Vol. 44 (2024)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于二阶 Fermat 型常微分方程的整函数解

张 宇, 杨 刘

(安徽工业大学应用数学系, 安徽 马鞍山 243032)

摘 要: 本文研究了二阶 Fermat 型常微分方程 $(a_1f+b_1f'+c_1f'')^2+(a_2f+b_2f'+c_2f'')^2=\gamma$ 的整函数解的问题, 其中 γ 是 $\mathbf{C}$ 上的整函数. 利用 Nevanlinna 值分布理论的方法, 获得了方程存在整函数解的充要条件, 并且给出了解的表达形式.

关 键 词: 二阶 Fermat 型复微分方程; Nevanlinna 值分布理论; 整函数

MR(2010) **主题分类号**: 39B32; 34M05; 30D35 **中图分类号**: O175.29

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)04-0317-14

1 引言

1637 年, 法国数学家 Pierre de Fermat 提出了一个猜想: 对于不小于 3 的正整数 n, 关于 x,y,z 的方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解. 直到三百多年后, 英国数学家 Andrew Wiles 证明了该猜想, 该猜想即为著名的 Fermat 大定理.

类似地, 我们把形如

$$f^m+g^n=1(m,n\in\mathbf{N}_+) \tag{1.1}$$

的关于 f,g 的函数方程称为 Fermat 型函数方程. Montel [1] 与 Cartan [2] 分别证明了: 当 $m=n\geqslant 3$ 以及更一般地, 当 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}<1$ 时, 复平面上的函数方程 (1.1) 的整函数解必定为常数. Iyer [3] 则对 $m=n=2$ 的情形进行了研究, 并证明了

定理 1.1 [3] 复平面上的函数方程 $f^2+g^2=1$ 的整函数解必然形如 $f(z)=\cos h(z), g(z)=\sin h(z)$, 其中 $h(z)$ 是复平面上的任意整函数; 并且不存在其他形式的整函数解.

随着 Nevanlinna 值分布理论的发展, 对复微分方程的研究也有了新的进展. 2004 年, Yang 和 Li [4] 对 (1.1) 中的 $g=\sum\limits_{k=0}^{r}a_kf^{(k)}(a_r\neq 0), m=n=2$ 的情形进行了研究, 并得出

定理 1.2 [4] 若 $L(f)=\sum\limits_{k=0}^{r}a_kf^{(k)}(a_1,a_2,\cdots,a_r\in\mathbf{C},a_r\neq 0)$, 则复平面上关于 f 的函数方程 $f^2+L^2(f)=1$ 的超越整函数解为 $f(z)=\dfrac{1}{2}\left(p\mathrm{e}^{\lambda z}+\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-\lambda z}\right)$, 其中 $p\in\mathbf{C}$ 为非零常数, 而 λ 满足 $\sum\limits_{k=0}^{r}a_k\lambda^k=-\mathrm{i}, \sum\limits_{k=0}^{r}a_k(-\lambda)^k=\mathrm{i}$.

随后, 各种不同类型的 Fermat 型常微分方程被深入研究, Tang 和 Liao [5] 研究了形如 $f^2+P^2(f^{(k)})^2=Q$ 的常微分方程, 得到了

*收稿日期: 2023-07-12 接收日期: 2023-12-13

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11701006); 安徽省高等学校科学研究项目资助 (2022AH050329, 2022AH050290).

作者简介: 张宇 (2000–), 男, 硕士生, 安徽蚌埠, 主要研究方向: 复分析.

通讯作者: 杨刘 (1986–), 男, 副教授, 安徽亳州, 主要研究方向: 复分析.

定理 1.3 [5] 若 $P(z),Q(z)$ 都是非零多项式, $f(z)$ 是微分方程 $f^2+P^2(f^{(k)})^2=Q$ 的超越亚纯函数解, 那么 $P(z)\equiv A, Q(z)\equiv B, k=2n+1$ 对某些非负整数 n 成立, 并且 $f(z)=b\cos(az+c)$, 其中 A,B,a,b,c 都是常数并且满足 $Aa^k=\pm1, b^2=B$.

