

## Sylvester 连分数展式中若干例外集的 Hausdorff 维数

廖旭

(重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:** 对于任意实数  $x \in (0, 1]$ , 记  $x = [d_1, d_2, \dots]$  为  $x$  的 Sylvester 连分数展式, 令  $\psi(n)$  为  $\mathbb{N}$  上的正函数, 本文研究了集合  $A(\psi)$ :

$$A(\psi) = \{x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = 1\}$$

的 Hausdorff 维数. 通过构造覆盖和合适的 Cantor 型子集, 我们得到了该集合的精确维数为

$$\dim_H A(\psi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(1) + \psi(2) + \dots + \psi(n)}{\psi(n+1)}.$$

同时, 本文还考虑了 Sylvester 连分数展式的部分商满足  $\frac{\log d_n(x)}{\psi(n)}$  的极限是零或无穷时的集合的 Hausdorff 维数.

**关键词:** Sylvester 连分数; Hausdorff 维数; 增长速度

MR(2010) 主题分类号: 11K55; 28A80

中图分类号: O156.7

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2024)04-0343-15

### 1 引言

在最近一些年, 各种各样的连分数展式被赋予了极大的研究兴趣. 例如正规连分数展式<sup>[1]</sup>、向后连分数展式<sup>[2]</sup>、偶数连分数展式<sup>[3]</sup>、Engel 连分数展式、 $\alpha$ -连分数展式<sup>[4]</sup>等. 关于正规连分数展式, 在文献 [5],[6],[7],[8] 中, 他们讨论其部分商的增长速度并刻画相关例外集的 Hausdorff 维数. L.L.Fang 和 M. Wu<sup>[9]</sup>, T. Zhong 和 L. Tang<sup>[10]</sup> 讨论了 Engel 连分数展式中部分商的增长速度以及相关例外集的 Hausdorff 维数. 更多连分数的相关信息, 可参见文献 [11].

A.H.Fan, B.W.Wang 和 J.Wu 于 2007 年在文献 [12] 中引入了一种新的连分数展式. 对于任意一个  $x \in (0, 1]$ , 定义算法:

$$x_1 = x; d_j = \left\lfloor \frac{1}{x_j} \right\rfloor; x_{j+1} = \frac{1}{d_j(d_j - 1) + 1} \left( \frac{1}{x_j} - d_j \right). \quad (1.1)$$

\*收稿日期: 2023-07-17

接收日期: 2024-01-02

基金项目: 重庆市教育委员会科学技术研究项目资助 (KJQN202100528); 重庆市自然科学基金资助 (CSTB2022NSCQ-MSX1255).

作者简介: 廖旭 (1999-), 女, 重庆, 研究生, 主要研究方向: 分形几何. E-mail: Xu\_Liao@yeah.net

这个算法可以诱导出  $x \in (0, 1]$  的一个无穷级数展式:

$$x = \frac{1}{d_1(x) + \frac{1}{d_2(x) + \frac{1}{d_3(x) + \frac{1}{d_4(x) + \frac{1}{d_5(x) + \frac{1}{d_6(x) + \frac{1}{d_7(x) + \frac{1}{d_8(x) + \frac{1}{d_9(x) + \frac{1}{d_{10}(x) + \dots}}}}}}}}}}}}}. \quad (1.2)$$

该展式称为  $x$  的 Sylvester 连分数展式, 并将  $x$  的 Sylvester 连分数展式简记为  $x = [d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)]$ . 其中  $\{d_j(x)\}_{j \geq 1}$  称为其 Sylvester 连分数展式的部分商. 由上述算法可得,

$$d_n(x) \in \mathbb{N}, d_{j+1} \geq d_j(d_j - 1) + 1, j \geq 1. \quad (1.3)$$

在文献 [12] 中, A.H.Fan, B.W.Wang 和 J.Wu 研究了 Sylvester 部分商序列  $\{d_j(x)\}_{j \geq 1}$  的算术性质和度量性质, 包括弱大数定律、强大数定律以及中心极限定理等. 他们证明了如下引理.

**引理 1.1** [12] 对 Lebesgue 测度意义下几乎所有的  $x \in (0, 1]$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{b_{n+1}(x)}{b_1(x)b_2(x)\cdots b_n(x)} \right)^{1/n} = e$ . 在文献 [13] 中, Z.L.Zhang 研究了该极限的例外集, 即

$$E(\alpha) = \left\{ x \in (0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{d_{n+1}(x)}{d_1(x)d_2(x)\cdots d_n(x)} \right)^{\frac{1}{n}} = \alpha \right\},$$

并证明了该集合  $E(\alpha)$  的 Hausdorff 维数为 1.

对于 Sylvester 部分商的增长速度, 他们证明了以下引理.

**引理 1.2** [12] 对 Lebesgue 测度意义下几乎所有的  $x \in (0, 1]$  都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log d_n(x) = \lambda_0(x).$$

这里的  $\lambda_0(x) = \frac{1}{2} \left\{ \log d_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \log \frac{d_{n+1}(x)}{d_n(x)} \right\}$  是一个与  $x$  有关的常数.

在此基础之上, 考虑  $x$  的 Sylvester 连分数展式部分商的增长速度的刻画. 令  $\psi(n)$  是给定的  $\mathbb{N}$  上的正函数, 并考虑集合:

$$A(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = 1 \right\}.$$

两个定义在  $\mathbb{N}$  上的正函数  $\psi(n)$  与  $\bar{\psi}(n)$  称为是等价的, 如果  $n \rightarrow \infty$  时, 有  $\frac{\bar{\psi}(n)}{\psi(n)} \rightarrow 1$ . 为方便, 记 Sylvester 连分数展式部分商全是 1 的点为  $e_0 = [1, 1, 1, \dots]$ . 计算的主要结果如下

**定理 1.1** 令  $\psi(n)$  为定义在  $\mathbb{N}$  上的正函数, 则  $A(\psi) \setminus \{e_0\}$  是非空的当且仅当函数  $\psi$  等价于一个函数  $\bar{\psi}$  且函数  $\bar{\psi}$  满足: 存在一个  $n_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $\left[ e^{\bar{\psi}(n_0)} \right] > e$ , 当  $n \geq n_0$  时, 有  $\left[ e^{\bar{\psi}(n+1)} \right] \geq \left[ e^{\bar{\psi}(n)} \right] \left( \left[ e^{\bar{\psi}(n)} \right] - 1 \right) + 1$ , 这时有

$$\dim_H A(\psi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(n)}{\psi(n+1)}.$$

由定理 1.1 的结果可以得到两个推论.

