

一类具有空间异质性 SIS 传染病模型的阈值动力学分析

胡 萌, 张雅荣

(西安建筑科技大学理学院, 西安 710055)

摘要: 本文研究了空间异质性下水平传播和垂直传播的 SIS 传染病模型的问题. 利用半群理论、下一代再生算子谱半径的定义、Lyapunov 函数、渐近自治半流理论以及数值模拟的方法, 获得了空间异质性下水平传播和垂直传播的 SIS 传染病模型的动力学行为和传播规律的结果. 这些结果推广了之前的相关研究结果, 为理解此类传染病模型提供了更深入的理论依据.

关键词: 空间异质性; SIS 传染病模型; Lyapunov 函数; 全局稳定性

MR(2010) 主题分类号: 35Q92 中图分类号: O242.1

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2024)04-0331-12

1 引言

异质性指的是一种普遍存在于生物群体中的情况, 它体现出个体间的差异, 比如性别、地域、种群等. 为了研究疾病在异质环境中的传播规律, 文献 [1] 首次提出了一类疾病传播率以及种群人口数依赖空间的反应扩散传染病模型. 在此基础上, 文献 [2][3] 对一类 SIS 传染病反应扩散模型进行了深入的探讨.

$$\begin{cases} \partial_t S = d_s \Delta S - \frac{\beta(x)(S+I)}{K} + \gamma(x)I, x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t I = d_I \Delta I + \frac{\beta(x)(S+I)}{K} - \gamma(x)I, x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t S = \partial_t I = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

初始值满足

$$\int_{\Omega} I(x, 0) dx > 0, S_0(x, 0) \geq 0, I_0(x, 0) \geq 0, x \in \Omega$$

即初始时刻已有感染, 他们定义了基本再生数, 证明了基本再生数不但与易感者的扩散系数有关, 且是感染者扩散系数的单调递减函数, 即感染者减少扩散会增加基本再生数, 故只限制感染者的活动未必能遏制疾病的传播. 文献 [4] 考虑了模型在易感者和感染者移动速率相等时以及传染率和恢复率成比例时疾病的传播规律. 进一步, 文献 [5] 还考虑了易感者和感染者扩散速率大小对疾病灭绝和蔓延的影响. 文献 [6] 等考虑了空间异质环境中具有自由边界的传染病模型, 定义了与空间特征相关的基本再生数. 在疾病的扩散中, 病原体除了能够通过飞沫、接触、虫媒等途径在不同的机体间进行扩散之外, 还能够进行垂直传播. 垂直传播是指病原体从母体通过胎盘, 或是通过产道传染到胚胎的传播. 所以, 在传染病的数学建模中, 必须将病原体的水平传播和垂直传播两个方面都加以考虑. 有些学者对带有水平和垂直传播的

*收稿日期: 2023-10-14 接收日期: 2023-11-13

基金项目: 省重点研发项目资助 (2023-YBSF-372); 中国博士后面上项目资助 (2022M722604).

作者简介: 胡萌 (2001-), 女, 陕西咸阳, 研究生, 主要研究方向: 偏微分方程数值解.

通讯作者: 张雅荣 (1990-), 女, 陕西西安, 副教授, 主要研究方向: 微分方程数值解.

传染病模型展开了深入的研究 [7][8]. 尤其是, 文献 [9] 等发现水平传染会使病毒通过增加宿主感染和适应度出现此消彼长的情况, 而垂直传播会使病毒增加, 当寄生虫通过繁殖能力的增加使其对宿主的伤害达到最大化, 从而使寄生虫传播给更多的宿主后代时, 病毒才会减少. 文献 [10] 构建了一个具有水平和垂直传染且易感者 S 受 Allee 效应影响而感染者 I 的适应度降低的传染病模型, 研究结果表明, 在水平传染率较小时, 产生无易感者动力学行为, 而当感染者无繁殖能力时, 会产生疾病灭绝动力学.

基于上述讨论, 本文针对一类具有空间异质性的混合传播的 SIS 反应扩散传染病模型, 讨论模型解的适定性, 即解的存在性、唯一性、非负性和最终有界性, 定义水平再生数和垂直再生数, 根据其分析阈值动力学的结果.

2 构建模型

假设宿主种群受寄生微生物感染, 且宿主种群的数量是变化的, 分为易感染者 S 和感染者 I 两个仓室, 即 $N = S + I$; 疾病具有水平感染和垂直感染, 并且可治愈; 且感染者的繁殖能力有所减少, 同时改变宿主种群的密度. 在一个空间异质的环境中研究如下模型:

$$\begin{cases} \partial_t S = d_s \Delta S + r(x)S \left(1 - \frac{(S+I)}{K(x)}\right) - \mu(x)S - \beta(x)SI, x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t I = d_I \Delta I + r(x)\rho I \left(1 - \frac{(S+I)}{K(x)}\right) - (\mu(x) + \delta(x))I + \beta(x)SI, x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu S = \partial_\nu I = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, \\ S(x, 0) = S_0(x) \geq 0, I(x, 0) = I_0(x) \geq 0, x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

这里, S 和 I 分别表示易感者和感染者的密度. 所有的参数都是非负的, $r(x)$ 表示宿主最大出生率; $0 \leq \rho \leq 1$ 描述了感染者因病生殖能力适应度; $\rho = 0$ 表示感染宿主没有生殖能力, $\rho = 1$ 表示他们的生殖适应度没有减少; $K(x)$ 表示最大环境容纳量; $\mu(x)$ 是宿主种群的自然死亡率; $\beta(x)$ 是传染率系数, $\delta(x)$ 是日治愈率. 其中 d_s, d_I 分别是 S 和 I 的扩散系数. 初始值 $S_0(x), I_0(x) \in C(\bar{\Omega})$. 空间 $\Omega \in \mathbb{R}^n$ 是有界的, 且边界 $\partial\Omega$ 是光滑的. $\partial/\partial\nu$ 表示向外法向量 ν 在边界上的导数. 与空间位置 x 相关的参数 $\beta(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是严格正的和 Hölder 连续的.

