

一类包含广义欧拉函数的方程的可解性

牛家星, 高 丽

(延安大学数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘要: 伪 Smarandache 函数、Smarandache LCM 函数以及广义 Euler 函数都是重要的数论函数, 本文研究了由这三类函数组成的数论函数方程 $Z(n^2) = \varphi_e(\text{SL}(n^2))$ 的可解性问题. 利用整除的性质和同余的方法, 获得了该方程在 $e = 6$ 时无正整数解的结果. 推广了数论函数方程 $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ 无正整数解的结果.

关键词: 伪 Smarandache 函数; Smarandache LCM 函数; 广义 Euler 函数

MR(2010) 主题分类号: 11A25; 11Y70 中图分类号: O156.1

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2024)05-0435-06

1 引言及主要结果

欧拉函数和 Smarandache 函数在数论的学习和研究中应用十分广泛. 对于正整数 n , 伪 Smarandache 函数定义为最小的正整数 m , 使得 $1 + 2 + \dots + m$ 能被 n 整除^[1], 即

$$Z(n) = \min\{m : m \in \mathbb{Z}^+, n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}.$$

Smarandache LCM 函数被定义为最小的正整数 m , 使得 $1, 2, 3, \dots, m$ 的最小公倍数能被 n 整除^[2], 即

$$\text{SL}(n) = \min\{m : m \in \mathbb{Z}^+, n \mid \text{lcm}[1, 2, 3, \dots, m]\}.$$

蔡天新等人把广义欧拉函数这样来定义, 即对于任意的正整数 e , 正整数 n 的广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)$ 定义为序列 $1, 2, 3, \dots, [\frac{n}{e}]$ 中与 n 互素的个数^[3], 即

$$\varphi_e(n) = \sum_{i=1, \text{gcd}(i, n)=1}^{[\frac{n}{e}]} 1.$$

易证明:

$$\varphi_e(n) = \sum_{\frac{d}{n}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \left[\frac{d}{e}\right],$$

其中 $\mu(n)$ 为麦比乌斯函数.

*收稿日期: 2023-12-09 接收日期: 2024-04-19

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11471007); 陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目 (2013JQ1019); 延安大学研究生教改研究项目 (YDYJG2018022).

作者简介: 牛家星 (1999-), 女, 河南安阳, 研究生, 主要研究方向: 数论. E-mail: 2643588924@qq.com.

通讯作者: 高丽 (1967-), 女, 陕西绥德, 教授, 主要研究方向: 数论. E-mail: yadxgl@163.com.

许多学者研究了广义欧拉函数, 比如邓桂林等^[4]研究了方程 $\varphi_e(n) = p^{t\omega(n)}$ (p 为奇素数) 的可解性问题; 赵贤等^[5]研究了广义欧拉方程 $\varphi_5(n) = \frac{d}{n}$ (d 是 n 的正因子) 的正整数解问题.

近年来, 蔡天新等人利用雅可比符号和勒让德公式得到了 $\varphi_e(n)$ ($e = 3, 4, 6$) 的计算公式, 有许多学者利用这几个公式, 将以上定义三类函数结合起来, 例如, 张文鹏教授^[6]研究了 F.Smarandache 函数的两个问题, 证明了方程 $Z(n) = S(n)$ 以及 $Z(n) + 1 = S(n)$ 存在无穷多个正整数解, 并且也给出了解的具体形式; 郭梦媛, 高丽等^[7]研究了数论函数方程 $S(\text{SL}(n^2)) = \varphi_2(n)$ 问题的可解性, 并得出全部正整数解; 杨张媛等^[8]研究了方程 $S(\text{SL}(n)) = \varphi^2(n)$ 的可解性, 并给出该方程仅有两个正整数解 $n = 1$ 和 4 . 近几年来, 有众多的学者将这三种不同的数论函数结合起来研究, 并从中获取了不少研究成果. 例如, 朱杰等^[9]研究了方程 $Z(n) = \varphi_e(\text{SL}(n))$ 的可解性问题和正整数解问题, 并得到该方程没有正整数解; 张利霞等^[10]人研究了 $Z(\text{SL}(n)) = \varphi_e(n)$, $e \in \{1, 2\}$ 时的可解性问题, 并给出了其所有正整数解; 杜珊^[11]在其硕士论文中研究了数论函数方程 $Z(n^2) = \varphi_e(\text{SL}(n))$ 的可解性, 并得出当 $e = 1$ 时方程 $Z(n^2) = \varphi_e(\text{SL}(n))$ 有唯一的正整数解 $n = 1$, 而当 $e \in \{2, 3, 4, 6\}$ 方程 $Z(n^2) = \varphi_e(\text{SL}(n))$ 没有正整数解; 王慧莉等^[12]讨论了数论函数方程 $\text{SL}(n) = \varphi_e(n)$ 的可解性的问题, 并得到了该方程全部的正整数解.