**推论 1.2** 当  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} < 2$  时, 集合  $A(\psi) \setminus \{e_0\} = \emptyset$ . 当  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} > 2$  时, 集合  $A(\psi) \setminus \{e_0\} \neq \emptyset$ .

**推论 1.3** 令  $\psi$  为定义在  $\mathbb{N}$  上的正函数, 且满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = b \in [2, +\infty]$  和  $A(\psi) \setminus \{e_0\} \neq \emptyset$ . 则有  $\dim_H A(\psi) = \frac{1}{b-1}$ . 与此同时, 考虑 Sylvester 展式部分商的增长速度是给定函数高阶无穷大和高阶无穷小的特殊情况, 即集合:

$$A^*(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = \infty \right\}$$

和

$$A_*(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = 0 \right\}.$$

对此, 可以得到以下结果.

**定理 1.4** 令  $\psi(n)$  为定义在  $\mathbb{N}$  上的正函数且满足  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \psi(n)}{n} = \log B \in [0, +\infty]$  则  $\dim_H A^*(\psi) = \min \left\{ 1, \frac{1}{B-1} \right\}$ .

**定理 1.5** 令  $\psi(n)$  为定义在  $\mathbb{N}$  上的正函数且满足  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n)}{2^n} = C \in [0, +\infty]$  则  $A_*(\psi)$  的维数为:

(1) 若  $0 \leq C < \infty$ , 则  $\dim_H A_*(\psi) = 0$ .

(2) 若  $C = \infty$ , 则  $\dim_H A_*(\psi) = 1$ .

## 2 预备知识

在这一节中罗列了一些 Sylvester 连分数展式的基本性质和相关结论. 记  $x$  的 Sylvester 连分数展式的  $n$  阶收敛因子为:

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \frac{1}{d_1(x) + \frac{1}{d_2(x) + \frac{1}{d_3(x) + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{d_{n-1}(x) + \frac{1}{d_n(x)}}}}} := [d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x)],$$

则有以下命题.

**命题 2.1** <sup>[12]</sup> 对任意的  $x \in (0, 1]$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x$ .

**命题 2.2** <sup>[12]</sup> 在  $p_0(x) = 0, q_0(x) = 1; p_1(x) = 1; q_1(x) = d_1(x)$  的基础之上, 有:

$$p_n(x) = d_n(x) p_{n-1}(x) + (d_{n-1}(x) (d_{n-1}(x) - 1) + 1) p_{n-2}(x), \quad n \geq 2; \quad (2.1)$$

$$q_n(x) = d_n(x) q_{n-1}(x) + (d_{n-1}(x) (d_{n-1}(x) - 1) + 1) q_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \quad (2.2)$$

对此进行进一步的推导可得:

$$p_n(x) q_{n-1}(x) - p_{n-1}(x) q_n(x) = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (d_j(x) (d_j(x) - 1) + 1). \quad (2.3)$$

$$q_n^2 < q_n (q_n + q_{n-1}) < 2q_n^2 \quad d_1 d_2 \cdots d_n \leq q_n \leq 2^n d_1 d_2 \cdots d_n. \quad (2.4)$$

**定义 2.3** <sup>[12]</sup> 一个正整数向量  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  称为 Sylvester 连分数展式可允许的, 如果存在一个  $x \in (0, 1]$ , 使得对  $1 \leq j \leq n$  都有  $d_j(x) = d_j$ . 一个正整数序列  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$  称为 Sylvester 连分数展式可允许的, 如果存在一个  $x \in (0, 1]$ , 使得对  $j \geq 1$  都有  $d_j(x) = d_j$ .

**命题 2.4** <sup>[12]</sup> 一个正整数序列  $(d_1, d_2, \dots, d_n, \dots)$  是 Sylvester 连分数展式可允许, 当且仅当对所有的  $j \geq 1$ , 有  $d_n \in \mathbb{N}$ ,  $d_{j+1} \geq d_j(d_j - 1) + 1$ .

记所有长度为  $n$  的 Sylvester 连分数展式可允许序列的集合为

$$\Sigma_n = \{(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n : d_n \in \mathbb{N}, d_{j+1} \geq d_j(d_j - 1) + 1, 1 \leq j \leq n-1\}.$$

对  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \Sigma_n$ , 记

$$I(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n := \{x \in (0, 1] : d_1(x) = d_1, d_2(x) = d_2, \dots, d_n(x) = d_n\},$$

将其称为  $n$  阶柱集, 关于该柱集的长度有如下结论.

**命题 2.5** <sup>[12]</sup> 对  $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \Sigma_n$ ,

$$|I(d_1, d_2, \dots, d_n)| = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (d_j(x)(d_j(x) - 1) + 1)}{q_n(q_n + q_{n-1})}.$$

**引理 2.6** <sup>[14]</sup> 令  $\mu$  为一个测度,  $E \subset (0, 1]$  为一个 Borel 集且  $\mu(E) > 0$ . 若对任意的  $x \in E$ , 有  $\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq s$ , 其中  $B(x, r)$  表示一个以  $x$  为中心,  $r$  为半径的开球, 则可得  $\dim_H E \geq s$ .

