Vol. 44 (2024)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

基于有限域上三维非全迷向子空间的辛图

霍丽君, 吴 杨
(重庆理工大学理学院, 重庆 400054)

摘 要: 本文以定义在有限域 F_q 上的 2ν 维辛空间 $F_q^{(2\nu)}$ 中的三维非全迷向子空间为顶点集构造了一类辛图, 记为 Γ. Γ 的两个顶点 V_1 和 V_2 相邻接当且仅当 $V_1 \cap V_2$ 是 $F_q^{(2\nu)}$ 的一个二维子空间. 本文研究了该图的基本性质, 计算了图的参数, 得到当 $\nu = 2$ 时, Γ 是一个完全图 $K_{(q+1)(q^2+1)}$; 当 $\nu = 3$ 时, 该图是一个 8-Deza 图; 当 $\nu \geq 4$ 时, 该图是一个 9-Deza 图, 由此进一步得到当 $\nu \geq 3$ 时其直径和围长都是 3, 并且团数是 $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

关键词: 有限域; 非全迷向子空间; 辛图; d-Deza 图
MR(2010) **主题分类号**: 05E30 **中图分类号**: O157.5
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)04-0369-08

1 引言

设 F_q 是一个特征为奇数的 q 元有限域, $F_q^{(2\nu)} = \{(a_1, \ldots, a_{2\nu})^T | a_i \in F_q, i = 1, \ldots, 2\nu\}$ 是带有双线性函数 $f(\alpha, \beta) = \alpha^T K \beta$ 的 2ν 维辛空间, 其中 K 为定义在 F_q 上的 2ν 阶非奇异交错矩阵, 即 $K = \begin{pmatrix} 0 & I_\nu \\ -I_\nu & 0 \end{pmatrix}$, 这里 I_ν 是 ν 阶单位矩阵. 设 $W = \langle A_1, \ldots, A_m \rangle$ 是由 $F_q^{(2\nu)}$ 的线性无关的列向量 $A_1, \ldots, A_m$ 张成的一个 m 维子空间, 为方便计算和描述, 本文将子空间 W 表示为矩阵 $W = (A_1, \ldots, A_m)$. 如果子空间 W 满足 $W^T K W = O$, 则称其为全迷向的, 否则称其为非全迷向的, 本文主要考虑的就是非全迷向子空间. 令 P 是 F_q 上任一个 m 阶可逆矩阵, 显然矩阵 W 与 WP 表示同一个子空间. 此外, 定义 $W^\perp = \{\alpha \in F_q^{(2\nu)} | \alpha^T K \beta = 0, \forall \beta \in W\}$. 有关辛空间的更多相关定义, 可参考文献 [1].

近几十年, 利用代数结构构造图, 并研究图的结构及代数性质是代数图论中的一个重要研究内容, 这在图论和计算机科学的交叉学科研究中起着相当重要的作用. 2006 年, 唐忠明和万哲先 [2] 研究了定义在有限域上的辛图, 该图以全体一维子空间为顶点集, 两个顶点 α, β 邻接当且仅当 $\alpha^T K \beta = 0$. 事实上, 辛图的研究最早始于 1993 年 Rotman[3] 在关于模 2 的辛图的研究, 在此之后, 万哲先、顾振华等人对辛图及其次成分进行了研究 [4, 5], 紧接着 Meemark 等人 [6, 7] 研究了有限局部环和有限交换环上的辛图, 而李凤高等人 [8–10] 则通过组合的方法研究了有限域上模 pq 和模 p^n 的辛图问题.

最近, 在文献 [11] 中，作者以 $F_q^{(2\nu)}$ 中的二维辛子空间为顶点集, 以两个不同子空间的交是一维子空间为邻接条件定义了一类辛图, 计算了该图及其次成分的参数, 得到了一些有

*收稿日期: 2024-02-10 接收日期: 2024-03-20
基金项目: 重庆市自然科学基金项目 (CSTB2022NSCQ-MSX0831, cstc2021jcyj-msxmX0575); 重庆理工大学研究生教育高质量发展行动计划资助成果 (gzljg2022319); 重庆理工大学自科基金培育项目 (2022PYZ023); 重庆理工大学教育教学改革项目 (2023YB115, 2024YB08).
作者简介: 霍丽君 (1983–): 女, 讲师, 主要研究方向: 代数学, E-mail: huolj@cqut.edu.cn