3 经典解的全局存在唯一性

首先, 我们考虑经典解的局部存在唯一性, 进而考虑经典解的全局存在唯一性.

设 $\Gamma(t, x, y, d)$ 是满足 Neumann 边界条件算子 $d \Delta$ 的 Green 函数. 设 $A_1(t), A_2(t) : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ 分别是具有 Neumann 边界算子 $d_S \Delta + r(x) - \mu(x)$ 和 $d_I \Delta + r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x)$ 生成的 C_0 -半群. 当 $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ 时

$$\begin{aligned} A_1(t)(\varphi(x)) &= e^{(r(x)-\mu(x))t} \int_{\Omega} \Gamma(t, x, y, d_S) \varphi(y) dy, \quad t \geq 0 \\ A_2(t)(\varphi(x)) &= e^{(r(x)\rho-\mu(x)-\delta(x))t} \int_{\Omega} \Gamma(t, x, y, d_S) \varphi(y) dy, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

由 [11] 中的推论 7.2.3 可知, 对任意 $t > 0, A_i(t) : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ ($i = 1, 2$) 是紧致的且强正的. 于是, 当 $t \geq 0$ 时, $A(t) = (A_1(t), A_2(t)) : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ 是强连续半群.

设 $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ 是 $A_i (i = 1, 2)$ 的生成子, 则 $\mathcal{A}(t) : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ 是由算子 $\mathcal{A} = (A_1, A_2) = (d_S \Delta + r(x) - \mu(x), d_I \Delta + r(x) \rho - \mu(x) - \delta(x))$ 生成的半群, 其定义域为 $D(\mathcal{A}) = D(A_1) \times D(A_2)$. 另外定义算子 $\mathcal{F} = (F_1, F_2) : C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ 即

$$\mathcal{F}(t)(\varphi(x)) := \begin{pmatrix} F_1(\varphi(x)) \\ F_2(\varphi(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{r(x)}{K(x)}\varphi_1(x)(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) - \beta(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x) \\ \beta(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \frac{r(x)}{K(x)}\varphi_1(x)(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \end{pmatrix},$$

其中 $x \in \bar{\Omega}$, 且初始值函数 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, 于是, 可把模型 (2.1) 在 $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \times C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ 上改写为如下积分方程

$$u(t) = \mathcal{A}(t)\varphi + \int_0^t \mathcal{A}(t-v)\mathcal{F}(u(x,v))dv, \quad t > 0$$

这里 $u(t) = (S(x,t), I(x,t))^T$, 下面引理给出了模型 (2.1) 的解在 $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$ 上的性质.

引理 3.1 ^[12] 对于任意初值函数 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$, 模型 (2.1) 在 $\bar{\Omega} \times [0, T)$ 上存在唯一的非负解 $u(x, t, \varphi) := (S(x, t), I(x, t)) \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$, 满足 $u(x, 0, \varphi) = \varphi$, 其中 $T \leq \infty$.

证 只需证明对于任意 $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \text{dist}(\varphi + h\mathcal{F}(\varphi), C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)) = 0. \quad (3.1)$$

事实上, 对任意 $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$ 和 $h \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} \varphi + h\mathcal{F}(\varphi) &= \begin{pmatrix} \varphi_1(x) + h \left(-\frac{r(x)}{K(x)}\varphi_1(x)(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) - \beta(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x) \right) \\ \varphi_2(x) + h \left(\beta(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \frac{r(x)}{K(x)}\varphi_1(x)(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \right) \end{pmatrix} \\ &\geq \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \left[1 - h \left(\frac{r(x)}{K(x)}\varphi_1(x)(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) + \beta(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x) \right) \right] \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故当 $h \rightarrow 0^+$ 时, (3.1) 式成立.

为讨论模型 (2.1) 全局正解的存在性, 我们考虑下面的反应扩散方程

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} = d\Delta W + r(x) \left(1 - \frac{W}{K(x)} \right) W - \mu(x)W, & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, W(x, 0) = W^0(x), & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (3.2)$$

关于模型 (2.1) 的动力学行为, 直接应用文献 [13], 有下面的结论.

引理 3.2 ^[13] 对于任意的 $d > 0$ 和 $W^0(x) > 0$, 模型 (3.2) 存在唯一的正稳态解 $U^*(x)$, 且在 $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^+)$ 上是全局渐近稳定的.

直接应用文献 [14], 关于反应扩散模型

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} = d_Q \Delta Q + \lambda(x) - \mu(x)Q, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0, Q(x, 0) = Q^0(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (3.3)$$

稳态解的存在性与稳定性, 我们有以下引理

引理 3.3 ^[14] 假设 $\lambda(x), \mu(x) > 0, x \in \bar{\Omega}$, 则模型 (3.3) 存在唯一的正稳态解 $q^*(x)$, 且在 $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ 上是全局渐近稳定的.