**引理 2.7** 对  $N \geq 0$ , 令

$$A(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = 1 \right\}$$

且

$$A_N(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n + N)} = 1 \right\}.$$

若  $A(\psi) \setminus \{e_o\} \neq \emptyset$  且  $A_N(\psi) \setminus \{e_o\} \neq \emptyset$ , 则可得:

$$\dim_H A(\psi) = \dim_H A_N(\psi).$$

**证** 记  $A(\psi) = \bigcup_{(d_1, d_2, \dots, d_N) \in \Sigma_n} A_{(d_1, d_2, \dots, d_N)}(\psi)$  其中  $A_{(d_1, d_2, \dots, d_N)}(\psi) = I(d_1, d_2, \dots, d_N) \cap A(\psi)$  结合  $(d_1, d_2, \dots, d_N) \in \Sigma_n$ , 由算法 (1.1) 可知, 在  $A_{(d_1, d_2, \dots, d_N)}(\psi)$  和  $A_N(\psi)$  之间存在一个双 bi-Lipschitz 对应. 因此

$$\dim_H A_{(d_1, d_2, \dots, d_N)}(\psi) = \dim_H A_N(\psi).$$

进而可得

$$\dim_H A(\psi) = \sup_{(d_1, d_2, \dots, d_N) \in \Sigma_N} \dim_H A_{(d_1, d_2, \dots, d_N)}(\psi) = \dim_H A_N(\psi).$$

### 3 定理 1.1 的证明

#### 3.1 一些准备引理

在证明该定理之前, 需要先证明一些在后续证明过程中需要的引理.

**引理 3.1**  $A(\psi) \setminus \{e_0\}$  是非空的当且仅当函数  $\psi$  等价于一个函数  $\bar{\psi}$  且函数  $\bar{\psi}$  满足: 存在一个  $n_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $[e^{\bar{\psi}(n_0)}] > e$ , 当  $n \geq n_0$  时, 有  $[e^{\bar{\psi}(n+1)}] \geq [e^{\bar{\psi}(n)}] \left( [e^{\bar{\psi}(n)}] - 1 \right) + 1$ .

**证** 必要性: 由  $A(\psi) \setminus \{e_0\} \neq \emptyset$  可知, 存在  $x_0 \in A(\psi) \setminus \{e_0\} \subset (0, 1)$ , 由  $e_0$  的定义, 存在一个  $n_0 \in \mathbb{N}$ , 当  $n \geq n_0$  时有  $d_{n_0}(x_0) \geq 3$ . 令:

$$\bar{\psi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{若 } n < n_0, \\ \log d_n(x_0) & \text{若 } n \geq n_0. \end{cases}$$

由算式 (1.3), 可以得到  $[e^{\bar{\psi}(n_0)}] = d_{n_0}(x_0)$  且

$$[e^{\bar{\psi}(n+1)}] = d_{n+1}(x_0) \geq d_n(x_0)(d_n(x_0) - 1) + 1 = [e^{\bar{\psi}(n)}] \left( [e^{\bar{\psi}(n)}] - 1 \right) + 1.$$

显然  $\psi$  与  $\bar{\psi}$  是等价的.

充分性: 若  $\bar{\psi}$  等价于  $\psi$ , 且存在某一  $n_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $[e^{\bar{\psi}(n_0)}] > e$  以及当  $n > n_0$ , 有  $[e^{\bar{\psi}(n+1)}] \geq [e^{\bar{\psi}(n)}] \left( [e^{\bar{\psi}(n)}] - 1 \right) + 1$ . 令:

$$d_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{若 } n < n_0, \\ [e^{\bar{\psi}(n)}] & \text{若 } n \geq n_0. \end{cases}$$

则  $x \in A(\bar{\psi}) \setminus \{e_0\} = A(\psi) \setminus \{e_0\}$ .

注意, 若  $\psi$  与  $\bar{\psi}$  等价, 则  $A(\psi) \setminus \{e_0\}$  意味着  $A(\bar{\psi}) \setminus \{e_0\}$ , 因此在证明定理 1.1 时不妨假设存在一个  $n_0 \in \mathbb{N}$ , 使得  $[e^{\psi(n_0)}] > e$  且当  $n > n_0$ , 有  $[e^{\psi(n+1)}] \geq [e^{\psi(n)}] \left( [e^{\psi(n)}] - 1 \right) + 1$ .

**引理 3.2** 令正实数列  $\{u_n\}_{n \geq 1}$  与  $\{v_n\}_{n \geq 1}$  满足: 对任意的  $n \geq 1$ , 有  $u_n \geq 2$ ,  $u_n + 2 < v_n u_n$ ,  $u_{n+1} \geq v_n u_n (v_n u_n - 1) + 1$ , 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \prod_{j=1}^n (v_j - 1)}{\log u_n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log v_n}{u_n} = 0. \quad (3.1)$$

令  $F = \{x \in (0, 1) : u_n \leq d_n(x) < v_n u_n, n \geq 1\}$ , 则

$$\dim_H F = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(u_1 u_2 \cdots u_n)}{\log u_{n+1}}.$$

**证** 令  $s_0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(u_1 u_2 \cdots u_n)}{\log u_{n+1}}$ .

首先证明  $\dim_H F \geq s_0$ .

由已知, 对任意的  $n \geq 1$ , 有  $u_n \geq 2$ ,  $u_n + 2 < v_n u_n$ ,  $u_{n+1} \geq v_n u_n (v_n u_n - 1) + 1$ , 故可得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{3n}}{\log u_n} = 0$ . 由定义可得:

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{[u_k] \leq d_k(x) < [v_k u_k] - 1, 1 \leq k \leq n} I^*(d_1, d_2, \cdots, d_n),$$

这里的  $\lceil \cdot \rceil$  表示不小于该数的最小整数,  $I^*(d_1, d_2, \dots, d_n) = Cl(I(d_1, d_2, \dots, d_n))$  称为一个  $n$  阶基本区间, 其中  $Cl$  表示其闭包. 对任意的  $n \geq 1$  和  $\lceil u_k \rceil \leq d_k(x) \leq \lceil v_k u_k \rceil - 1$  ( $1 \leq k \leq n$ ), 由算式 (2.4) 和命题 2.5, 可得

$$|I^*(d_1, d_2, \dots, d_n)| = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (d_j(x)(d_j(x) - 1) + 1)}{q_n(q_n + q_{n-1})} \geq \frac{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{d_{n-1}}{2}\right)^2}{2q_n^2} \geq \frac{d_1^2 \dots d_{n-1}^2}{2^n q_n^2} \geq \frac{1}{2^{3n} v_n^2 u_n^2}$$