意义的结论, 例如得到该图是一个 4-Deza 图, 且当 $\nu \geq 3$ 时, 其第一次成分也是一个 4-Deza 图. 基于上述研究, 本文将进一步考虑如果将其顶点推广到三维的情形, 其对应的辛图的性质或参数会是怎样的. 为此, 本文考虑如下定义的辛图:

定义 1.1 基于三维非全迷向子空间的辛图, 记为 Γ, 以辛空间 $F_q^{(2\nu)}$ 中的所有三维非全迷向子空间为顶点集, 两个顶点 $V_1, V_2 \in V(\Gamma)$ 相邻, 即 $V_1 \sim V_2$ 当且仅当 $V_1 \cap V_2$ 是一个二维子空间.

本文的结构安排如下, 在第二节中介绍预备知识, 主要给出图的相关定义如 d-Deza 图、围长、团数以及必要的引理等. 第三节讨论了辛图 Γ 的一些性质及参数问题, 具体地, 当 $\nu = 2$ 时, 该图是一个完全图 $K_{(q+1)(q^2+1)}$; 当 $\nu = 3$ 时, 该图是一个 8-Deza 图; 当 $\nu \geq 4$ 时, 该图是一个 9-Deza 图, 从而进一步得到 $\nu \geq 3$ 时其直径和围长都是 3, 并且团数是 $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

2 预备知识

定义 2.1 [1] 一个图的直径是两个顶点间距离的最大值.

定义 2.2 [1] 图的围长是指图中最小环的长度.

定义 2.3 [1] 团是图中两两相邻的顶点组成的集合, 而团数是指图中最大团中顶点的个数.

定义 2.4 [4] 设 G 是一个有 n 个顶点且度为 k 的正则图, 如果对任意两个不相同的顶点有 $c_1, \cdots, c_{d-1}$ 或 c_d 个公共邻接点, 则称 G 为具有参数 $(n, k, \{c_1, \cdots, c_d\})$ 的 d-Deza 图.

引理 2.5 三维非全迷向子空间 W 是辛图 Γ 的一个顶点当且仅当 W 可以表示为 $W = (A_1, A_2, A_3)$, 其中 $A_1^T K A_2 \neq 0$, $A_1^T K A_3 = A_2^T K A_3 = 0$.

证明: 充分性显然. 下证必要性, 设 $U = (B_1, B_2, B_3)$ 是图 Γ 的任意一个顶点, 即它是一个三维非全迷向子空间, 于是 $U^T K U \neq 0$. 不妨设 $B_1^T K B_2 \neq 0$, 则易知存在三阶可逆矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{B_2^T K B_3}{B_1^T K B_2} \\ 0 & 1 & -\frac{B_1^T K B_3}{B_1^T K B_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(F_q), \text{使得 } (UP)^T K (UP) = \begin{pmatrix} 0 & B_1^T K B_2 & 0 \\ -\ B_1^T K B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

令 $W = UP = (A_1, A_2, A_3)$, 显然, W 和 U 是同一个顶点, 并且 $A_1^T K A_2 \neq 0$, $A_1^T K A_3 = 0$,$A_2^T K A_3 = 0$.

3 基于三维非全迷向子空间的辛图的性质

定理 3.1 辛图 Γ 是顶点传递的.

证 由文献 [12] 定理 3.7, 该图 Γ 显然是顶点传递的.

定理 3.2 当 $\nu = 2$ 时, 辛图 Γ 是一个完全图 $K_{(q+1)(q^2+1)}$.

证 令 V_1 是 Γ 的任意顶点, 则 $V_1^T K V_1 \neq 0$. 注意到所有的三维子空间减去其中的三维全迷向子空间即为三维非全迷向子空间. 从而顶点 V_1 的个数为

$$\frac{(q^4-1)(q^4-q)(q^4-q^2) - (q^4-1)(q^3-q)(q^2-q^2)}{(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)} = (q+1)(q^2+1).$$

即有 $|V(\Gamma)| = (q+1)(q^2+1)$. 令 V_2 为 Γ 上不同于 V_1 的任意顶点, 由维数公式可知 $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) = 6 - 4 = 2$, 于是 Γ 上任意两顶点都相邻, 因此 Γ 是完全图 $K_{(q+1)(q^2+1)}$.