定理 3.1 对于任意初值函数 $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$, 模型 (2.1) 在 $\bar{\Omega} \times [0, \infty)$ 上存在唯一的非负解 $u(x, t; \varphi)$, 满足 $u(x, 0; \varphi) = \varphi$, 由模型 (2.1) 生成的解半流 $\Phi(t)\varphi = (S(x, t; \varphi), I(x, t; \varphi))$ 是点耗散的. 并且模型 (2.1) 存在唯一的古典解

$$(S(\cdot, t), I(\cdot, t)) \in C(C(\bar{\Omega}); [0, \infty)) \cap C^1(C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}); [1, \infty)).$$

证 令 $U(x, t) = S(x, t) + I(x, t)$, 则 $U(x, t)$ 满足

$$\frac{\partial U}{\partial t} = d\Delta U + r(x) \left(1 - \frac{U}{K(x)}\right) U - \mu(x)U, \quad x \in \Omega, t > 0 \quad (3.4)$$

和初值条件 $U(x, 0) = S(x, 0) + I(x, 0), x \in \bar{\Omega}$, 其中 $d = \max\{d_S, d_I\}$, 由引理 3.2 和比较原理可知

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} U(x, t) \leq U^*(x). \quad (3.5)$$

对所有 $x \in \bar{\Omega}$ 一致成立. 因此对于充分大的 t , 有 $\|U(x, t)\| \leq \|U^*(x)\| := M$, 其中 M 与初值无关. 即 $U(x, t)$ 是一致有界的. 由引理 3.1 可得 $S(x, t)$ 和 $I(x, t)$ 是一致有界的. 根据 (3.5) 式, 存在 $t_1 > 0$ 和 $\varepsilon > 0$, 使得 $t > t_1$ 有 $U(x, t) \leq U^*(x) + \varepsilon$. 即 $U(x, t)$ 是最终有界的. 由引理 3.1 可得 $S(x, t)$ 和 $I(x, t)$ 是最终有界的. 因此 (2.1) 的解是全局存在的, 且由 (2.1) 生成的解半流 $\Phi(t)$ 是点耗散的. 此外, 由文献 [15] 和上述估计以及 Sobolev 嵌入定理可知

$$(S(\cdot, t), I(\cdot, t)) \in C(C(\bar{\Omega}); [0, \infty)) \cap C^1(C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}); [1, \infty)).$$

4 基本再生数

基本再生数是判断一个疾病是否存活的标准. 它表示当一个受感染的个体进入所有易感的宿主种群时产生二次感染的平均数量. 在反应扩散方程中, 该指标通常用下一代感染算子的谱半径 [16] 来表示. 模型 (2.1) 对应的稳态方程为

$$\begin{cases} d_S \Delta S + r(x)S \left(1 - \frac{S+I}{K(x)}\right) - \mu(x)S - \beta(x)SI = 0, & x \in \Omega \\ d_I \Delta I + r(x)\rho I \left(1 - \frac{S+I}{K(x)}\right) - (\mu(x) + \delta(x))I + \beta(x)SI = 0, & x \in \Omega \\ \partial_\nu S = \partial_\nu I = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

可知统计学再生数为

$$R_d = \frac{r(x)}{\mu(x)}. \quad (4.2)$$

4.1 水平传染再生数

当 $R_d > 1$, $(S_*(x), 0)$ 是模型 (2.1) 的无病平衡解, 其中 $S_*(x) = \frac{K(x)(r(x) - \mu(x))}{r(x)}$. 在 $(S_*(x), 0)$ 处线性化模型 (2.1), 则得到下述特征值问题

$$\begin{cases} d_S \Delta \psi_1 + (r(x) - \mu(x))\psi_1 - \left(\frac{r(x)}{K(x)} + \beta(x)\right) S_* \psi_1 = \lambda \psi_1, & x \in \Omega, \\ d_I \Delta \psi_2 + \left(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x) + \left(\beta(x) - \frac{r(x)}{K(x)}\rho\right) S_*\right) \psi_2 = \lambda \psi_2, & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.3)$$

为了得到基本再生数, 假设初始感染者分布 $\varphi(x)$, 随着时间的推移, 设 $T(t)\varphi(x)$ 是系统

$$\begin{cases} \partial_t I - d_I \Delta I = -(\mu(x) + \delta(x))I, & x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu I = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ I(x, 0) = \varphi(x) \geq 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

的解半群. 即 $T(t)\varphi(x)$ 为 t 时刻感染者的分布, 那么在 t 时刻新增的感染者的分布为 $F(x)T(t)\varphi(x)$. 因此, 由初始感染者分布 $\varphi(x)$ 引起的新增感染者的空间总分布为 $\int_0^\infty F(x)T(t)\varphi(x) dt$.

定义算子 $\mathcal{L}: C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \rightarrow C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ 为

$$\mathcal{L}(\varphi)(x) := \int_0^\infty F(x)T(t)\varphi(x) dt = F(x) \int_0^\infty T(t)\varphi(x) dt$$

则 \mathcal{L} 为下一代算子. 此外, \mathcal{L} 是连续的正算子, 它将初始感染 $\varphi(x)$ 映射到感染期间产生的感染成员的总数. 定义 \mathcal{L} 的谱半径作为模型 (2.1) 的水平传染再生数. 即 $R_0^h := r(\mathcal{L})$.

引理 4.1 [17] 设 λ_0^h 为特征值问题 (4.3) 的主特征值, 那么 (i) $R_0^h - 1$ 与 λ_0^h 同号; (ii) 若 $R_0^h < 1$, 则模型 (2.1) 的无病稳态解 $(S_*(x), 0)$ 是局部渐近稳定的, 若 $R_0^h > 1$, 则 $(S_*(x), 0)$ 是局部不稳定的.