本文进一步对数论函数方程进行研究, 将伪 Smarandache 函数以及广义 Euler 函数结合起来, 讨论当 $e = 6$ 时, 方程 $Z(n^2) = \varphi_e(\text{SL}(n^2))$ 的可解性, 主要得到以下结果:

定理 函数方程

$$Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2)) \quad (1.1)$$

无正整数解.

2 相关引理

为后文叙述方便, 设 n 为正整数, 记 $\Omega(n)$ 为 n 的素因子个数 (重复计数), $\omega(n)$ 为 n 的不同素因子的个数, 并规定 $\Omega(1) = \omega(1) = 0$.

引理 2.1^[13] 设正整数 n 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, 则有

$$\text{SL}(n) = \max\{p_i^{\alpha_i} | i = 1, 2, 3, \dots, s\}$$

特别的, 当 p 为素数及 $\alpha \geq 1$ 时, 有 $\text{SL}(p^\alpha) = p^\alpha$.

引理 2.2^[14] 对任意素数 $p \geq 3$ 及 $k \geq 1$, 有 $Z(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$. 当 $p = 2$ 时, 则有 $Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$.

引理 2.3^[15] 对任意两个互素的正整数 m, n , 有 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

引理 2.4^[16] 若 $n = 2^\alpha 3^\beta \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} > 6$, 其中 $\alpha, \beta, \alpha_i \geq 0$, p_i 是不同的奇素数且 $\gcd(p_i, 6) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, s$), 则

$$\varphi_6(n) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{6} + \frac{(-1)^{\Omega(n)} 2^{\omega(n)+1-\beta}}{6}, \alpha = 0, \beta \in \{0, 1\} \text{ 且 } p_i \equiv 5 \pmod{6}; \\ \frac{\varphi(n)}{6} + \frac{(-1)^{\Omega(n)} 2^{\omega(n)-1-\beta}}{6}, \alpha = 1, \beta \in \{0, 1\} \text{ 且 } p_i \equiv 5 \pmod{6}; \\ \frac{\varphi(n)}{6} + \frac{(-1)^{\Omega(n)} 2^{\omega(n)-\beta}}{6}, \alpha \geq 2, \beta \in \{0, 1\} \text{ 且 } p_i \equiv 5 \pmod{6}; \\ \frac{\varphi(n)}{6}, \text{ 其它.} \end{cases}$$

引理 2.5^[17] 若 $n = 2^\alpha 3^\beta > 6$, 则

$$\varphi_6(n) = \begin{cases} \frac{2^{\alpha-2} + (-1)^{\alpha-1}}{3}, \alpha \geq 3 \text{ 且 } \beta = 0; \\ \frac{2^{\alpha-1} + (-1)^\alpha}{3}, \alpha \geq 2 \text{ 且 } \beta = 1; \\ \frac{\varphi(n)}{6}, \text{ 其它.} \end{cases}$$

3 定理的证明

证

$$\begin{aligned} Z(1^2) &= 1, \varphi_6(\text{SL}(1^2)) = \varphi_6(1) = 0, Z(1^2) \neq \varphi_6(\text{SL}(1^2)). \\ Z(2^2) &= 7, \varphi_6(\text{SL}(2^2)) = \varphi_6(4) = 0, Z(2^2) \neq \varphi_6(\text{SL}(2^2)). \\ Z(3^2) &= 8, \varphi_6(\text{SL}(3^2)) = \varphi_6(6) = 1, Z(3^2) \neq \varphi_6(\text{SL}(3^2)). \\ Z(4^2) &= 31, \varphi_6(\text{SL}(4^2)) = \varphi_6(6) = 1, Z(4^2) \neq \varphi_6(\text{SL}(4^2)). \\ Z(5^2) &= 24, \varphi_6(\text{SL}(5^2)) = \varphi_6(10) = 1, Z(5^2) \neq \varphi_6(\text{SL}(5^2)). \\ Z(6^2) &= 8, \varphi_6(\text{SL}(6^2)) = \varphi_6(6) = 1, Z(6^2) \neq \varphi_6(\text{SL}(6^2)). \end{aligned}$$

因此, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ 均不是方程 (1.1) 的解.

1. 设 $n = 2^\alpha 3^\beta > 6$, $\alpha, \beta \geq 0$.