定理 3.3 当 $\nu \geq 4$ 时, 辛图 Γ 是一个 9-Deza 图, 其参数为

$$\left(\frac{q^{2\nu-4}\left(q^{2(\nu-1)}-1\right)(q^{2\nu}-1)}{(q^2-1)(q-1)}, q^{2\nu-4}(q+1)^2+\frac{q^{2\nu}-q^3}{q-1}-q-1, \Omega\right),$$

其中 $\Omega=\{\frac{q^{2(\nu-1)}-1}{q-1}+q^2(q+1)-2, \frac{q^{2(\nu-1)}-1}{q-1}+(q+1)^2(q-1)-2, q^{2(\nu-2)}(q+1)+q^3+q^2-q-2, q^{2(\nu-2)}(q+1)+q^3+q^2-2, (q+1)^2, q^2+2q, q^2+q, q^2, 0\}$.

证 将分以下步骤进行证明.

(1) 令 V_1 是 Γ 上任意顶点, 则 $V_1^TKV_1 \neq 0$. 注意到所有的三维子空间减去其中的三维迷向子空间即为三维非全迷向子空间. 所以顶点 V_1 的个数为

$$\frac{(q^{2\nu}-1)(q^{2\nu}-q)(q^{2\nu}-q^2)-(q^{2\nu}-1)(q^{2\nu-1}-q)(q^{2\nu-2}-q^2)}{(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)}=\frac{q^{2\nu-4}(q^{2(\nu-1)}-1)(q^{2\nu}-1)}{(q^2-1)(q-1)}.$$

(2) 令 $V_1=(A_1,A_2,A_3)$, 其中 $A_1^TKA_2 \neq 0$, $A_1^TKA_3=A_2^TKA_3=0$. 设 V_2 是图 Γ 中与 V_1 相邻的任意顶点, 则有 $V_2=(W_1,W_2,X)$, 其中 $W_1=k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3 \in V_1$, $W_2=g_1A_1+g_2A_2+g_3A_3 \in V_1$, $\langle W_1\rangle \neq \langle W_2\rangle$, $X \in F_q^{(2\nu)}-V_1$, $V_1 \neq V_2$. 这里分以下两种情况:

情形 1: $W_1^TKW_2 \neq 0$. 此时, $(k_1A_1+k_2A_2+k_3A_3)^TK(g_1A_1+g_2A_2+g_3A_3) \neq 0$, 即 $k_1g_2 \neq k_2g_1$, 所以顶点 V_2 的个数为

$$|V_2|_1=\frac{(q^3-q)(q^3-q^2)}{(q^2-1)(q^2-q)}\left(\frac{q^{2\nu}-q^2}{q^3-q^2}-1\right)=\frac{q^{2\nu}-q^3}{q-1}.$$

情形 2: $W_1^TKW_2=0$. 此时显然有 $k_1g_2=k_2g_1$. 因为 $\langle W_1\rangle \neq \langle W_2\rangle$, 所以 $k_1g_3 \neq k_3g_1$, 同时为保证 V_2 是一个非全迷向的子空间, 要求 $X \notin W_1^{\perp}$ 或 $X \notin W_2^{\perp}$, 即 $W_1^TKX \neq 0$ 或 $W_2^TKX \neq 0$. 当 $W_1 \notin \langle A_3\rangle$ 时, $W_2=k(k_1A_1+k_2A_2)+g_3A_3$ 其中 $k \in F_q$; 当 $W_1 \in \langle A_3\rangle$ 时,$W_2 \notin \langle A_3\rangle$. 于是顶点 V_2 的个数为

$$|V_2|_2=\frac{(q^3-q)(q^2-q)+(q-1)(q^3-q)}{(q^2-1)(q^2-q)}\left(\frac{q^{2\nu}-q^{2\nu-2}}{q^3-q^2}-1\right)=q^{2\nu-4}(q+1)^2-q-1.$$

结合以上两种情形, 顶点 V_1 的度为

$$|V_2|_1+|V_2|_2=q^{2\nu-4}(q+1)^2+\frac{q^{2\nu}-q^3}{q-1}-q-1.$$

(3) 令 $V_1=(W_1,W_2,A)$,$V_2=(W_1,W_2,B)$ 为辛图 Γ 上任意两个相邻的顶点, V_3 是 V_1 和 V_2 的公共邻点. 这里考虑两种情况:

情形 1: $W_1^TKW_2 \neq 0$. 由引理 2.5, 可以令 $A,B \in \langle W_1,W_2\rangle^{\perp}$. 当 $\langle W_1,W_2\rangle \subseteq V_3$ 时, 则 $V_3=(W_1,W_2,X)$, 其中 $X \in F_q^{(2\nu)}-\langle W_1,W_2\rangle$, 并且 $V_3 \neq V_1$,$V_3 \neq V_2$. 从而可得顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_1=\frac{q^{2\nu}-q^2}{q^3-q^2}-2=\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}-2.$$

当 $\langle W_1,W_2\rangle \nsubseteq V_3$ 时, 则 $V_3=(k_1W_1+k_2W_2,H_1,H_2)$, 其中 $H_1=A+g_1W_1+g_2W_2$, $H_2=B+h_1W_1+h_2W_2$. 如果 $k_1g_2=k_2g_1$ 且 $k_1h_2=k_2h_1$, 当 $A^TKB=0$ 时, 顶点 V_3 的个

数为 $|V_3|_2=0$, 当 $A^TKB\neq 0$ 时, 顶点 V_3 的个数为 $|V_3|_3=\frac{q^2-1}{q-1}=q+1$. 如果 $k_1g_2\neq k_2g_1$ 或 $k_1h_2\neq k_2h_1$, 顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_4=2\cdot\frac{q^2-1}{q-1}\cdot\frac{q^2-q}{q}\cdot q-\frac{q^2-1}{q-1}\cdot\frac{q^2-q}{q}\cdot\frac{q^2-q}{q}=(q^2-1)(q+1).$$

所以在这种情况下 V_1 和 V_2 的公共邻点的个数为

$$|V_3|_1+|V_3|_2+|V_3|_4=\frac{q^{2(\nu-1)}-1}{q-1}+(q+1)^2(q-1)-2$$

或

$$|V_3|_1+|V_3|_3+|V_3|_4=\frac{q^{2(\nu-1)}-1}{q-1}+q^2(q+1)-2.$$

情形 2: $W_1^TKW_2=0$. 显然有 $A,B\notin\langle W_1,W_2\rangle^{\perp}$, 当 $\langle W_1,W_2\rangle\subseteq V_3$ 时, 则 $V_3=(W_1,W_2,X)$, 其中 $X\in F_q^{(2\nu)}-W_1^{\perp}\cap W_2^{\perp}$, 并且 $V_3\neq V_1$,$V_3\neq V_2$, 于是可得顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_5=\frac{q^{2\nu}-q^{2\nu-2}}{q^3-q^2}-2=q^{2\nu-4}(q+1)-2.$$

当 $\langle W_1,W_2\rangle\nsubseteq V_3$ 时, 则 $V_3=(k_1W_1+k_2W_2,H_1,H_2)$, 其中 $H_1=A+g_1W_1+g_2W_2$, $H_2=B+h_1W_1+h_2W_2$. 先假设 $\begin{vmatrix}A^TKW_1 & A^TKW_2\\ B^TKW_1 & B^TKW_2\end{vmatrix}=0$, 此时, 如果 $H_1^TK(k_1W_1+k_2W_2)=0$, 则 $H_2^TK(k_1W_1+k_2W_2)=0$, 于是要求 $H_1^TKH_2\neq 0$, 所以顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_6=\frac{q^2}{q}\cdot\frac{q^2}{q}-\frac{q^2}{q}\cdot\frac{q}{q}=q^2-q.$$

如果 $H_1^TK(k_1W_1+k_2W_2)\neq 0$, 则有 $H_2^TK(k_1W_1+k_2W_2)\neq 0$, 所以顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_7=\frac{q^2-q}{q-1}\cdot\frac{q^2}{q}\cdot\frac{q^2}{q}=q^3.$$

假设 $\begin{vmatrix}A^TKW_1 & A^TKW_2\\ B^TKW_1 & B^TKW_2\end{vmatrix}\neq 0$, 则必有 $H_1^TK(k_1W_1+k_2W_2)\neq 0$ 或 $H_2^TK(k_1W_1+k_2W_2)\neq 0$, 所以顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_8=\frac{q^2-1}{q-1}\cdot\frac{q^2}{q}\cdot\frac{q^2}{q}=q^3+q^2.$$

从而在这种情况下 V_1 和 V_2 的公共邻点的个数为

$$|V_3|_5+|V_3|_6+|V_3|_7=q^{2(\nu-2)}(q+1)+q^3+q^2-q-2$$

或

$$|V_3|_5+|V_3|_8=q^{2(\nu-2)}(q+1)+q^3+q^2-2.$$

(4) 令 V_1,V_2 为辛图 Γ 上任意两个不相邻的顶点, V_3 为 V_1 和 V_2 的公共邻点. 这里考虑两种情况:

情形 1: $V_1 \cap V_2 = 0$. 易知顶点 V_1 和 V_2 无公共邻点, 即 V_3 的个数为零.