为了得到基本再生数 R_0^h 的精确表达式, 根据文献 [17], 有以下定理

定理 4.1 设 λ_0^h 为

$$d_I \Delta \varphi - (\mu(x) + \delta(x))\varphi + \lambda_0^h \left(\frac{K\beta(x)(r(x) - \mu(x))}{r(x)} + \mu(x)\rho \right) \varphi = 0, x \in \Omega, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega$$

的主特征值, 则 $R_0^h = 1/\lambda_0^h$.

证 根据文献 [17] 的下一代再生矩阵的谱半径所定义, 此时新进感染源只有 I 一个变量, 因此设 $\mathcal{F}(x, S, I)$ 是新感染者的输入矩阵, $\mathcal{V}(x, S, I)$ 是宿主的转移矩阵, 则

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, S, I) &= \begin{pmatrix} \beta(x)SI + r(x)\rho I \left(1 - \frac{(S+I)}{K(x)}\right) \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{V}(x, S, I) &= \begin{pmatrix} \mu(x) + \delta(x)I \\ \beta(x)SI - r(x)S \left(1 - \frac{(S+I)}{K(x)}\right) + \mu(x)S \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} F(x) &= \partial_I F_1(x, S, I)|_{(s(x), 0)} = \frac{K(x)\beta(x)(r(x) - \mu(x))}{r(x)} + \mu(x)\rho, \\ V(x) &= \partial_I V_1(x, S, I)|_{(s(x), 0)} = \mu(x) + \delta(x). \end{aligned}$$

其中, F, V 均是 1×1 的矩阵, 根据文献 [18], 于是模型 (2.1) 的基本再生数为

$$R_0^h := r(\mathcal{L}) = r \left(-(d_I \Delta - V)^{-1} F \right) = -(d_I \Delta - (\mu(x) + \delta(x)))^{-1} \left(\frac{K(x)\beta(x)(r(x) - \mu(x))}{r(x)} + \mu(x)\rho \right) \varphi.$$

所以 R_0^h 满足

$$-(d_I \Delta - (\mu(x) + \delta(x)))^{-1} \left(\frac{K(x)\beta(x)(r(x) - \mu(x))}{r(x)} + \mu(x)\rho \right) \varphi = R_0^h \varphi, \quad \varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$$

即

$$d_I \Delta \varphi - (\mu(x) + \delta(x))\varphi + \left(\frac{K(x)\beta(x)(r(x)-\mu(x))}{r(x)} + \mu(x)\rho \right) \frac{\varphi}{R_0^h} = 0, \quad \varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2).$$

因此, $R_0^h = 1/\lambda_0^h$, 藉由算子 Δ 的自伴性, R_0^h 有变分形式

$$R_0^h = 1/\lambda_0^h = \sup_{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi \neq 0} \left\{ \frac{\int_{\Omega} (K(x)\beta(x)(r(x)-\mu(x))/r + \rho\mu(x))\varphi^2 dx}{\int_{\Omega} (d_I |\nabla \varphi|^2 + (\mu(x) + \delta(x))\varphi^2) dx} \right\} \quad (4.4)$$

引理 4.2 [18] 对 R_0^h , 下面的结论成立:

(i) $R_0^h - 1$ 与 $\mathbf{s} \left(d_I \Delta + \frac{K(x)\beta(x)(r(x)-\mu(x))}{r(x)} + \mu(x)\rho - \mu(x) - \delta(x) \right)$ 符号相同.

(ii) R_0^h 关于 $d_I > 0$ 是严格单调递减函数, 且当 $d_I \rightarrow 0$ 时, $R_0^h \rightarrow \max \left\{ \frac{K\beta(x)(r(x)-\mu(x)) + \mu(x)r(x)\rho}{r(\mu(x) + \delta(x))}, x \in \bar{\Omega} \right\}$; 当 $d_I \rightarrow \infty$ 时, $R_0^h \rightarrow \frac{\int_{\Omega} (K(x)\beta(x)(r(x)-\mu(x)) + \mu(x)r(x)\rho) dx}{r(x)(\mu(x) + \delta(x))}$.

4.2 垂直传染再生数

当 $R_d > \frac{\mu(x) + \delta(x)}{\mu(x)\rho}$ 时, 模型 (2.1) 存在唯一的无易感者稳态解 $SFE(0, I_*(x))$, 其中 $I_*(x) = \frac{K(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))}{r(x)\rho}$. 类似水平传染再生数的定义方式, 可以定义模型 (2.1) 的垂直传染再生数 R_0^v .

定理 4.2 设 λ_0^v 为 $d_S \Delta \varphi - \left(\mu(x) + \frac{K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))}{r(x)\rho} \right) \varphi + \lambda_0^v \frac{\mu(x) + \delta(x)}{\rho} \varphi = 0, x \in \Omega, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, x \in \partial \Omega$ 的主特征值, 则 $R_0^v = 1/\lambda_0^v$.

