{12}v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2\Delta v + a_{21}u + a_{22}v, \end{cases} \quad (4.1)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{be^2u^*}{(cv^* + eu^*)^2}, & a_{12} &= -\frac{bce u^*}{(cv^* + eu^*)^2} - du^*, \\ a_{21} &= dv^* - \frac{bcev^*}{(cv^* + eu^*)^2}, & a_{22} &= -\frac{bc^2v^*}{(cv^* + eu^*)^2}. \end{aligned}$$

设方程组 (4.1) 有如下形式的解: $u(x, t) = c_1 e^{\lambda t} \varphi_n(x)$, $v(x, t) = c_2 e^{\lambda t} \varphi_n(x)$, 其中 c_1, c_2 均为常数, 则 (4.1) 在 (u^*, v^*) 处对应的特征方程为:

$$\phi_n(\lambda) = \lambda^2 + a_n\lambda + b_n + (c_n\lambda + h_n)e^{-\lambda\tau} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.2)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n &= (d_1 + d_2)\mu_n - (a_{11} + a_{22}), \\ b_n &= d_1d_2\mu_n^2 - (d_1a_{22} + d_2a_{11})\mu_n + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \\ c_n &= \rho u^* \mu_n, \\ h_n &= \rho u^* \mu_n (d_2\mu_n - a_{22}). \end{aligned}$$

易知在无记忆扩散 ($\rho = 0$) 时, 正常数稳态解 (u^*, v^*) 是局部渐近稳定的, 即

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= -\frac{b(e^2u^* + c^2v^*)}{(cv^* + eu^*)^2} < 0, \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= d^2u^*v^* > 0. \end{aligned}$$

当时滞 $\tau = 0$ 时, 特征方程 (4.2) 变为

$$\lambda^2 + (a_n + c_n)\lambda + b_n + h_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (4.3)$$

其中

$$\begin{aligned} a_n + c_n &= (d_1 + d_2 + \rho u^*)\mu_n - (a_{11} + a_{22}), \\ b_n + h_n &= d_2(d_1 + \rho u^*)\mu_n^2 + (-\rho a_{22}u^* - d_1 a_{22} - d_2 a_{11})\mu_n + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

我们可得如下结论.

定理 4.3 设 (H1) 成立. 当 $\tau = 0$ 时, 若 $\rho \geq -\frac{d_1}{u^*}$, 则常数稳态解 E^* 是局部渐近稳定的; 若 $\rho < -\frac{d_1}{u^*}$, 则 E^* 是不稳定的.

证 若 $\rho \geq -\frac{d_1}{u^*}$, 则 $b_n + h_n > 0$; 由 $a_{11} + a_{22} < 0$ 可知 $a_n + c_n > 0$ 成立. 因此, 根据 Routh-Hurwitz 准则知 (4.3) 的所有特征根均有负实部, 从而 E^* 是局部渐近稳定的.

若 $-\frac{d_1 + d_2}{u^*} \leq \rho < -\frac{d_1}{u^*}$, 则存在一个 $N_0 > 0$, 当 $n > N_0$ 时, 有 $b_n + h_n < 0$, 此时特征值具有正实部, 故 E^* 不稳定; 当 $\rho < -\frac{d_1 + d_2}{u^*}$ 时, 即 $d_1 + d_2 + \rho u^* < 0$, 若 n 足够大, 有 $a_n + c_n < 0$ 成立, 即存在正实部的特征根, 从而 E^* 不稳定.

综上所述, 当 $\tau = 0$ 时, 若 $\rho \geq -\frac{d_1}{u^*}$, E^* 是局部渐近稳定的; 若 $\rho < -\frac{d_1}{u^*}$, E^* 是不稳定的.

利用文献 [9] 的方法, 我们考虑特征方程 (4.2) 的极限方程 ($n \rightarrow \infty$):

$$\phi_\infty(\lambda) = d_1 + \rho u^* e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (4.4)$$

设 $\lambda = \beta \pm i\gamma$ 是方程 (4.4) 的根, 则有

$$\begin{cases} d_1 + \rho u^* e^{-\beta\tau} \cos \gamma\tau = 0, \\ \rho u^* e^{-\beta\tau} \sin \gamma\tau = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

(i) 当 $\rho \geq 0$. 若 $\sin \gamma\tau \neq 0$, 根据 (4.5) 的第二个方程知 $\rho = 0$, 代入到 (4.5) 第一个方程中得到 $d_1 = 0$, 矛盾, 故 $\sin \gamma\tau = 0$. 由 $\sin \gamma\tau = 0$, 可知 $\cos \gamma\tau = \pm 1$:

(1) 当 $\cos \gamma\tau = 1$ 时, 有 $d_1 + \rho u^* e^{-\beta\tau} = 0$, 由于 $d_1 > 0$ 以及 $\rho \geq 0$, 故无解;

(2) 当 $\cos \gamma\tau = -1$ 时, 有 $d_1 - \rho u^* e^{-\beta\tau} = 0$, 可得 $\beta = \frac{-\ln \frac{d_1}{\rho u^*}}{\tau}$. 因此, 当 $\rho < \frac{d_1}{u^*}$ 时, $\beta < 0$, 即特征根实部为负的; 当 $\rho > \frac{d_1}{u^*}$ 时, $\beta > 0$, 即特征根实部为正的.

(ii) 当 $\rho < 0$. 利用上面同样的方法, 可得 $\beta = \frac{-\ln \frac{-d_1}{\rho u^*}}{\tau}$, 故当 $\rho > -\frac{d_1}{u^*}$ 时, $\beta < 0$, 即特征根实部为负的; 当 $\rho < -\frac{d_1}{u^*}$ 时, $\beta > 0$, 即特征根实部为正的.

根据上面的过程, 可以得到下面这个定理:

定理 4.4 设 (H1) 成立. 当 $|\rho| > \frac{d_1}{u^*}$ 时, 则在系统 (1.3) 中, 对于任意的 $\tau > 0$, 正常数稳态解 (u^*, v^*) 是不稳定的.

4.1 Turing 分支

对于固定的 $\tau \geq 0$, 定义

$$\rho_n^{S_1} := -\frac{b_n}{(d_2\mu_n - a_{22})u^*\mu_n} < 0, \quad \rho_n^*(\tau) := \frac{a_n}{(\tau d_2\mu_n - \tau a_{22} - 1)u^*\mu_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

当 $\rho = \rho_n^{S_1}$ 时, 特征方程 (4.2)(4.3) 均存在零特征根. 由 $\rho_n^{S_1}$ 对 μ_n 的单调性, 可得 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\rho_n^{S_1}\} = -\frac{d_1}{u^*}$. 又因为

$$\left. \frac{d\lambda(\rho)}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_n^{S_1}} = -\frac{d_2u^*\mu_n^2 - a_{22}u^*\mu_n}{a_n + \rho_n^{S_1}u^*\mu_n - (d_2\mu_n - a_{22})\tau\rho_n^{S_1}u^*\mu_n} \neq 0, \quad (4.7)$$

故关于系统 (1.3) 的 Turing 分支, 有下面结论.

定理 4.5 设 (H1) 成立. 当 $\rho = \rho_n^{S_1} < 0$ 且 $\rho_n^{S_1} \neq \rho_n^*$ ($n \in \mathbb{N}$) 时, 系统 (1.3) 在 E^* 附近存在模 $-n$ 的 Turing 分支, 其中 $\rho_n^{S_1}, \rho_n^*$ 如 (4.6) 所定义, μ_n 是 (3.1) 的简单特征根.

4.2 Hopf 分支

当 $\tau = 0$ 时, 若特征方程 (4.3) 有一对纯虚根 $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$), 易说明此时横截性条件并不满足. 故当 $\tau = 0$ 时, 系统 (1.3) 不存在 Hopf 分支.

当 $\tau > 0$ 时, 若特征方程 (4.2) 有一对纯虚根 $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$), 则

$$-\omega^2 + ia_n\omega + b_n + (ic_n\omega + h_n)e^{-i\omega\tau} = 0,$$

故

$$\begin{cases} -\omega^2 + b_n + c_n\omega \sin \omega\tau + h_n \cos \omega\tau = 0, \\ a_n\omega + c_n\omega \cos \omega\tau - h_n \sin \omega\tau = 0. \end{cases}$$

因此,

$$\omega^4 + p_n\omega^2 + q_n = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} p_n &= a_n^2 - 2b_n - c_n^2, \\ q_n &= (b_n + h_n)(b_n - h_n). \end{aligned}$$

令 $z = \omega^2$, 考虑方程:

$$z^2 + p_n z + q_n = 0. \quad (4.8)$$

定义

$$\rho_n^{S_2} := \frac{b_n}{(d_2\mu_n - a_{22})u^*\mu_n} > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

当 $\rho < \rho_n^{S_1}$ 或 $\rho > \rho_n^{S_2}$ 时, $q_n < 0$; 当 $\rho_n^{S_1} < \rho < \rho_n^{S_2}$ 时, $q_n > 0$.