和

$$|I^*(d_1, d_2, \dots, d_n)| = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (d_j(x)(d_j(x) - 1) + 1)}{q_n(q_n + q_{n-1})} \leq \frac{d_1^2 \dots d_{n-1}^2}{q_n^2} \leq \frac{1}{d_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2},$$

即

$$\frac{1}{2^{3n} v_n^2 u_n^2} \leq |I^*(d_1, d_2, \dots, d_n)| \leq \frac{1}{u_n^2}. \quad (3.2)$$

取  $s < s_0$ . 由算式 (3.1), 存在一个  $n_0$  使得对所有的  $n \geq n_0$  有

$$\frac{u_1 u_2 \dots u_n \prod_{j=1}^n (v_j - 1)}{2^{3n}} \geq \left(\frac{v_{n+1}^2 u_{n+1}}{v_{n+1} - 1}\right)^s. \quad (3.3)$$

定义一个支撑在  $F$  上的质量分布  $\mu$  使得对任意的  $n \geq 1, \lceil u_j \rceil \leq d_j(x) \leq \lceil v_j u_j \rceil - 1$  ( $1 \leq j \leq n$ ), 有

$$\mu(I^*(d_1, d_2, \dots, d_n)) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\lceil v_j u_j \rceil - \lceil u_j \rceil}.$$

显然,

$$\frac{1}{2^n u_1 u_2 \dots u_n \prod_{j=1}^n (v_j - 1)} \leq \mu(I^*(d_1, d_2, \dots, d_n)) \leq \frac{2^n}{u_1 u_2 \dots u_n \prod_{j=1}^n (v_j - 1)}. \quad (3.4)$$

对任意的  $x \in F$ , 都存在一个数列  $\{d_n\}_{n \geq 1}$ , 其满足当  $n \geq 1$  时, 有  $\lceil u_n \rceil \leq d_n(x) \leq \lceil v_n u_n \rceil$ , 使得对所有的  $n$ , 有  $x \in I^*(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

令  $r_0 = \frac{1}{2^{3n_0} v_{n_0}^2 u_{n_0}^2}$ , 对任意的  $r < r_0$ , 存在一个  $n \geq n_0$  使得

$$\frac{1}{2^{3(n+1)} v_{n+1}^2 u_{n+1}^2} \leq r < \frac{1}{2^{3n} v_n^2 u_n^2}. \quad (3.5)$$

由算式 (3.2)–(3.5), 开球  $B(x, r)$  可能与最多两个  $n$  阶基本区间相交, 或者可能与最多

$2^{3(n+1)+1}rv_{n+1}^2u_{n+1}^2$  个  $n+1$  阶基本区间相交. 综上, 可以得到

$$\begin{aligned} \mu(B(x, r)) &\leq \min\left\{2 \prod_{j=1}^n \frac{1}{\lceil v_j u_j \rceil - \lceil u_j \rceil}, 2r2^{3(n+1)}v_{n+1}^2u_{n+1}^2 \prod_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\lceil v_j u_j \rceil - \lceil u_j \rceil}\right\} \\ &= \prod_{j=1}^n \frac{1}{\lceil v_j u_j \rceil - \lceil u_j \rceil} \min\left\{2, 2r2^{3(n+1)}v_{n+1}^2u_{n+1}^2 \frac{1}{\lceil v_{n+1}u_{n+1} \rceil - \lceil u_{n+1} \rceil}\right\} \\ &\leq \frac{2^{3n}}{u_1u_2 \cdots u_n \prod_{j=1}^n (v_j - 1)} 2^{1-s} \left(2r2^3v_{n+1}^2u_{n+1}^2 \frac{2}{(v_{n+1} - 1)u_{n+1}}\right)^s \\ &\leq 64r^s. \end{aligned}$$

由命题 2.6, 可得  $\dim_H F \geq s$ . 由  $s < s_0$  的任意性, 可知  $\dim_H F \geq s_0$ .

下面证明  $\dim_H F \leq s_0$ .

结合  $s > s_0$ . 由算式 (3.1) 和  $s_0$  的定义可知, 存在一个无穷数列  $\{n_l : l \geq 1\} \subset \mathbb{N}$ , 满足: 对任意的  $l \geq 1$ , 有

$$u_1u_2 \cdots u_{n_l} \leq \left(\frac{u_{n_l+1}}{2}\right)^{\frac{s+s_0}{2}}, 2^{n_l} \prod_{k=1}^{n_l} (v_k - 1) \leq \left(\frac{u_{n_l+1}}{2}\right)^{\frac{s-s_0}{2}}. \quad (3.6)$$

记集合  $F$  为

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{u_k \leq d_k \leq \lceil v_k u_k \rceil - 1, 1 \leq k \leq n}} J(d_1, d_2, \dots, d_n), \quad (3.7)$$

其中

$$J(d_1, d_2, \dots, d_n) = \bigcup_{d_{n+1} = \lceil u_{n+1} \rceil}^{\lceil v_{n+1}u_{n+1} \rceil - 1} I^*(d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1}).$$

由命题 2.5, 可得

$$\begin{aligned} |J(d_1, d_2, \dots, d_n)| &= \sum_{d_{n+1} \geq u_{n+1}} |I_{n+1}(d_1, \dots, d_n, d_{n+1})| \\ &= \sum_{d_{n+1} \geq u_{n+1}} \frac{\prod_{j=1}^n (d_j (d_j - 1) + 1)}{q_{n+1} (q_{n+1} + q_n)} \\ &\leq \sum_{d_{n+1} \geq u_{n+1}} \frac{\prod_{j=1}^n d_j^2}{(d_1 d_2 \cdots d_{n+1})^2} \leq \sum_{d_{n+1} \geq u_{n+1}} \frac{1}{d_{n+1}^2} \leq \frac{2}{u_{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