证 由模型 (2.1), 可得

$$\tilde{F}(x) = \frac{\mu(x) + \delta(x)}{\rho}, \tilde{V} = \mu(x) + \frac{K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))}{r(x)\rho},$$

则模型 (2.1) 的垂直传染再生数 R_0^v 为

$$R_0^v = \mathbf{r} \left(- (d_S \Delta - \tilde{V})^{-1} \tilde{F} \right) = - \left(d_S \Delta - \left(\mu(x) + \frac{K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))}{r(x)\rho} \right) \right)^{-1} \frac{\mu(x) + \delta(x)}{\rho} \varphi,$$

所以 R_0^v 满足

$$- \left(d_S \Delta - \left(\mu(x) + \frac{K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))}{r(x)\rho} \right) \right)^{-1} \frac{\mu(x) + \delta(x)}{\rho} \varphi = R_0^v \varphi,$$

即

$$d_S \Delta \varphi - \left(\mu(x) + \frac{K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))}{r(x)\rho} \right) \varphi + \frac{\mu(x) + \delta(x)}{\rho} \frac{\varphi}{R_0^v} = 0.$$

同理, R_0^v 有变分形式

$$R_0^v = 1/\lambda_0^v = \sup_{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi \neq 0} \left\{ \frac{(\mu(x) + \delta(x))/\rho \cdot \int_{\Omega} \varphi^2 dx}{\int_{\Omega} (d_S |\nabla \varphi|^2 + (K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))/r(x)\rho + \mu(x))\varphi^2) dx} \right\}. \quad (4.5)$$

引理 4.3 [18] 对 R_0^v , 下面的结论成立:

(i) $R_0^v - 1$ 与 $\mathbf{s} \left(d_S \Delta + \frac{\mu(x) + \delta(x)}{\rho} - \mu(x) - \frac{K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))}{r(x)\rho} \right)$ 符号相同.

(ii) R_0^v 关于 d_S 是严格单调递减函数,

且当 $d_S \rightarrow 0$ 时 $R_0^v \rightarrow \max \left\{ \frac{r(x)(\mu(x) + \delta(x))}{K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x)) + \mu(x)r(x)\rho}, x \in \bar{\Omega} \right\}$;

当 $d_S \rightarrow \infty$ 时, $R_0^v \rightarrow \frac{|\Omega| r(x)(\mu(x) + \delta(x))}{\int_{\Omega} (K(x)\beta(x)(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x)) + \mu(x)r(x)\rho) dx}$.

5 阈值动力学

5.1 无病稳态解的稳定性

定理 5.1 若 $R_d > 1$, 模型 (2.1) 存在唯一无病平衡点 $DFE(S_*(x), 0) = \left(\frac{K(x)(r(x)-\mu(x))}{r(x)}, 0\right)$, 且若 $R_0^h < 1$, 则 $DFE(S_*(x), 0)$ 是全局渐近稳定的.

证 对于 $\varepsilon \geq 0$, 由引理可知特征值问题

$$\begin{cases} d_S \Delta \psi_1 + (r(x) - \mu(x))\psi_1 - \left(\frac{r(x)}{K(x)} + \beta(x)\right) S_* \psi_1 = \lambda \psi_1, x \in \Omega, \\ d_I \Delta \psi_2 + \left(r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x) + \left(\beta(x) - \frac{r(x)}{K(x)}\rho\right) S_*\right) \psi_2 = \lambda \psi_2, x \in \Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

有一主特征值 $\lambda_0^\varepsilon = \lambda_0(d, S_*(x) + \varepsilon)$, 其中 $d = \max\{d_S, d_I\}$ 且存在强正的特征函数 $\psi^\varepsilon(x)$ 与之对应. 由引理可知当 $R_0^h < 1$ 时, $\lambda_0(d, S_1(x)) < 0$. 根据特征值关于参数的连续依赖性, 存在一个足够小的 $\varepsilon_0 > 0$, 使得 $\lambda_0^\varepsilon = \lambda_0(d, S_*(x) + \varepsilon_0) < 0$, 且存在一个强正的特征函数 $\psi^{\varepsilon_0}(x)$ 与之对应. 根据 (3.5) 式, 对所有的 $x \in \bar{\Omega}$ 有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} S(x, t) \leq S_*(x)$ 一致成立. 即存在一个足够大的 $t_0 > 0$, 使得对于所有的 $x \in \bar{\Omega}$ 和 $t > t_0$ 有 $S(x, t) \leq S_*(x) + \varepsilon_0$. 因此, 由模型 (2.1) 的第二个方程可知

$$\begin{cases} \partial_t I - d_s \Delta I \leq I(r(x)\rho + \|\beta\|_\infty(S_*(x) + \varepsilon_0) - \mu(x) - \delta(x)), x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu I = 0, x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

对于任意的 $\varphi \in C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_+^2)$, 存在一个正数 χ , 使得 $I(x, t_0; \varphi) \leq \chi \psi^{\varepsilon_0}(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, 考虑反应扩散模型

$$\begin{cases} \partial_t \hat{I} - d_s \Delta \hat{I} = \hat{I}(r(x)\rho + \|\beta\|_\infty(S_*(x) + \varepsilon_0) - \mu(x) - \delta(x)), x \in \Omega, t > 0, \\ \partial_\nu \hat{I} = 0, x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

的解为 $\chi e^{\lambda_0^\varepsilon(t-t_0)} \psi^{\varepsilon_0}(x)$, $t > t_0$. 由比较原理可得

$$I(x, t; \varphi) \leq \chi e^{\lambda_0^\varepsilon(t-t_0)} \psi^{\varepsilon_0}(x), t > t_0.$$

因为 $\lambda_0^\varepsilon < 0$, 所以对于所有 $x \in \bar{\Omega}$ 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(x, t; \varphi) = 0$. 进而, 由引理 3.2 及文献 [19] 渐近自治半流理论有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(x, t; \varphi) = S_*(x), x \in \bar{\Omega}.$$

5.2 无易感者稳态解的稳定性

定理 5.2 若 $R_d > \frac{\mu(x)+\delta(x)}{\mu(x)\rho}$, 模型 (2.1) 存在唯一的无易感染平衡点, 且若 $R_0^v < 1$, 则 $SFE(0, I_*(x))$ 是全局渐近稳定的.