2015 年, Liu 和 Dong [6] 将 (1.1) 中的 f 和 g 分别替换为 $af+bf'$ 和 $cf+df''$, 考虑了形如 $(af+bf')^2+(cf+df'')^2=1$ 的二阶 Fermat 型常微分方程, 并且证明了

定理 1.4 [6] 若 $f(z)$ 为微分方程 $(af+bf')^2+(cf+df'')^2=1$ 的超越亚纯函数解, 则 $f(z)$ 必定是以下情形之一:

(1) 若 $a=c=0, b,d\neq 0$, 则 $f(z)=\dfrac{\mathrm{i}d}{b^2}\sinh(\dfrac{\mathrm{i}b}{d}z-A)+B$, 其中 $A,B\in\mathbf{C}$ 是常数;

(2) 若 $a,b,c,d\neq 0, \dfrac{c}{a}=\mathrm{i}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{2p}}{1+\mathrm{e}^{2p}}\right)$, 则 $f(z)=D\mathrm{e}^{-\frac{a}{b}z}+\dfrac{\mathrm{e}^p+\mathrm{e}^{-p}}{2a}$, 其中 $p\in\mathbf{C}$ 是常数, $D\in\mathbf{C}$ 是非零常数;

(3) 若 $a=0, b,c\neq 0$, 则 $f(z)=\dfrac{\mathrm{i}b+d}{bc}\sinh\left(\dfrac{c}{\mathrm{i}b+d}z-A\right)+B$, 其中 $d+\dfrac{cd}{bd+\mathrm{i}b^2}=0, A,B\in\mathbf{C}$ 是常数.

2017 年, Han 和 L ü [7] 则将 (1.1) 中的 g 和 1 分别替换为 f' 和 $\mathrm{e}^{\alpha z+\beta}$, 得出了微分方程 $f^n+(f')^n=\mathrm{e}^{\alpha z+\beta}$ 的亚纯函数解.

定理 1.5 [7] 微分方程 $f^n+(f')^n=\mathrm{e}^{\alpha z+\beta}$ 的亚纯函数解 f 必定是整函数, 并且以下断言成立.

(1) 当 $n=1$ 时, 若 $\alpha\neq -1$, 则 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha z+\beta}}{\alpha+1}+a\mathrm{e}^{-z}$, 若 $\alpha=-1$, 则 $f(z)=z\mathrm{e}^{-z+\beta}+a\mathrm{e}^{-z}$.

(2) 当 $n=2$ 时, 有 $f(z)=d\mathrm{e}^{\frac{\alpha z+\beta}{2}}$, 或着对于 $\alpha=0$, 有 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}\sin(z+b)$.

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时, 有 $f(z)=d\mathrm{e}^{\frac{\alpha z+\beta}{n}}$.

其中 $\alpha,\beta,a,b,c\in\mathbf{C}$ 并且对 $n\geqslant 1$ 有 $d^n\left(1+\left(\dfrac{\alpha}{n}\right)^n\right)=1$.

2021 年, Luo, Xu 以及 Hu [8] 则研究了带有交叉项的常微分方程 $f^2+2\alpha ff'+(f')^2=\mathrm{e}^g$, 得到了

定理 1.6 [8] 设 $\alpha^2\neq 0,1, g(z)$ 是一个多项式, 若微分方程 $f^2+2\alpha ff'+(f')^2=\mathrm{e}^g$ 存在有穷级超越整函数解, 那么 $g(z)$ 必定是 $g(z)=az+b$ 的形式, 其中 $a,b\in\mathbf{C}$.

同时, 对 Fermat 型的复偏微分方程的研究也得出了大量结果. Li [9,10] 对形如 $u_{z_1}^2+u_{z_2}^2=\mathrm{e}^g$ 和 $u_{z_1}^2+u_{z_2}^2=p$ 的两类复偏微分方程 (其中 g 和 p 都是 $\mathbf{C}^2$ 上的多项式函数) 的整函数解进行了研究, 并得出了相关结果.

2 主要结果

本文主要研究二阶 Fermat 型常微分方程

$$(a_1f+b_1f'+c_1f'')^2+(a_2f+b_2f'+c_2f'')^2=\gamma \tag{2.1}$$

的整函数解, 其中 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbf{C}, \gamma$ 为定义在 $\mathbf{C}$ 上的整函数. 分别记

$$D=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{pmatrix}, D_{ab}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}, D_{bc}=\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}, D_{ca}=\begin{vmatrix}c_1 & a_1\\ c_2 & a_2\end{vmatrix},$$

再记常数 M 满足 $D_{ca}=MD_{bc}$. 如果 $\mathrm{rank}D=1$, 那么 a_1,b_1,c_1 与 a_2,b_2,c_2 对应成比例, 这样

方程 (2.1) 就是一个平凡的二阶常系数线性常微分方程. 如果 $\mathrm{rank}D=2$, 那么 D_{ab},D_{bc},D_{ca} 中至少有一个不等于 0. 首先考虑方程 (2.2) 中的 $D_{bc}\neq 0$ 的情形.