情形 2: $V_1 \cap V_2 = \langle W \rangle$. 此时, 不妨设 $V_1 = (A_1, A_2, W)$, $V_2 = (B_1, B_2, W)$.

假设 $W \in \langle A_1, A_2, B_1, B_2 \rangle^{\perp}$. 当 $\langle A_1, A_2 \rangle^{\perp} \cap \langle B_1, B_2 \rangle = 0$ 时, 由 $\dim\langle A_i \rangle^{\perp} + \dim\langle B_1, B_2 \rangle = 2\nu - 1 + 2 > 2\nu$, $i = 1, 2$, 可知存在 $B_1', B_2' \in \langle B_1, B_2 \rangle$, 使得 $B_i' \in \langle A_i \rangle^{\perp}$. 由于 $V_2 = (B_1, B_2, W) = (B_1', B_2', W)$, 所以 $V_3 = (H_1, H_2, W)$, 其中 $H_1 = k_1A_1 + k_2A_2$, $H_2 = g_1B_1' + g_2B_2'$, $H_1^TKH_2 \neq 0$, 顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_1 = \frac{q^2-1}{q-1} \cdot \frac{q^2-q}{q-1} = q(q+1).$$

当 $\langle A_1, A_2 \rangle^{\perp} \cap \langle B_1, B_2 \rangle = \langle B_1' \rangle$, 其中 $B_1' \in \langle B_1, B_2 \rangle$ 时, 存在 $B_2' \in \langle B_1, B_2 \rangle$ 使得 $V_2 = (B_1, B_2, W) = (B_1', B_2', W)$, 所以 $V_3 = (H_1, H_2, W)$, 其中 $H_1 = k_1A_1 + k_2A_2$, $H_2 = g_1B_1' + g_2B_2'$, $H_1^TKH_2 \neq 0$. 于是可得顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_2 = \frac{q^2-q}{q-1} \cdot \frac{q^2-q}{q-1} = q^2.$$

当 $\langle B_1, B_2 \rangle \subseteq \langle A_1, A_2 \rangle^{\perp}$ 时, 则顶点 V_3 的个数为 $|V_3|_3 = 0$. 所以在这种情况下 V_1 和 V_2 的公共邻点的个数为

$$|V_3|_1 = q(q+1), \text{或} |V_3|_2 = q^2, \text{或} |V_3|_3 = 0.$$

假设 $W \notin \langle A_1, A_2 \rangle^{\perp}$, $W \in \langle B_1, B_2 \rangle^{\perp}$ 或 $W \in \langle A_1, A_2 \rangle^{\perp}$, $W \notin \langle B_1, B_2 \rangle^{\perp}$, 这两种情况得到的 V_3 的个数一致, 不妨在第一个条件下进行考虑, 则 $V_3 = (H_1, H_2, W)$, 其中 $H_1 = k_1A_1 + k_2A_2$, $H_2 = g_1B_1 + g_2B_2$. 当 $W^TKH_1 \neq 0$ 时, 顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_4 = \frac{q^2-q}{q-1} \cdot \frac{q^2-1}{q-1} = q(q+1);$$

当 $W^TKH_1 = 0$ 时, 如果 $H_1 \in \langle B_1, B_2 \rangle^{\perp}$, 顶点 V_3 的个数为 $|V_3|_5 = 0$; 如果 $H_1 \notin \langle B_1, B_2 \rangle^{\perp}$, 顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_6 = \frac{q-1}{q-1} \cdot \frac{q^2-q}{q-1} = q.$$

所以在这种情况下 V_1 和 V_2 的公共邻点的个数为

$$|V_3|_4 + |V_3|_5 = q(q+1), \text{或} |V_3|_4 + |V_3|_6 = q(q+2).$$

假设 $W \notin \langle A_1, A_2 \rangle^{\perp}$, $W \notin \langle B_1, B_2 \rangle^{\perp}$, 则 $V_3 = (H_1, H_2, W)$, 其中 $H_1 = k_1A_1 + k_2A_2$, $H_2 = g_1B_1 + g_2B_2$, 当 $W^TKH_1 \neq 0$ 或 $W^TKH_2 \neq 0$ 时, 顶点 V_3 的个数为

$$|V_3|_7 = \frac{q^2-1}{q-1} \cdot \frac{q^2-1}{q-1} - \frac{q-1}{q-1} \cdot \frac{q-1}{q-1} = q^2 + 2q.$$