1) 若 $\beta = 0$ 且 $\alpha \geq 3$, 则 $n = 2^\alpha$, $\text{SL}(n) = 2^\alpha$. 此时 $\text{SL}(n^2) = 2^{2\alpha}$. 根据引理 2.5 可得

$$\varphi_6(\text{SL}(n^2)) = \varphi_6(2^{2\alpha}) = \frac{2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1}}{3}.$$

若 $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ 成立, 由 $Z(n)$ 的定义可得

$$2^{2\alpha} \mid \frac{\frac{2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1}}{3} [\frac{2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1}}{3} + 1]}{2},$$

即

$$2^{2\alpha+1} 3^2 \mid [2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1}] [2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1} + 3],$$

从而

$$2^{2\alpha+1} \mid [2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1}] [2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1} + 3].$$

因为 $(2^{2\alpha+1}, 2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1}) = 1$, 所以 $2^{2\alpha+1} | [2^{2\alpha-2} + (-1)^{2\alpha-1} + 3]$. 显然这是不成立的.

2) 若 $\beta = 1, \alpha \geq 2$, 则 $\text{SL}(n) = \max\{2^\alpha, 3^\beta\} = 2^\alpha$, 此时 $\text{SL}(n^2) = 2^{2\alpha}$. 由引理 2.5 可得

$$\varphi_6(\text{SL}(n^2)) = \varphi_6(2^{2\alpha}) = \frac{2^{2\alpha-1} + (-1)^{2\alpha}}{3}.$$

若 $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ 成立, 由 $Z(n)$ 的定义可得

$$2^{2\alpha} | \frac{[\frac{2^{2\alpha-1} + (-1)^{2\alpha}}{3}][\frac{2^{2\alpha-1} + (-1)^{2\alpha}}{3} + 1]}{2},$$

即

$$2^{2\alpha+1} 3^2 | [2^{2\alpha-1} + 1][2^{2\alpha-1} + 4],$$

从而

$$2^{2\alpha+1} | [2^{2\alpha-1} + 1][2^{2\alpha-1} + 4].$$

因为 $(2^{2\alpha+1}, 2^{2\alpha-1} + 1) = 1$, 所以 $2^{2\alpha+1} | 2^{2\alpha-1} + 4$. 显然这是不成立的.

2. 设 $n = 2^\alpha 3^\beta \prod_{i=1}^s p_i^{\alpha_i} > 6$, $\alpha, \beta, \alpha_i \geq 0$. p_i 是不同的素数且 $\gcd(p_i, 6) = 1$.

1) $p_i \equiv 1 \pmod{6}$. 由引理 2.4 可以得到

$$\varphi_6(\text{SL}(n^2)) = \varphi_6(p_s^{2\alpha_s}) = \frac{1}{6} p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1).$$

若 $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ 成立, 由 $Z(n)$ 的定义可得

$$2^{2\alpha} 3^{2\beta} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_s^{2\alpha_s} | \frac{[\frac{1}{6} p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1)][\frac{1}{6} p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + 1]}{2},$$

即

$$2^{2\alpha+3} 3^{2\beta+2} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_s^{2\alpha_s} | [p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1)][p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + 6].$$

特别的, 当 $i = s$ 时

$$p_s^{2\alpha_s} | [p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1)][p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + 6],$$

从而

$$p_s | (p_s - 1)[p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + 6].$$

因为 $\gcd(p_s, p_s - 1) = 1$, 所以 $p_s | [p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + 6]$, 即 $p_s | (p_s^{2\alpha_s-1} + 6)$. 当 $\alpha_s = 1$ 时, $p_s = 2$ 或 3 , 与 $p_s \equiv 1 \pmod{6}$ 矛盾. 当 $\alpha_s > 1$ 时, $p_s \nmid p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + 6$. 此时方程 (1.1) 无解.

2) $p_i \equiv 5 \pmod{6}$. 由引理 2.4 可以得到

$$\varphi_6(\text{SL}(n^2)) = \varphi_6(p_s^{2\alpha_s}) = \frac{1}{6} p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + \frac{4 \cdot (-1)^{\alpha_s}}{6}.$$

若 $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ 成立, 由 $Z(n)$ 的定义可得

$$2^{2\alpha} 3^{2\beta} p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_s^{2\alpha_s} | \frac{[\frac{1}{6} p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + \frac{4 \cdot (-1)^{\alpha_s}}{6}][\frac{1}{6} p_s^{2\alpha_s-1} (p_s - 1) + \frac{4 \cdot (-1)^{\alpha_s}}{6} + 1]}{2},$$

即

$$2^{2\alpha+3}3^{2\beta+2}p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_s^{2\alpha_s}[[p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}][p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}+6].$$

特别的, 当 $i = s$ 时

$$p_s^{2\alpha_s}[[p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}][p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}+6],$$

即

$$p_s^{2\alpha_s}[[p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}], \quad (3.1)$$

或

$$p_s^{2\alpha_s}[[p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}+6], \quad (3.2)$$

或存在 $r(1 \leq r \leq \alpha_s)$, 使得

$$\begin{cases} p_s^r[[p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}]; \\ p_s^{\alpha_s-r}[[p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}+6]. \end{cases} \quad (3.3)$$

对于 (3.1) 式成立, 若 $\alpha_s = 1$, 则有 $p_s = 1$. 若 $\alpha_s > 1$, 则 $p_s^{2\alpha_s} \nmid p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}$. 对于 (3.2) 式成立, 若 $\alpha_s = 1$, 则有 $p_s = 1$ 或 2 . 若 $\alpha_s > 1$, 则 $p_s^{2\alpha_s} \nmid p_s^{2\alpha_s-1}(p_s-1)+4\cdot(-1)^{\alpha_s}+6$. 因此 (3.3) 式也不成立. 此时方程 (1.1) 无解.