假设条件

(H2) $a_{22}^2 + 2a_{12}a_{21} > 0$

成立, 则 $a_n^2 - 2b_n > 0$. 定义

$$\rho_n^{S_3} := -\frac{\sqrt{a_n^2 - 2b_n}}{u^* \mu_n} < 0, \quad \rho_n^{S_4} := \frac{\sqrt{a_n^2 - 2b_n}}{u^* \mu_n} > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

当 $\rho < \rho_n^{S_3}$ 或 $\rho > \rho_n^{S_4}$ 时, $p_n < 0$; 当 $\rho_n^{S_3} < \rho < \rho_n^{S_4}$ 时, $p_n > 0$.

由于

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\rho_n^{S_1}\} &= -\frac{d_1}{u^*}, & \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\rho_n^{S_2}\} &= \frac{d_1}{u^*}, \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\rho_n^{S_3}\} &= -\frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{u^*}, & \inf_{n \in \mathbb{N}} \{\rho_n^{S_4}\} &= \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}{u^*}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

可知当 n 充分大时, 有 $\rho_n^{S_1} - \rho_n^{S_3} > 0, \rho_n^{S_2} - \rho_n^{S_4} < 0$ 成立. 故关于方程 (4.8) 中正根的存在性有下面的结论.

引理 4.6 设 (H1)(H2) 成立. (i) 若 $\rho \in \left(-\infty, -\frac{d_1}{u^*}\right) \cup \left(\frac{d_1}{u^*}, \infty\right)$, 则方程 (4.8) 存在一个正根; (ii) 对于足够大的 n , 若 $\rho \in \left[-\frac{d_1}{u^*}, \frac{d_1}{u^*}\right]$, 则方程 (4.8) 没有正根.

证 在 (H2) 的条件下, 可知 $a_n^2 - 2b_n > 0$.

若 $q_n < 0$, 即 $\rho < \rho_n^{S_1}$ 或 $\rho > \rho_n^{S_2}$, 此时 (4.8) 一定存在一个正根. 又由于 $\rho_n^{S_1}$ 和 $\rho_n^{S_2}$ 的临界值分别为 $-\frac{d_1}{u^*}$ 和 $\frac{d_1}{u^*}$, 因此当 $|\rho| > \frac{d_1}{u^*}$ 时, (4.8) 会存在一个正根.

若 $q_n = 0$, 此时 (4.8) 正根的存在性与 p_n 有关, 当 $p_n \geq 0$ 时, (4.8) 不存在正根; 当 $p_n < 0$ 时, (4.8) 存在一个正根. 然而, 当 n 充分大时, 根据 $\rho_n^{S_i} (i = 1, 2, 3, 4)$ 的大小关系, 可知 $q_n = 0$ 和 $p_n < 0$ 不能同时发生. 故对于 $\rho = \rho_n^{S_1}$ 或 $\rho_n^{S_2}$, 当 n 足够大时, (4.8) 没有正根.

若 $q_n > 0$, 同样需要考虑 p_n 的正负, 当 $p_n \geq 0$ 时, (4.8) 不存在正根; 当 $p_n < 0$ 时, 还需判断 (4.8) 的判别式 $\Delta = p_n^2 - 4q_n$. 但是, 当 n 充分大时, $q_n > 0$ 和 $p_n < 0$ 不能同时发生. 因此, 对于 $-\frac{d_1}{u^*} < \rho < \frac{d_1}{u^*}$, 当 n 足够大时, (4.8) 没有正根.

根据方程 (4.8), 有

$$z_n = \frac{-p_n + \sqrt{p_n^2 - 4q_n}}{2}.$$

从而 $\omega_n = \sqrt{z_n}$, 因此可得到

$$\tau_n^j = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \arccos \left[\frac{h_n(\omega_n^2 - b_n) - a_n c_n \omega_n^2}{c_n^2 \omega_n + h_n^2} + 2j\pi \right], & \rho > 0 \\ \frac{1}{\omega_n} \arcsin \left[\frac{\omega(c_n \omega^2 - b_n c_n + a_n b_n)}{c_n^2 \omega_n + h_n^2} + 2j\pi \right], & \rho < 0 \end{cases}, \quad j \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}.$$

引理 4.7 设 (H1)(H2) 成立. 若 ω_n 存在, 则对于特征方程 (4.2), 有如下横截性条件成立:

$$\left. \frac{Re(d\lambda(\tau))}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} > 0.$$

证 在特征方程 (4.2) 中, 将 λ 看作关于 τ 的函数, 即 $\lambda = \lambda(\tau)$, 则

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{(2\lambda + a_n)e^{\lambda\tau} + c_n}{\lambda h_n + \lambda^2 c_n} - \frac{\tau}{\lambda}.$$