结合算式 (3.6), (3.7) 和 (3.8), 集合  $F$  的  $s$  维 Hausdorff 测度满足

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(F) &\leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\lceil u_k \rceil \leq d_k \leq \lceil v_k u_k \rceil - 1, 1 \leq k \leq n_l}} |J(d_1, d_2, \dots, d_{n_l})|^s \\ &\leq \liminf_{l \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\lceil u_k \rceil \leq d_k \leq \lceil v_k u_k \rceil - 1, 1 \leq k \leq n_l}} \frac{2^s}{(u_{n_l+1})^s} \\ &= 2^s \liminf_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{(u_{n_l+1})^s} \prod_{k=1}^{n_l} (\lceil v_k u_k \rceil - \lceil u_k \rceil) \\ &\leq 2^s \liminf_{l \rightarrow \infty} \frac{u_1 u_2 \cdots u_{n_l} 2^{n_l} \prod_{k=1}^{n_l} (v_k - 1)}{(u_{n_l+1})^s} \\ &\leq 2^s \left(\frac{u_{n_l+1}}{2}\right)^{\frac{s+s_0}{2}} \left(\frac{u_{n_l+1}}{2}\right)^{\frac{s-s_0}{2}} (u_{n_l+1})^{-s} \\ &\leq 2^s \frac{1}{2^s} = 1. \end{aligned}$$

即  $\dim_H F \leq s_0$ .

**引理 3.3** 对于  $\beta \geq 1, c \geq 0$  以及  $b \geq 0$ , 令

$$\bar{C}(c, b, \beta) = \left\{ x \in (0, 1] : d_{n+1}(x) \geq c^n (d_1(x) d_2(x) \cdots d_n(x))^\beta + b, n \in \mathbb{N} \right\}$$

和

$$C(c, b, \beta) = \left\{ x \in (0, 1] : d_{n+1}(x) \geq c^n (d_1(x) d_2(x) \cdots d_n(x))^\beta + b \text{ 对无穷多个 } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

则有

$$\dim_H \bar{C}(c, b, \beta) = \dim_H C(c, b, \beta) = \frac{1}{\beta}.$$

**证** 首先证明  $\dim_H C(c, b, \beta) \leq \frac{1}{\beta}$ .

令  $m^*(x) = \min\{n \geq 1 : d_n(x) \neq 1\}$ , 且  $\Delta_N = \{x \in (0, 1) : m^*(x) = N\}$ . 可知

$$C(c, b, \beta) = \bigcup_{N=1}^{\infty} (C(c, b, \beta) \cap \Delta_N).$$

由 Hausdorff 维数的可列稳定性, 只需证明对任意的  $N \geq 1$ ,  $\dim_H (C(c, b, \beta) \cap \Delta_N) \leq \frac{1}{\beta}$ . 由定义, 可得

$$C(c, b, \beta) \cap \Delta_N \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \bigcup_{(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \Sigma_n} J(d_1, d_2, \dots, d_n) \cap \Delta_N,$$

其中

$$J(d_1, d_2, \dots, d_n) = \bigcup_{d_{n+1} \geq \lceil c^n (d_1 d_2 \cdots d_n)^\beta + b \rceil} I(d_1, d_2, \dots, d_{n+1}).$$

因此, 通过算式 (2.4), 可推导出:

$$\begin{aligned}
 |J(d_1, d_2, \dots, d_n)| &= \sum_{d_{n+1} \geq \lfloor c^n (d_1 d_2 \cdots d_n)^{\beta+b} \rfloor} \frac{\prod_{j=1}^n (d_j(x) (d_j(x) - 1) + 1)}{q_{n+1} (q_{n+1} + q_n)} \\
 &\leq \sum_{d_{n+1} \geq \lfloor c^n (d_1 d_2 \cdots d_n)^{\beta+b} \rfloor} \frac{d_1^2 \cdots d_n^2}{q_{n+1}^2} \\
 &\leq \sum_{d_{n+1} \geq \lfloor c^n (d_1 d_2 \cdots d_n)^{\beta+b} \rfloor} \frac{d_1^2 \cdots d_n^2}{d_1^2 \cdots d_{n+1}^2} \\
 &\leq \sum_{d_{n+1} \geq \lfloor c^n (d_1 d_2 \cdots d_n)^{\beta+b} \rfloor} \frac{1}{d_{n+1}^2} \\
 &\leq \frac{2}{c^n (d_1 d_2 \cdots d_n)^\beta}.
 \end{aligned}$$

取  $s > \frac{1}{\beta}$ , 当  $n$  充分大时, 令  $\Sigma_{n,N} = \{(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \Sigma_n : 1 = d_1 = \cdots = d_{N-1} < d_N\}$ , 则

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{H}^s(C(c, b, \beta) \cap \Delta_N) \\
 &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \Sigma_{n,N}} |J(d_1, d_2, \dots, d_n)|^s \\
 &\leq 2^s \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \Sigma_{n,N}} \frac{1}{c^{ns} (d_1 d_2 \cdots d_n)^{\beta s}} \\
 &\leq 2^s \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{1=d_1=\cdots=d_{N-1}<d_N<\cdots<d_n} \frac{1}{(d_1 d_2 \cdots d_n)^{\beta s}} \frac{1}{c^{ns}} \\
 &\leq 2^s \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=m}^{\infty} \left( \frac{1}{(n-N)! (\beta s - 1)^{n-N}} + \frac{1}{(n-N-1)! (\beta s - 1)^{n-N-1}} \right) \frac{1}{c^{ns}} = 0.
 \end{aligned}$$

因此,

$$\dim_H C(c, b, \beta) \leq \frac{1}{\beta}.$$

其中, 在计算得到: 当  $\alpha > 1$  时, 有  $\sum_{1=d_1=\cdots=d_{N-1}<d_N<\cdots<d_n} \frac{1}{(d_1 d_2 \cdots d_n)^{\beta s}} = \frac{1}{(n-N)! (\beta s - 1)^{n-N}} + \frac{1}{(n-N-1)! (\beta s - 1)^{n-N-1}}$  的过程中, 使用了一个已知的结论:  $\sum_{d+1}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} \leq \int_d^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{d^{\alpha-1}}$ .