证 在 $(0, I_*(x))$ 处线性化模型 (2.1), 则得下述特征值问题

$$\begin{cases} d_s \Delta \psi_1 + \left(r(x) - \mu(x) - \left(\frac{r(x)}{K(x)} + \beta(x)\right) I_*\right) \psi_1 = \lambda \psi_1, x \in \Omega, \\ d_I \Delta \psi_2 + \left(\beta(x) - \frac{r(x)\rho}{K(x)}\right) I_* \psi_1 - (r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x)) \psi_2 = \lambda \psi_2, x \in \Omega, \\ \partial_\nu \psi_1 = \partial_\nu \psi_2 = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.4)$$

若 $\psi_1 = 0$, 则 $\psi_2 \neq 0$ 且 $d_I \Delta \psi_2 - (r(x)\rho - \mu(x) - \delta(x))\psi_2 = \lambda\psi_2$, 由此得 $Re(\lambda) < 0$. 从而 (5.4) 的所有特征值具有负实部.

若 $\psi_1 \neq 0$, 则 λ 是 $d_s \Delta \psi_1 + \left(r(x) - \mu(x) - \left(\frac{r(x)}{K(x)} + \beta(x)\right)I_*\right)\psi_1$ 的特征值. 若 $R_0^v < 1$, 由引理 4.3 可得 $s\left(d_s \Delta \psi_1 + \left(r(x) - \mu(x) - \left(\frac{r(x)}{K(x)} + \beta(x)\right)I_*\right)\psi_1\right) < 0$. 因此 $Re(\lambda) < 0$. 于是 $SFE(0, I_*(x))$ 是线性稳定的.

5.3 地方病稳态解的稳定性

引理 5.1 [20] 当 $R_0^h > 1, R_0^v > 1$ 时, 模型 (2) 至少存在一个正解 (S^*, I^*) , 即地方病稳态解 EE 存在.

因此, 接下来考虑在同质情形下, 即 $K(x) = K, \delta(x) = \delta, \mu(x) = \mu, r(x) = r, \beta(x) = \beta$ 是正常数时模型 (2.1) 的地方病平衡点的全局稳定性.

定理 5.3 当 $R_0^h > 1, R_0^v > 1$ 时, 如果 $\beta > \frac{r\rho}{K}$, 则模型 (2.1) 的地方病平衡点 $EE(S^*, I^*)$ 是全局渐近稳定的.

证 对于模型 (2.1) 的任意解 (S, I) , 构造一个 Lyapunov 泛函如下:

$$\mathcal{L}(t) = \int_{\Omega} L(S(x, t), I(x, t)) dx .$$

令 $L(S, I) = \frac{K\beta - r\rho}{r + K\beta} \left(S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*}\right) + \left(I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}\right)$, 那么, 对于任意的 $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(t) &= \int_{\Omega} [L_s(S, I)S_t + L_I(S, I)I_t] dx \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{K\beta - r\rho}{r + K\beta} \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) (d_S \Delta S) + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) (d_I \Delta I) \right] dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \frac{K\beta - r\rho}{r + K\beta} \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) \left(rS - \mu S - \frac{rS}{K}(S + I) - \beta SI\right) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(r\rho I - \mu I - \delta I - \frac{r\rho I}{K}(S + I) + \beta SI\right) dx. \end{aligned} \quad (5.5)$$

根据文献 [21] 中的散度定理得:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t(t) &= -\frac{K\beta - r\rho}{r + K\beta} d_S S^* \int_{\Omega} \frac{|\nabla S|^2}{S^2} dx + d_I I^* \int_{\Omega} \frac{|\nabla I|^2}{I^2} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{r}{K} (S - S^*)^2 + \frac{r\rho}{K} (I - I^*)^2 dx \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

由于 $\mathcal{L}(t)$ 是模型 (2.1) 的 Lyapunov 函数, 即对于所有 $t > 0$, 都有 $\mathcal{L}_t(t) < 0$, 但在 (S, I) 处, $\mathcal{L}(t) = 0$. 并且 $t \rightarrow \infty$ 时, $[L^2(\Omega)]^2$ 中 $(S(x, t), I(x, t)) \rightarrow (S^*, I^*)$. 同理可证有界性, 以及对于任意的 $t \geq 1$, 仍有 $\|S(\cdot, t)\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \|I(\cdot, t)\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C$, 且 C 是正常数. 最终由 Sobolev 嵌入定理可知, $t \rightarrow \infty$ 时, $[L^\infty(\Omega)]^2$ 中有 $(S(x, t), I(x, t)) \rightarrow (S^*, I^*)$. 因此在均匀环境下地方病平衡点 $EE(S^*, I^*)$ 是全局渐近稳定的.

6 数值模拟

6.1 宿主的扩散和空间异质性对疾病动力学的影响

这一部分主要考虑宿主的扩散和空间异质性对疾病动力学的影响. 根据文献 [22][23] 使用 MATLAB 进行数值模拟.