当 $W^TKH_1 = 0$ 且 $W^TKH_2 = 0$ 时, 如果 $H_1^TKH_2 \neq 0$, 顶点 V_3 的个数为 $|V_3|_8 = 1$, 否则顶点 V_3 的个数为 $|V_3|_9 = 0$. 所以在这种情况下 V_1 和 V_2 的公共邻点的个数为

$$|V_3|_7 + |V_3|_8 = (q+1)^2, \text{或} |V_3|_7 + |V_3|_9 = q^2 + 2q.$$

定理 3.4 当 $\nu=3$ 时, 辛图 Γ 是一个 8-Deza 图, 其参数为

$$\left(\frac{q^2\left(q^2+1\right)\left(q^6-1\right)}{q-1}, q^2(q+1)(2q+1)+q^5+q-1, \Omega\right),$$

其中 $\Omega=\{(2q^2+1)(q+1)-2, 2q^2(q+1)-2, 2q^2(q+1)+q-2, (q+1)^2, q^2+2q, q^2+q, q^2, 0\}$.

证 将 $\nu=3$ 带入定理 3.3 中, 注意到 $\nu=3$ 时,

$$\frac{q^{2(\nu-1)}-1}{q-1}+(q+1)^2(q-1)-2=q^{2(\nu-2)}(q+1)+q^3+q^2-2=2q^2(q+1)-2$$

故当 $\nu=3$ 时, 辛图 Γ 是一个 8-Deza 图.

接下来我们考虑该辛图的其它性质包括直径, 团数和围长. 由于当 $\nu=2$ 时, 该图是一个完全图, 其性质是显然的, 所以下面我们考虑的都是在 $\nu\geq 3$ 的情形.

定理 3.5 辛图 Γ 的直径为 3.

证 由定理 3.3 可知, 非相邻顶点无公共邻接点的情况有以下几种:

情形 1: $V_1\cap V_2=0$. 此时可令 $V_1=(A_1,A_2,A_3)$, $V_2=(B_1,B_2,B_3)$, 其中 $A_1^TKA_2\neq 0$, $A_i^TKA_3=0$, $B_1^TKB_2\neq 0$, $B_i^TKB_3=0$, $i=1,2$. 于是存在 $V_3=(A_1,A_2,B_1)$, $V_4=(B_1,B_2,A_1)$, 使得 $V_1\sim V_3\sim V_4\sim V_2$.

情形 2: $V_1\cap V_2=\langle W\rangle$. 此时可令 $V_1=(A_1,A_2,W)$, $V_2=(B_1,B_2,W)$, 其中 $\langle B_1,B_2\rangle\subseteq\langle A_1,A_2\rangle^\perp$. 取 $V_3=(A_1,A_2+B_2,W)$, $V_4=(B_1,A_2+B_2,W)$, 易知 $V_1\sim V_3\sim V_4\sim V_2$.

综上可得该图的直径为 3.

定理 3.6 辛图 Γ 的团数为 $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

证 定理 3.3 已得任意两相邻顶点的公共邻点的所有可能情况, 所以当计算图的团时, 由于图的顶点传递性, 先固定两相邻的顶点, 再从其公共邻点中找能与该两点构成团的其它顶点. 记 C 为辛图 Γ 的团, $|C|$ 为团 C 中顶点的个数, V_1,V_2 为团 C 中固定的两相邻顶点, W 和 W' 为团 C 中异于 V_1,V_2 的不同顶点. 设辛图 Γ 的团数为 $\omega(\Gamma)$.

假设 $V_1=(W_1,W_2,A)$, $V_2=(W_1,W_2,B)$, 其中 $W_1^TKW_2\neq 0$, $A^TKB=0$. 如果对任意 W 都有 $\langle W_1,W_2\rangle\subseteq W$, 则团 C 中的点为 (W_1,W_2,X), 其中 $X\in F_q^{(2\nu)}-\langle W_1,W_2\rangle$, 从而 $|C|=\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

如果存在顶点 W 使得 $\langle W_1,W_2\rangle\not\subset W$, 不妨设 $W=(k_1W_1+k_2W_2,H_1,H_2)$, 其中 $H_1=A+g_1W_1+g_2W_2$, $H_2=B+h_1W_1+h_2W_2$, $k_1g_2\neq k_2g_1$ 或 $k_1h_2\neq k_2h_1$. 于是当 $W'=(W_1,W_2,X)$ 时, 其中 $X\in\langle A,B\rangle$, 可知其个数为 $\frac{q^2-1}{q-1}-2=q-1$.