由于  $\bar{C}(c, b, \beta) \subset C(c, b, \beta)$ , 故下面只需证明  $\dim_H \bar{C}(c, b, \beta) \geq \frac{1}{\beta}$  成立.

选择一个足够大的  $n_0 \in \mathbb{N}$  使得对于每一个  $n \geq n_0$ , 都有:

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{(\beta+1)^n}}{n+1} &\geq 2, \quad \frac{e^{(\beta+1)^{n+1}}}{n+2} \geq c \left( \frac{e^{(\beta+1)^n}}{n} \right)^{\beta+1} + b, \\
 \frac{e^{(\beta+1)^{n+1}}}{n+2} &\geq \frac{e^{(\beta+1)^n}}{n} \left( \frac{e^{(\beta+1)^n}}{n} - 1 \right) + 1, \quad \frac{e^{(\beta+1)^n}}{n+1} + 2 < \frac{e^{(\beta+1)^n}}{n},
 \end{aligned}$$

并定义

$$F = \left\{ x \in (0, 1] : \frac{e^{(\beta+1)^{n+n_0}}}{n+n_0+1} \leq d_n(x) < \frac{n+n_0+1}{n+n_0} \frac{e^{(\beta+1)^{n+n_0}}}{n+n_0+1}, n \geq 1 \right\},$$

则

$$F \subset \{x \in (0, 1] : d_{n+1}(x) \geq cd_n(x)^{\beta+1} + b, n \geq 1\} \subset \bar{C}(c, b, \beta).$$

通过引理 3.2, 可得  $\dim_H \bar{C}(c, b, \beta) \geq \dim_H F = \frac{1}{\beta}$ .

### 3.2 定理 1.1 的下界证明

因为存在  $n_0 \in \mathbf{N}$ , 使得  $[e^{\bar{\psi}(n_0)}] > e$  且当  $n > n_0$ , 有  $[e^{\bar{\psi}(n+1)}] \geq [e^{\bar{\psi}(n)}] \left( [e^{\bar{\psi}(n)}] - 1 \right) + 1$ . 取  $N > n_0$  满足:  $n \geq N$  时, 有

$$\frac{e^{\psi(n)}}{n+1} \geq 2, \frac{e^{\psi(n)}}{n+1} + 2 < \frac{e^{\psi(n)}}{n}; \frac{e^{\psi(n+1)}}{n+2} \geq \frac{e^{\psi(n)}}{n} \left( \frac{e^{\psi(n)}}{n} - 1 \right) + 1.$$

对  $n \geq 1$ , 令

$$u_n = \frac{e^{\psi(n+N)}}{n+N+1}; v_n = \frac{n+N+1}{n+N},$$

取

$$A' = \{x \in (0, 1] : u_n \leq d_n(x) < v_n u_n, n \geq 1\}.$$

显然  $A'$  符合引理 3.2 的条件, 且有

$$A' \subset A_N(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n+N)} = 1 \right\}.$$

由引理 3.1, 可以得到  $A(\psi) \setminus \{e_0\} \neq \emptyset$  和  $A_N(\psi) \setminus \{e_0\} \neq \emptyset$ . 结合引理 2.7 和引理 3.2, 可得

$$\begin{aligned} \dim_H A(\psi) &= \dim_H A_N(\psi) \geq \dim_H A' \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(u_1 u_2 \cdots u_n)}{\log u_{n+1}} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(n)}{\psi(n+1)}. \end{aligned}$$

### 3.3 定理 1.1 的上界证明

令

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n+1)}{\psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(n)}.$$

因为  $A(\psi) \setminus \{e_0\} \neq \emptyset$ , 由引理 3.1 可以知道  $\alpha \geq 1$ . 因此只需要证明  $\dim_H E(\psi) \leq \frac{1}{\alpha}$ .

当  $\alpha = 1$ , 结论显然成立.

当  $\alpha > 1$ , 对任意的  $\epsilon > 0$ , 有

$$A(\psi) \subset \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(n)} \sum_{j=1}^n \log d_j(x) = 1 \right\} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N(\psi),$$

其中

$$B_N(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : 1 - \epsilon < \frac{1}{\psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(n)} \sum_{j=1}^n \log d_j(x) < 1 + \epsilon, n \geq N \right\}.$$

当  $N \geq 1$ , 选择一个数列  $\{n_k : k \geq 1\} \subset \mathbb{N}$ , 满足  $n_1 \geq N$  时有

$$\psi(n_k + 1) \geq \alpha(1 - \epsilon)(\psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(n_k)), k \geq 1. \quad (3.9)$$

对  $x \in B_N(\psi)$ , 可以得到:

$$\begin{aligned} \log d_{n_k+1}(x) &= \sum_{j=1}^{n_k+1} \log d_j(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \log d_j(x) > (1 - \epsilon)(\psi(1) + \cdots + \psi(n_k + 1)) - \sum_{j=1}^{n_k} \log d_j(x) \\ &\geq (1 - \epsilon)(1 + \alpha(1 - \epsilon))(\psi(1) + \cdots + \psi(n_k)) - \sum_{j=1}^{n_k} \log d_j(x) \quad (\text{by (3.9)}) \\ &\geq \frac{(1 - \epsilon)(1 + \alpha(1 - \epsilon))}{1 + \epsilon} \sum_{j=1}^{n_k} \log d_j(x) - \sum_{j=1}^{n_k} \log d_j(x) \\ &= \left( \frac{(1 - \epsilon)(1 + \alpha(1 - \epsilon))}{1 + \epsilon} - 1 \right) \sum_{j=1}^{n_k} \log d_j(x) \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{n_k} \log d_j(x) \\ &= \log(d_1(x)d_2(x) \cdots d_{n_k}(x))^\lambda, \end{aligned}$$