固定参数 $d_S = 0.0002, d_I = 0.0001, \rho = 1$, 初始值为 $S_0(x) = 0.65 - 0.2 \cos 2\pi x, I_0(x) = 0.1 - 0.05 \cos 2\pi x, K(x) = 1/(1.01 + \cos 2\pi x), r(x) = 0.07(1.01 + \cos 2\pi x), \mu(x) = 0.065(1.01 + \cos 2\pi x), \delta(x) = 0.065(1.01 + \cos 2\pi x), \beta(x) = 0.0096(1.01 + \cos 2\pi x)$. 经过计算可知 $R_d \approx 1.0769 > 1, R_0^h \approx 0.5106 < 1$, 即定理 5.1 的条件成立. 因此, 模型 (2.1) 的无病稳态解 $DFE(S_*(x), 0)$ 是全局渐近稳定的, 正如下图 1 所示.



图 1 空间异质情形下模型 (2.1) 无病稳态解的存在性和稳定性, 这里 $R_d > 1, R_0^h < 1$

选取以下参数 $r(x) = 0.1(1.01 + \cos 2\pi x), \mu(x) = 0.065(1.01 + \cos 2\pi x), \delta(x) = 0.045(1.01 + \cos 2\pi x), K(x) = 1/(1.01 + \cos 2\pi x), \beta(x) = 0.0096(1.01 + \cos 2\pi x)$. 经过计算可知 $R_d \approx 1.5385 > 1, R_0^v \approx 0.5991 < 1$, 即定理 5.2 的条件成立. 因此, 模型 (2.1) 的无易感稳态解 $SFE(0, I_*(x))$ 是全局渐近稳定的, 正如下图 2 所示.



图 2 空间异质情形下模型 (2.1) 无易感稳态解的存在性和稳定性, 这里 $R_d > 1, R_0^v < 1$

选取参数 $K(x) = K = 1, r(x) = r = 0.1, \mu(x) = \mu = 0.065, \delta(x) = \delta = 0.045, \beta(x) = \beta = 0.20, \rho = 1, d_S = 0.0002, d_I = 0.0001$. 经过计算可知 $R_0^h \approx 1.2273 > 1, R_0^v \approx 2.4445 > 1$ 且 $\beta > \frac{r\rho}{K}$, 即定理 5.3 的条件成立. 因此, 模型 (2.1) 的地方病平衡点 $EE(S^*, I^*)$ 是全局渐近稳定的, 正如下图 3 所示. 图 3 表明模型 (2.1) 存在一个全局渐近稳定的稳态解且与位置无关. 对比图 2 和图 3 不难发现, 异质环境下感染者的分布与位置参数息息相关. 这意味着由于空间异质性, 不同地区的疾病感染风险和感染者分布是不一样的, 忽略异质性有可能低估或高估某些地区的基本再生数.

6.2 稳态分布斑图

根据文献 [24], 在模型 (2.1) 中固定参数为 $\rho = 0.5, \beta_0 = 6.25 \times 10^{-3}$ 以及 $d_S = 0.2 \times 10^{-4}$, 空间区域为 $0 \leq x \leq 400$. 选取两个不同的 d_I 值, 分别为 $d_I = 0.7 \times 10^{-5}, d_I = 0.7 \times 10^{-4}$,



图 3 空间同质情形下模型 (2.1) 地方病稳态解的存在性和稳定性, 这里 $R_0^h > 1$, $R_0^v > 1$

在 $t \in [0, 400]$ 时间段感染者 $I(x, t)$ 的空间分布模拟结果如下图. 可以看出 $I(x, t)$ 的变化完全取决于 d_I , 但感染者的分布斑图不随时间的变化而改变 (所有子图中的条带数保持不变). 因此, 这种空间分布斑图是稳态的.

当 $d_I = 0.7 \times 10^{-4}$ 时, 考虑传染率系数 $\beta(x) = \beta_0(1.01 + c \cos 2l\pi(x + \eta))$ 中的变量 l 对分布斑图的影响机制. 下图给出了 $l = 1, 2$ 时的分布斑图数值模拟结果. 显然, $I(x, t)$ 的空间分布斑图是由传染率 $\beta(x)$ 的空间异质性决定的.



图 4 在 $t \in [0, 400]$ 时间段感染者 $I(x, t)$ 的稳态分布模拟结果

7 结论和展望

本文建立并分析了一类具有空间异质性的反应扩散传染病模型, 病原体除了能够通过飞沫、接触、虫媒等途径在不同的机体间进行扩散之外, 也可以宿主之间垂直传播. 首先将模型转化为对应的积分方程得到了全局正解的存在性和唯一性. 进一步, 利用下一代再生算子方法得到水平传染再生数 R_0^h 以及垂直传染再生数 R_0^v , 并给出了它们与某些特征值问题的主特征值问题之间的关系. 最后, 讨论了模型的阈值动力学行为, 即当 $R_d > 1$ 且 $R_0^h < 1$, 利用渐近自治半流理论得到无病稳态解是全局渐近稳定的, 这表明病原体在环境中和生物体身上消失. 当 $R_d > 1$ 且 $R_0^v < 1$, 无易感染者稳态解是全局渐近稳定的, 这表明病原体一直存在, 会使种群灭绝. 当 $R_d > 1$ 且 $R_0^v < 1$, 无易感染者稳态解是全局渐近稳定的, 这表明病原体一直存在, 会使种群灭绝. 在齐次的情况下, 当 $R_0^h > 1, R_0^v > 1$ 且 $\beta > \frac{r_0}{K}$, 用李雅普诺夫函数的方法验证了正稳态解的全局吸引力.