2.1 方程 (2.2) 中的 $D_{bc}\neq 0$

对于整函数 γ, 我们主要考虑指数函数和多项式函数两种情形, 一是 $\gamma=\mathrm{e}^g$ 且 g 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的多项式函数; 二是 $\gamma=p$ 且 p 是定义在 $\mathbf{C}$ 上不恒为 0 的多项式函数. 我们有如下结论:

定理 2.1 设 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbf{C}$, 并且 $D_{bc}\neq 0, D_{ca}^2=D_{ab}D_{bc}$, 而 $g(z)$ 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的多项式函数, 那么关于 $f(z)$ 的方程

$$(a_1f+b_1f'+c_1f'')^2+(a_2f+b_2f'+c_2f'')^2=\mathrm{e}^g \tag{2.2}$$

存在整函数解的充要条件是: $g(z)=Az+B$, 其中 A,B 都是$\mathbf{C}$中的常数, 并且满足
(i)

$$b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)\left(M+\frac{A}{2}\right)+(c_1^2+c_2^2)\left(M+\frac{A}{2}\right)^2\neq 0. \tag{2.3}$$

此时方程 (2.2) 的整函数解形如

$$f(z)=r_1\mathrm{e}^{Mz}+\frac{\mathrm{e}^{Mz+\frac{B}{2}}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)\left(M+\frac{A}{2}\right)+(c_1^2+c_2^2)\left(M+\frac{A}{2}\right)^2}}\int_0^z \mathrm{e}^{\left(\frac{A}{2}-M\right)t}\mathrm{d}t,$$

其中 r_1 是$\mathbf{C}$中的任意常数.
或者 (ii)

$$\begin{gathered} c_1^2+c_2^2\neq 0,\\ \frac{b_1c_1+b_2c_2}{c_1^2+c_2^2}+M+\frac{A}{2}=0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

此时方程 (2.2) 的整函数解形如

$$f(z)=r_2\mathrm{e}^{Mz}+\mathrm{e}^{Mz+\frac{B}{2}}\int_0^z\frac{c_2\cos h(t)-c_1\sin h(t)}{D_{bc}}\mathrm{e}^{\left(\frac{A}{2}-M\right)t}\mathrm{d}t,$$

其中 $h(z)=-\dfrac{D_{bc}}{c_1^2+c_2^2}z+\mu_1$, 而 r_2,μ_1 都是$\mathbf{C}$中的任意常数.

在此定理中取 $A=0, B=\log C$, 其中 C 是$\mathbf{C}$中的非零常数, 显然可以得出

推论 2.1 设 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbf{C}$, 并且 $D_{bc}\neq 0, D_{ca}^2=D_{ab}D_{bc}$, 而 C 是 $\mathbf{C}$ 中的非零常数, 那么关于 $f(z)$ 的方程

$$(a_1f+b_1f'+c_1f'')^2+(a_2f+b_2f'+c_2f'')^2=C \tag{2.5}$$

存在整函数解的充要条件是:
(i)

$$b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)M+(c_1^2+c_2^2)M^2\neq 0.$$

此时方程 (2.5) 的整函数解形如

$$f(z)=r_1\mathrm{e}^{Mz}+\frac{\sqrt{C}\mathrm{e}^{Mz}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)M+(c_1^2+c_2^2)M^2}}\int_0^z \mathrm{e}^{-Mt}\mathrm{d}t,$$

其中 r_1 是$\mathbf{C}$中的任意常数.
或者 (ii)

$$c_1^2+c_2^2\neq 0,\quad b_1c_1+b_2c_2+(c_1^2+c_2^2)M=0.$$

此时方程 (2.5) 的整函数解形如

$$f(z)=r_2\mathrm{e}^{Mz}+\frac{\sqrt{C}}{D_{bc}}\mathrm{e}^{Mz}\int_0^z(c_2\cos h(t)-c_1\sin h(t))\mathrm{e}^{-Mt}\mathrm{d}t,$$

其中 $h(z)=-\dfrac{D_{bc}}{c_1^2+c_2^2}z+\mu_1$, 而 r_2,μ_1 都是$\mathbf{C}$中的任意常数.