这里的  $\lambda = \frac{(1-\epsilon)(1+\alpha(1-\epsilon))}{1+\epsilon} - 1$ . 由此可知

$$B_N(\psi) \subset \left\{ x \in (0, 1] : d_{n+1}(x) \geq (d_1(x)d_2(x) \cdots d_n(x))^\lambda \text{ 对无穷多个 } n \in \mathbb{N} \right\} = C(1, 0, \lambda),$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$ , 由引理 3.3, 可以得到

$$\dim_H E(\psi) \leq \sup_{N \geq 1} \dim_H A_N(\psi) \leq \dim_H C(1, 0, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{\alpha}.$$

#### 4 定理 1.4 的证明

在证明定理 1.4 前, 先给出两个引理.

**引理 4.1** 对  $a > 1, b \geq 2$ , 令  $A(a, b) = \{x \in (0, 1] : d_n(x) \geq a^{b^n} \text{ 对无穷多个 } n \in \mathbb{N}\}$ . 则有

$$\dim_H A(a, b) = \frac{1}{b-1}.$$

**证** 首先证明  $\dim_H A(a, b) \geq \frac{1}{b-1}$ . 选择  $N > 1$  满足

$$a^{b^n-1} \geq 2, a^{b^n-1} + 2 < \frac{n+1}{n} a^{b^n-1} \text{ 和 } \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \leq a, \quad (n \geq N). \quad (4.1)$$

由引理 3.2, 令  $u_n = a^{b^{n+1}-1}$ ;  $v_n = \frac{n+1}{n}$ , 因此由算式 (4.1), 可以得到

$$a^{b^{n+1}-1} \geq \left( \frac{n+1}{n} a^{b^n-1} \right)^2 \geq \frac{n+1}{n} a^{b^n-1} \left( \frac{n+1}{n} a^{b^n-1} - 1 \right) + 1, \quad (n \geq N).$$

令  $\bar{A}(a, b) = \left\{ x \in (0, 1] : a^{b^{n+N}-1} \leq d_n(x) < \frac{n+1}{n} a^{b^{n+N}-1}, n \geq 1 \right\}$ . 显然  $\bar{A}(a, b) \subset A(a, b)$ . 由引理 3.2, 可得

$$\dim_H A(a, b) \geq \dim_H \bar{A}(a, b) = \frac{1}{b-1}.$$

接下来证明  $\dim_H A(a, b) \leq \frac{1}{b-1}$ . 当  $b = 2$  时,  $\dim_H A(a, b) = 1$ . 当  $b > 2$  时, 取  $\lambda$  满足  $2 < \lambda < b$ . 可知:

$$A(a, b) \subset \{x \in (0, 1] : d_1 d_2 \cdots d_{n+1}(x) > (d_1(x) d_2(x) \cdots d_n(x))^\lambda \text{ 对无穷多的 } n \in \mathbb{N}\}.$$

实际上, 对任意的  $x \in A(a, b)$ , 如果存在  $N \in \mathbb{N}$  满足: 当  $n \geq N$  时, 有

$$d_1 d_2 \cdots d_{n+1}(x) \leq (d_1(x) d_2(x) \cdots d_n(x))^\lambda,$$

则

$$\begin{aligned} a^{b^n} (d_1(x) d_2(x) \cdots d_{n-1}(x)) &\leq d_n(x) (d_1(x) d_2(x) \cdots d_{n-1}(x)) \\ &= (d_1(x) d_2(x) \cdots d_n(x)) \\ &\leq (d_1(x) d_2(x) \cdots d_N(x))^{\lambda^{n-N}}. \end{aligned}$$

对于无穷多个  $n \geq N$  成立. 但是因为  $b > \lambda$ , 可得: 当  $n$  足够大时, 有  $a^{b^n} > (d_1(x) d_2(x) \cdots d_N(x))^{\lambda^n}$ , 与上式矛盾. 因此可得:

$$\begin{aligned} A(a, b) &\subset \{x \in (0, 1] : d_1(x) d_2(x) \cdots d_{n+1}(x) > (d_1(x) d_2(x) \cdots d_n(x))^\lambda \text{ 对无穷多的 } n \in \mathbb{N}\} \\ &\subset \{x \in (0, 1] : d_{n+1}(x) > (d_1(x) d_2(x) \cdots d_n(x))^{\lambda-1} \text{ 对无穷多的 } n \in \mathbb{N}\} \\ &= C(1, 0, \lambda - 1). \end{aligned}$$

结合引理 3.3 可得

$$\dim_H A(a, b) \leq \lim_{\lambda \rightarrow b} \frac{1}{\lambda - 1} = \frac{1}{b - 1}.$$

**引理 4.2** 对  $b \geq 2$ , 令  $\hat{A}^*(b) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{b^n} = \infty \right\}$ , 则有

$$\dim_H \hat{A}^*(b) = \frac{1}{b-1}.$$

**证** 对于  $a > b$ , 有

$$\left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{a^n} = 1 \right\} \subset \hat{A}^*(b) \subset \{x \in (0, 1] : d_n(x) \geq e^{b^n} \text{ 对无穷多个 } n \in \mathbb{N}\}.$$

由定理 1.1 和引理 4.1, 可以得出:

$$\frac{1}{b-1} = \lim_{a \rightarrow b} \frac{1}{a-1} \leq \dim_H \hat{A}^*(b) \leq \frac{1}{b-1}.$$

下面证明定理 1.4.

证 首先回顾集合

$$A^*(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = \infty \right\}, \quad \log B = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \psi(n)}{n}.$$

证明将分三种情况来进行.

(1)  $1 \leq B \leq 2$ .

在这种情况下, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  满足: 当  $n \geq N$  时, 有  $\psi(n) \leq (2 + \varepsilon)^n$ . 可以得到:

$$A^*(\psi) \supset \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{(2 + \varepsilon)^n} = \infty \right\},$$

又由引理 4.2 可知:  $\dim_H A^*(\psi) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}$ .