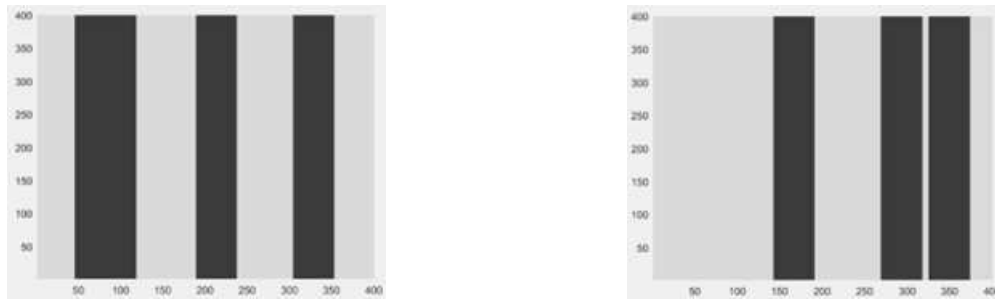


图 5 不同的 l 值对感染者 $I(x, t)$ 的稳态分布的影响.

由于考虑到空间异质性以及易感者和感染者可能以不同的速率进行扩散, 所以本文并没有给出地方病稳态解的精确表达式. 这是值得进一步研究的课题.

参 考 文 献

- [1] Fitzgibbon W E, Langlais M, Morgan J J. A mathematical model of the spread of feline leukemia virus (FeLV) through a highly heterogeneous spatial domain [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2001, 33(3): 570–588.
- [2] Allen L J S, Bolker B M, Lou Y, et al. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic patch model [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2007, 67(5): 1283–1309.
- [3] Allen L J S, Bolker B M, Lou Y, et al. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction-diffusion model [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2008, 21(1): 1–8.
- [4] Peng R, Liu S. Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction - diffusion model [J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, 71(1-2): 239–247.
- [5] Peng R. Asymptotic profiles of the positive steady state for an SIS epidemic reaction - diffusion model. Part I [J]. *Journal of Differential Equations*, 2009, 247(4): 1096–1119.
- [6] Lin Z, Zhu H. Spatial spreading model and dynamics of West Nile virus in birds and mosquitoes with free boundary [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2017, 75: 1381–1409.
- [7] Tao Y. Global existence of classical solutions to a predator - prey model with nonlinear prey-taxis [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(3): 2056–2064.
- [8] Li M Y, Smith H L, Wang L. Global dynamics of an SEIR epidemic model with vertical transmission [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2001, 62(1): 58–69.
- [9] Stewart A D, Logsdon J M, Kelley S E. An empirical study of the evolution of virulence under both horizontal and vertical transmission [J]. *Evolution*, 2005, 59(4): 730–739.
- [10] Kang Y, Sasmal S K, Bhowmick A R, et al. Dynamics of a predator - prey system with prey subject to Allee effects and disease [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2014, 11(4): 877–918.
- [11] Smith H L. An introduction to the theory of competitive and cooperative systems [A]. *Monotone dynamical systems, Mathematical Surveys and Monographs*[M]. American Mathematical Society, 1995, 41.
- [12] Martin R H, Smith H L. Abstract functional-differential equations and reaction-diffusion systems [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1990, 321(1): 1–44.

- [13] Zhao X Q. Dynamical systems in population biology [M]. New York: Springer, 2003.
- [14] Lou Y, Zhao X Q. A reaction - diffusion malaria model with incubation period in the vector population [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2011, 62(4): 543–568.
- [15] Brown K J, Dunne P C, Gardner R A. A semilinear parabolic system arising in the theory of superconductivity [J]. *Journal of Differential Equations*, 1981, 40(2): 232–252.
- [16] Diekmann O, Heesterbeek J A P, Metz J A J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1990, 28: 365–382.
- [17] Wang W, Zhao X Q. Basic reproduction numbers for reaction-diffusion epidemic models [J]. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 2012, 11(4): 1652–1673.
- [18] Ge J, Kim K I, Lin Z, et al. A SIS reaction - diffusion - advection model in a low-risk and high-risk domain [J]. *Journal of Differential Equations*, 2015, 259(10): 5486–5509.
- [19] Thieme H R. Convergence results and a Poincar é -Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations [J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1992, 30(7): 755–763.
- [20] Magal P, Webb G, Wu Y. On a vector-host epidemic model with spatial structure [J]. *Nonlinearity*, 2018, 31(12): 5589.
- [21] Groeger J. Divergence theorems and the supersphere [J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2014, 77: 13–29.
- [22] 胡振祥, 聂麟飞. 具有水平传播和环境传播的反应扩散传染病模型研究 [J]. *数学物理学报*, 2022, 42(6):1849–1860.
- [23] 马知恩. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [24] Wang W, Lin Y, Zhang L, et al. Complex patterns in a predator - prey model with self and cross-diffusion [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, 16(4): 2006–2015.

THRESHOLD DYNAMICS ANALYSIS OF A CLASS OF SIS INFECTIOUS DISEASE MODEL WITH SPATIAL HETEROGENEITY

HU Meng, ZHANG Ya-rong

(School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Shaanxi 710055, China)

Abstract: This article studies the dynamics and transmission laws of the SIS infectious disease model with the horizontal and vertical transmission under the spatial heterogeneity. Using the semigroup theory, the definition of the spectral radius of the next-generation generator, Lyapunov functions, asymptotic autonomous semigroup theory, and numerical simulation methods, we obtain the dynamical behavior and transmission laws of the SIS infectious disease model with the horizontal and vertical transmission under the spatial heterogeneity. These results extend previous related research results and provide a deeper theoretical basis for understanding such infectious disease models.

Keywords: spatial heterogeneity; SIS infectious disease model; Lyapunov function; global stability

2010 MR Subject Classification: 35Q92