从而,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\lambda=i\omega_n\tau=\tau_n^j} &= \operatorname{Re} \left(\frac{(2i\omega_n + a_n)e^{i\omega_n\tau_n^j} + c_n}{i\omega_n h_n + (i\omega_n)^2 c_n} - \frac{\tau_n^j}{i\omega_n} \right) \\ &= \frac{(2c_n\omega_n^2 + a_n h_n)\omega_n \sin \omega_n \tau_n^j + (2h_n - a_n c_n)\omega_n^2 \cos \omega_n \tau_n^j - c_n^2 \omega_n^2}{c_n^2 \omega_n^4 + h_n^2 \omega_n^2} \\ &= \frac{2c_n^2 \omega_n^4 + (p_n c_n^2 + 2h_n^2)\omega_n^2 + p_n h_n^2}{(c_n^2 \omega_n^2 + h_n^2)^2} > 0. \end{aligned}$$

故当 $\tau = \tau_n^j$ 时, 有 $\frac{\operatorname{Re}(d\lambda(\tau))}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_n^j} > 0$ 成立, 即横截性条件成立.

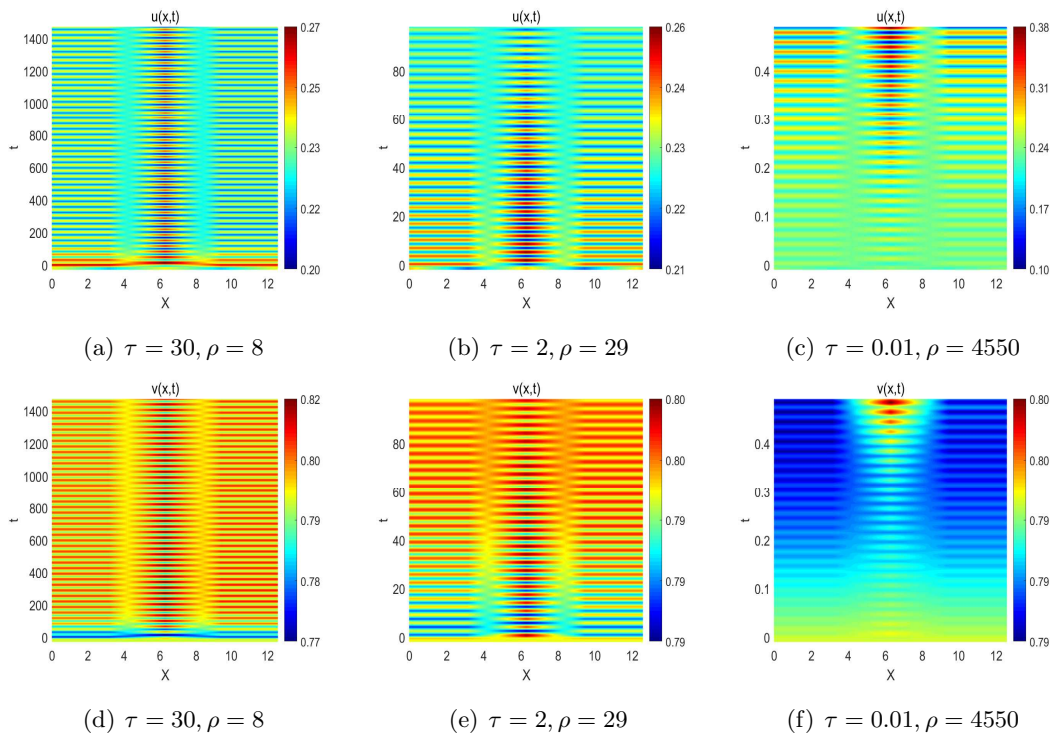


图 1 参数取 (P1) 这组数据时, $E^* = (0.2308, 0.7949)$, $\rho^* := \left| \frac{d_1}{u^*} \right| = 5.6333$. 对于任意的 $\tau > 0$, 总存在大于临界值的 ρ , 使得系统 (1.3) 的正常数稳态解 E^* 是不稳定的. 其中, (a)(b)(c) 为食饵密度空间分布图, (d)(e)(f) 为捕食者密度空间分布图.

注 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n^j = 0$ (具体可参考文献 [8] 的注 2).

结合上述两个引理可以得到结论.

定理 4.8 设 (H1)(H2) 成立. 若 $\rho \in \left(-\infty, -\frac{d_1}{u^*}\right) \cup \left(\frac{d_1}{u^*}, \infty\right)$, 则对于足够大的 n , 系统 (1.3) 在 E^* 处产生一族空间非齐次周期解, 每个对应的临界值为 $\tau = \tau_n^j, j = 0, 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n^j = 0$.