(2)  $2 < B < \infty$ .

在这种情况下, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ ,  $\psi(n) \geq (B - \varepsilon)^n$  对任意多的  $n$  都成立, 且存在  $N \in \mathbb{N}$  满足当  $n \geq N$  时, 有  $\psi(n) \leq (B + \varepsilon)^n$ . 因此

$$\left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{(B + \varepsilon)^n} = \infty \right\} \subset A^*(\psi) \subset \{ x \in (0, 1] : d_n(x) \geq e^{(B - \varepsilon)^n} \text{ 对无穷多个 } n \in \mathbb{N} \}.$$

由引理 4.1 和引理 4.2, 可得

$$\frac{1}{B - 1 + \varepsilon} \leq \dim_H A^*(\psi) \leq \frac{1}{B - 1 - \varepsilon}.$$

(3)  $B = \infty$ .

在这种情况下, 对任意的  $M > 2$ ,  $A^*(\psi) \subset \{ x \in (0, 1] : d_n(x) \geq e^{M^n} \text{ 对无穷多个 } n \in \mathbb{N} \}$ . 由引理 4.1, 可得

$$\dim_H A^*(\psi) \leq \frac{1}{M - 1}.$$

## 5 定理 1.5 的证明

证 对集合

$$A_*(\psi) = \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = 0 \right\}, \quad C = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n)}{2^n}.$$

考虑两种情况:

(1)  $0 \leq C < \infty$ .

在这种情况下, 这里存在一个数列  $\{n_k\}_{k \geq 1}$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(n_k)}{2^{n_k}} = C$ . 因此

$$A_*(\psi) \subset \left\{ x \in (0, 1] : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log d_{n_k}(x)}{2^{n_k}} = 0 \right\}.$$

由命题 2.4, 可以得出

$$d_n(x) \geq 2^{2^{n-2}}, n \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

由算式 (5.1), 对所有的  $n \geq 1$ , 有  $\frac{\log d_n(x)}{2^n} \geq \frac{\log 2}{4}$ . 因此  $A_*(\psi) = \emptyset$ .

(2)  $C = \infty$ .

在这种情况下, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(n)}{2^n} = \infty$ , 因此

$$\left\{ x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{2^n} = 1 \right\} \subset A_*(\psi).$$

因此, 由定理 1.1 可以得到  $\dim_H A_*(\psi) \geq 1$ .

### 参 考 文 献

- [1] Khintchine A Ya. Continued fractions[M]. University of Chicago Press, 1964.
- [2] Adler R L, Flatto L. The backward continued fraction map and geodesic flow[J]. Ergodic Theory Dynam. Systems, 1984, 4(4): 487–492.
- [3] Schweiger F. Ergodic theory of fibred systems and metric number theory[M]. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [4] Nakada H. Metrical theory for a class of continued fraction transformations and their natural extensions[J]. Tokyo J. Math., 1981, 4: 399–426.
- [5] Wang B W, Wu J. Hausdorff dimension of certain sets arising in continued fraction expansions[J]. Adv. Math., 2008, 218(5): 1319–1339.
- [6] Wu J. A remark on the growth of the denominators of convergents[J]. Monatsh. Math., 2006, 147(3): 259–264.
- [7] Wu J, Xu J. On the distribution for sums of partial quotients in continued fraction expansions[J]. Nonlinearity, 2011, 24(4): 1177–1187.
- [8] Wu J, Xu J. The distribution of the largest digit in continued fraction expansions[J]. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 2009, 146(1): 207–212.
- [9] Fang L L, Wu M. Hausdorff dimension of certain sets arising in Engel continued fractions[J]. Discrete Contin. Dyn. Syst., 2018, 38(5): 2375–2393.
- [10] Zhong T, Tang L. The sets of different continued fractions with the same partial quotients[J]. Int. J. Number Theory, 2013, 9(7): 1855–1863.
- [11] Iosifescu M, Kraaikamp C. Metrical theory of continued fractions, mathematics and its applications[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [12] Fan A H, Wang B W, Wu J. Arithmetic and metric properties of Oppenheim continued fraction expansions[J]. Journal of Number Theory, 2007, 127: 64–822.
- [13] Zhang Z L. On the exceptional sets in Sylvester continued fraction expansion[J]. Int. J. Number Theory, 2015, 11(8): 2369–2380.
- [14] Falconer K J. Fractal geometry, mathematical foundations and application[M]. John Wiley and Sons, Chichester, 1990.
- [15] Wang B W, Wu J, Xu J. A generalization of the Jarník-Besicovitch theorem by continued fractions[J]. Ergodic Theory Dynam. Systems, 2016, 36: 1278–1306.

## HAUSDORFF DIMENSIONS OF CERTAIN SETS IN TERMS OF THE SYLVESTER CONTINUED FRACTION EXPANSIONS

LIAO Xu

(Chongqing Normal University(School of Mathematical Sciences), Chongqing 401331, China)

**Abstract:** For  $x \in (0, 1]$ , let  $x = [d_1, d_2, \dots]$  be its Sylvester continued fraction expansions, we calculate the Hausdorff dimension of the set  $A(\psi)$  defined in terms of the Sylvester continued fraction expansions as

$$A(\psi) = \{x \in (0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = 1\},$$

where  $\psi(n)$  is a positive function defined on  $\mathbb{N}$ . By constructing the covering and a suitable subset of Cantor, we get the exact Hausdorff dimension of the set as

$$\dim_H A(\psi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(1) + \psi(2) + \dots + \psi(n)}{\psi(n+1)}.$$

At the same time, we also calculate the Hausdorff dimension of the set of points with  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log d_n(x)}{\psi(n)} = 0$  or  $\infty$ .

**Keywords:** Sylvester continued fraction expansions; Hausdorff dimension; growth rate

**2010 MR Subject Classification:** 11K55; 28A80