当 W' 满足 $\langle W_1,W_2\rangle\not\subset W'$ 时, 由定理 3.3 的证明 (3) 可知其个数一定小于 $(q^2-1)(q+1)-1$, 又因为 $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}\geq((q^2-1)(q+1)-1)+1+(q-1)+2=q^2(q+1)$, 所以 $\omega(\Gamma)\leq\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

假设 $V_1=(W_1,W_2,A)$, $V_2=(W_1,W_2,B)$, 其中 $W_1^TKW_2\neq 0$, $A^TKB\neq 0$. 当 $\langle W_1,W_2\rangle\subseteq W$ 时, 类似可得 $|C|=\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$, 如果存在顶点 W 满足 $\langle W_1,W_2\rangle\subseteq W$, 则当 $W'=(W_1,W_2,X)$ 时, 其中 $X\in\langle A,B\rangle$, $W'\neq V_1,V_2$, 可知其个数为 $\frac{q^2-1}{q-1}-2=q-1$. 当 W' 满足 $\langle W_1,W_2\rangle\notin W'$ 时, 由定理 3.3 的证明 (3) 可知其个数一定小于 $(q^2-1)(q+1)+q+1-1$, 因为

$$\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}\geq((q^2-1)(q+1)+q+1-1)+1+(q-1)+2=(q^2+1)(q+1),$$

所以 $\omega(\Gamma) \le \frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

假设 $V_1 = (W_1, W_2, A)$, $V_2 = (W_1, W_2, B)$, 其中 $W_1^T K W_2 = 0$, $A, B \notin \langle W_1, W_2\rangle^{\perp}$, 且 $\begin{vmatrix} A^T K W_1 & A^T K W_2 \\ B^T K W_1 & B^T K W_2 \end{vmatrix} = 0$. 如果对任意 W 都有 $\langle W_1, W_2\rangle \subseteq W$. 则团 C 中的点形如 (W_1, W_2, X), 其中 $X \in F_q^{(2\nu)} - W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$, 于是 $|C| = \frac{q^{2\nu}-q^{2\nu-2}}{q^3-q^2} = q^{2\nu-4}(q+1)$. 显然有 $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1} \ge q^{2\nu-4}(q+1)$. 如果存在顶点 W 满足 $\langle W_1, W_2\rangle \notin W$, 类似地, 当 $W' = (W_1, W_2, X)$ 时, 其中 $X \in \langle A, B\rangle$, $X \notin \langle W_1, W_2\rangle^{\perp}$,$W' \ne V_1, V_2$, 可知其最多有 $q-1$ 种可能. 当 W' 满足 $\langle W_1, W_2\rangle \nsubseteq W'$ 时, 由定理 3.3 证明 (3) 可知 W' 的个数一定小于等于 q^2-q-1 或 q^3-1. 不妨考虑 W' 的个数小于等于 q^3-1, 则

$$\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1} \ge (q-1) + 2 + (q^3-1) + 1 = q^3 + q + 1,$$

所以 $\omega(\Gamma) \le \frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

假设 $V_1 = (W_1, W_2, A)$, $V_2 = (W_1, W_2, B)$, 其中 $W_1^T K W_2 = 0$, $A, B \notin \langle W_1, W_2\rangle^{\perp}$, 且 $\begin{vmatrix} A^T K W_1 & A^T K W_2 \\ B^T K W_1 & B^T K W_2 \end{vmatrix} \ne 0$. 当 $\langle W_1, W_2\rangle \subseteq W$ 时, 类似可得 $|C| = \frac{q^{2\nu}-q^{2\nu-2}}{q^3-q^2} = q^{2\nu-4}(q+1)$. 显然有 $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1} \ge q^{2\nu-4}(q+1)$. 如果存在顶点 W 使得 $\langle W_1, W_2\rangle \notin W$, 类似地, 当 $W' = (W_1, W_2, X)$ 时, 其中 $X \in \langle A, B\rangle$, $X \notin \langle W_1, W_2\rangle^{\perp}$, $W' \ne V_1, V_2$, 可知其个数最多为 $q-1$. 当 W' 满足 $\langle W_1, W_2\rangle \nsubseteq W'$ 时, 由定理 3.3 证明 (3) 可知其个数最多为 q^3+q^2-1. 则

$$\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1} \ge (q-1) + 2 + (q^3+q^2-1) + 1 = q^3 + q^2 + q + 1,$$

所以 $\omega(\Gamma) \le \frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

综上所述, 辛图 Γ 的团数为 $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$. 由定理 3.6 易得辛图 Γ 的围长, 即有如下结论.