综上所述, 方程 $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ 无正整数解.

4 结论

本文基于伪 Smarandache 函数, Smarandache LCM 函数以及广义 Euler 函数的基本性质, 结合 $\varphi_6(n)$ 的准确计算公式, 研究了方程 $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ 的可解性问题, 并得出其没有正整数解. 关于广义 Euler 函数 $\varphi_e(n)(e = 8, 12)$ 的公式也已得出, 因此后续可研究 $Z(n^2) = \varphi_e(\text{SL}(n^2))(e = 8, 12)$ 的问题.

参 考 文 献

- [1] Sandor J. On a dual of the pseudo Smarandache function [J]. Smarandache Notions Journal, 2002, 13(1-2-3): 18-23.
- [2] Murthy A. Some new Smarandache sequences, functions and partitions[J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 11(1): 179-183.
- [3] Cai Tianxin. A congruence involving the quotients of Euler and its applications(I)[J]. Acta Arithmetica, 2002, 103(4): 313-320.
- [4] 邓桂林, 廖群英. 方程 $\varphi_e(n) = p^{t\omega(n)}$ 的可解性 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2021, 44 (1): 18-22.
- [5] 赵贤, 刘敏捷. 一类广义欧拉函数方程的可解性 [J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(7): 256-259.
- [6] 张文鹏. 关于 F.Smarandache 函数的两个问题 [J]. 西北大学学报 (自然科学版), 2008, 173(2): 173-176.
- [7] 郭梦媛, 高丽, 郑璐. 关于数论函数方程 $S(\text{SL}(n^2)) = \varphi_2(n)$ 解的讨论 [J]. 江西科学, 2018, 36(2): 217-219.

- [8] 杨张媛, 赵西卿, 白继文. 方程 $S(\text{SL}(n)) = \varphi^2(n)$ 的可解性 [J]. 延安大学学报 (自然科学版), 2018, 37(1): 14–16.
- [9] 朱杰, 廖群英. 方程 $Z(n) = \varphi_e(\text{SL}(n))$ 的可解性 [J]. 数学进展, 2019, 48(5): 541–554.
- [10] 张利霞, 赵西卿. 一类包含伪 Smarandache 函数的方程 [J]. 延安大学学报 (自然科学版), 2016, 35(3): 13–15.
- [11] 杜珊. 几类数论方程的可解性 [D]. 四川: 四川师范大学, 2021.
- [12] 王慧莉, 廖群英, 杜珊. 方程 $\text{SL}(n) = \varphi_e(n)$ 的可解性 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2021, 44(6): 752–761.
- [13] Liu Yanni, Li Ling, Liu Baoli. Smarandache unsolved problems and new progress[M]. Ann Arbor, MI: High American Press, 2008.
- [14] Richard P. Some properties of pseudo Smarandache function[J]. Scientia Magna, 2005, 1(2): 167–172.
- [15] 蔡天新. 数论: 从同余的观点出发 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [16] 沈忠燕, 蔡天新, 胡孟君. 广义欧拉函数的奇偶性 (II)[J]. 数学进展, 2016, 45(4): 509–519.
- [17] 朱杰, 廖群英. 关于方程 $Z(n) = \varphi_e(\text{SL}(n))$ 的正整数解 [J]. 四川师范大学学报 (自然科学版), 2020, 43(4): 451–457.

SOLVABILITY OF A CLASS OF EQUATIONS CONTAINING GENERALIZED EULER FUNCTIONS

NIU Jia-xing, GAO Li

(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

Abstract: Pseudo Smarandache functions, Smarandache LCM and Euler functions are important number theoretic functions. In this paper, the solvability of the number theoretic functional equation $Z(n^2) = \varphi_e(\text{SL}(n^2))$ composed of these three classes of functions is studied. By using the property of integral division and the method of congruence, the result that equation has no positive integer solution at $e = 6$ is obtained. This paper generalizes the result of the equation $Z(n^2) = \varphi_6(\text{SL}(n^2))$ without positive integer solution.

Keywords: pseudo Smarandache function; Smarandache LCM function; generalized Euler function

2010 MR Subject Classification: 11A25; 11Y70