5 数值模拟

这一节中, 我们利用数值模拟来验证上述的结论. 取 $\Omega = (0, l\pi)$, 其他参数值选择如下:

$$(P1) \quad d_1 = 1.3, d_2 = 1, b = 0.9, c = 0.4, d = 0.3, e = 0.5, \eta = 0.8, \kappa = 0.9, l = 2,$$

此时, $E^* = (0.2308, 0.7949)$, $\rho^* := \left| \frac{d_1}{u^*} \right| = 5.6333$.

接下来, 我们说明对于任意的 $\tau > 0$, 总会存在大于临界值 ρ^* 的 ρ , 使得 E^* 是不稳定的, 如图 1: 若 $\tau \rightarrow 0$, 不妨令 $\tau = 0.01$, 此时取 $\rho_1 = 4550 > \rho^*$, 可得到 E^* 是不稳定的, 如图 1 的 (c)(f); 若 τ 逐渐增加, 不妨令 $\tau = 2$, 此时取 $\rho_2 = 29 > \rho^*$, 也可得到 E^* 是不稳定的, 如图 1 的 (b)(e); 若 τ 继续增加, 不妨令 $\tau = 30$, 此时取 $\rho_3 = 8 > \rho^*$, 同样可得到 E^* 是不稳定的, 如图 1 的 (a)(d).

参 考 文 献

- [1] Robert D. Holt, Gary A. Polis. A theoretical framework for intraguild predation[J]. *The American Naturalist*, 1997, 149(4): 745–764.
- [2] Fang Liting, Wang Jinfeng. The global stability and pattern formations of a predator-prey system with consuming resource[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2016, 58: 49–55.
- [3] Wang Guoshuang, Wang Jinfeng. Pattern formation in predator prey systems with consuming resource and prey-taxis[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2021, 111: 106681.
- [4] Shi Junping, Wang Chuncheng, Wang Hao, Yan Xiangping. Diffusive spatial movement with memory[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2020, 32: 979–1002.
- [5] Shi Qingyan, Shi Junping, Wang Hao. Spatial movement with distributed memory[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2021, 82(4): 33.
- [6] Shi Junping, Wang Chuncheng, Wang Hao. Diffusive spatial movement with memory and maturation delays[J]. *Nonlinearity*, 2019, 32(9): 3188.
- [7] Wang Yujia, Fan Dejun, Wang Chuncheng. Dynamics of a single population model with memory effect and spatial heterogeneity[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2022, 34(2): 1433–1452.
- [8] Li Shu, Li Zhenzhen, Dai Binxiang. Stability and Hopf bifurcation in a prey-predator model with memory-based diffusion[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, 2022, 27(11): 6885–6906.
- [9] Shi Junping, Wang Chuncheng, Wang Hao. Spatial movement with diffusion and memory-based self-diffusion and cross-diffusion[J]. *Journal of Differential Equations*, 2021, 305: 242–269.
- [10] Song Yongli, Shi Junping, Wang Hao. Spatiotemporal dynamics of a diffusive consumer-resource model with explicit spatial memory[J]. *Studies in Applied Mathematics*, 2022, 148(1): 373–395.
- [11] Wang Yujia, Wang Chuncheng, Fan Dejun. Dynamics of a diffusive competition model with memory effect and spatial heterogeneity[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2023, 523(1): 126991.
- [12] Lv Yehu. The spatially homogeneous Hopf bifurcation induced jointly by memory and general delays in a diffusive system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2022, 156: 111826.
- [13] Wang Mingxin. *Nonlinear second order parabolic equations*[M]. Florida: CRC Press, 2021.

BIFURCATION ANALYSIS OF A PREDATOR-PREY MODEL WITH MEMORY DELAY

ZHOU Xin-yan, WANG Xiao-li

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, we study the stability and bifurcation issues of a predator-prey model with memory delay under Neumann boundary conditions. The strong maximum principle and the comparison principle of parabolic equations are used to obtain the well-posedness of the model (existence, uniqueness and positivity), and then the stability of the constant steady-state solution in the system is analyzed. At the same time, the Turing bifurcation and Hopf bifurcation of the system are obtained by taking the memory-based diffusion coefficient as the bifurcation parameter; it is shown that for any memory delay in this system, there will always be a memory diffusion coefficient greater than the critical value, making the positive constant steady-state solution unstable. Finally, the numerical simulation is used to verify the corresponding conclusion.

Keywords: reaction-diffusion equation; memory delay; well-posedness; Turing bifurcation; Hopf bifurcation

2010 MR Subject Classification: 34K18; 34K20; 35K57