推论 3.7 辛图 Γ 的围长为 3.

4 结语

在文献 [11] 中由二维非迷向子空间构造的辛图是一个 4-Deza 图, 而由三维非全迷向子空间构造的辛图经上面的计算得到, 当 $\nu = 2$ 时是一个完全图 K_{q+1,q^2+1}, 当 $\nu = 3$ 时是一个 8-Deza 图, 当 $\nu \ge 4$ 时是一个 9-Deza 图, 由此说明将辛图的定义中的顶点由低维向高维子空间进行深化研究是可行的, 同时也体现了尽管它们均具有良好的顶点传递性, 但参数却相对复杂得多.

参 考 文 献

[1] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer-Verlag Inc., 2001.

[2] Tang Zhongming, Wan Zhexian. Symplectic graphs and their automorphisms[J]. European Journal of Combinatorics, 2006, 27(1): 38–50.

[3] Rotman J J. Projective planes, graphs, and simple algebras[J]. Journal of Algebra, 1993, 155(2): 267–289.

[4] Gu Zhenhua. Subconstituents of symplectic graphs modulo p^n[J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439(5): 1321–1329.

[5] Gu Zhenhua, Wan Zhexian. Automorphisms of Subconstituents of symplectic Graphs[J]. Algebra Colloquium, 2013, 20(2): 333–342.

[6] Yotsanan, Meemark, Thammanoon, et al. Symplectic graphs over finite commutative rings[J]. European Journal of Combinatorics, 2014, 41: 298–307.

[7] Sirisuk S M Y. Generalized symplectic graphs and generalized orthogonal graphs over finite commutative rings[J]. Linear & Multilinear Algebra: An International Journal Publishing Articles, Reviews and Problems, 2019, 67(12): 2427–2450.

[8] Li Fenggao, Wang Yangxian. Subconstituents of symplectic graphs[J]. European Journal of Combinatorics, 2008, 29(5): 1092–1103.

[9] Li Fenggao, Wang Kaishun, Guo Jun. More on symplectic graphs modulo p^n[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2013(6): 2651–2660.

[10] Li Fenggao, Wang Kaishun, Guo Jun. Symplectic graphs modulo pq[J]. Discrete Mathematics, 2013, 313(5): 650–655.

[11] Su Leilei, Nan Jizhu, Wei Yangjiang. Construction of symplectic graphs by using 2-dimensional symplectic non-isotropic subspaces over finite fields[J]. Discrete Mathematics, 2020, 343(4): 111689.

[12] Wan Zhexian. Geometry of classical groups over finite fields, second ed[M]. Beijing/New York: Science press, 2002.

THE SYMPLECTIC GRAPH CONSTRUCTED BY 3-DIMENSIONAL SYMPLECTIC NON-TOTALLY ISOTROPIC SUBSPACES OVER FINITE FIELDS

HUO Li-jun, WU Yang

(*College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China*)

Abstract: In this paper, we construct a kind of symplectic graph denoted by Γ with the vertex set consisting of 3-dimensional non-totally isotropic subspaces in the 2ν-dimensional symplectic space $F_q^{(2\nu)}$ defined over the finite field F_q. Two vertices V_1 and V_2 of Γ are adjacent if and only if $V_1 \cap V_2$ is a 2-dimensional subspace of $F_q^{(2\nu)}$. We investigate the basic properties of this graph and compute its parameters. We obtain that when $\nu = 2$, the graph is a complete graph $K_{(q+1)(q^2+1)}$; when $\nu = 3$, it is an 8-Deza graph; and when $\nu \geq 4$, it is a 9-Deza graph. Furthermore, it is shown that the diameter and girth of the graph are both 3 when $\nu \geq 3$, and the clique number is $\frac{q^{2\nu-2}-1}{q-1}$.

Keywords: finite field; non-totally isotropic subspace; symplectic graph; d-Deza graph

2010 MR Subject Classification: 05E30.