定理 2.2 设 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbf{C}$, 并且 $D_{bc}\neq 0, D_{ca}^2=D_{ab}D_{bc}$, 而 $p(z)$ 是定义在 $\mathbf{C}$ 上不恒为 0 的多项式函数, 那么关于 $f(z)$ 的方程

$$(a_1f+b_1f'+c_1f'')^2+(a_2f+b_2f'+c_2f'')^2=p \tag{2.6}$$

存在整函数解的充要条件是:
(i)

$$a_1=a_2=0,$$

并且存在$\mathbf{C}$中的非零常数 l 以及 p 的因式 u 和 v, 满足 $p=uv$, 以及

$$l^2(b_2+\mathrm{i}b_1)u+(b_2-\mathrm{i}b_1)v+l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u'+(c_2-\mathrm{i}c_1)v'=0. \tag{2.7}$$

此时方程 (2.6) 的整函数解形如

$$f(z)=r_3+\int_0^z\frac{l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u(t)+(c_2-\mathrm{i}c_1)v(t)}{2lD_{bc}}\mathrm{d}t,$$

其中 r_3 是$\mathbf{C}$中的任意常数.
或者 (ii)

$$\begin{gathered}b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)M+(c_1^2+c_2^2)M^2\neq 0,\\ b_1c_1+b_2c_2+(c_1^2+c_2^2)M=0,\end{gathered} \tag{2.8}$$

并且 p 是$\mathbf{C}$中的非零常数, 此时方程 (2.6) 的整函数解形如

$$f(z)=r_4\mathrm{e}^{Mz}+\frac{\sqrt{p}\mathrm{e}^{Mz}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)M+(c_1^2+c_2^2)M^2}}\int_0^z \mathrm{e}^{-Mt}\mathrm{d}t,$$

其中 r_4 是$\mathbf{C}$中的任意常数.

或者 (iii)

$$c_1^2+c_2^2\neq 0,\\ b_1c_1+b_2c_2+(c_1^2+c_2^2)M=0, \tag{2.9}$$

并且 p 是$\mathbf{C}$中的非零常数, 此时方程 (2.6) 的整函数解形如

$$f(z)=r_5\mathrm{e}^{Mz}+\frac{\sqrt{p}}{D_{bc}}\mathrm{e}^{Mz}\int_0^z(c_2\cos h(t)-c_1\sin h(t))\mathrm{e}^{-Mt}\mathrm{d}t,$$

其中 $h(z)=-\dfrac{D_{bc}}{c_1^2+c_2^2}z+\mu_1$, 而 r_5,μ_1 都是$\mathbf{C}$中的任意常数.

根据该定理显然可以得出

推论 2.2 设 $a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2\in\mathbf{C}$, 并且 $|a_1|+|a_2|\neq 0, D_{bc}\neq 0, D_{ca}^2=D_{ab}D_{bc}$, 而 $p(z)$ 是定义在 $\mathbf{C}$ 上不恒为 0 的多项式函数, 如果关于 $f(z)$ 的方程 (2.6) 存在整函数解, 那么 $p(z)$ 是$\mathbf{C}$上的非零常数.

然后是方程 (2.2) 中的 $D_{bc}=0$ 的情形.

2.2 方程 (2.2) 中的 $D_{bc}=0$

如果 $D_{bc}=0, D_{ca}^2=D_{ab}D_{bc}$, 那么 $D_{ca}=0$, 从而 $c_1=c_2=0, D_{ab}\neq 0$. 设 $F(z)=\int_0^z f(t)\mathrm{d}t$, 那么

$$(a_1f+b_1f')^2+(a_2f+b_2f')^2=(0\cdot F+a_1F'+b_1F'')^2+(0\cdot F+a_2F'+b_2F'')^2=\gamma,$$

其中 $\gamma=\mathrm{e}^g$ 或 p, 并且 g 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的多项式函数, p 是定义在 $\mathbf{C}$ 上不恒为 0 的多项式函数. 对于关于 $F(z)$ 的方程

$$(0\cdot F+a_1F'+b_1F'')^2+(0\cdot F+a_2F'+b_2F'')^2=\gamma, \tag{2.10}$$

注意到 $D_{ab}\neq 0$, 并且自然成立 $\begin{vmatrix} b_1 & 0\\ b_2 & 0\end{vmatrix}^2=0=\begin{vmatrix} 0 & a_1\\ 0 & a_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$, 应用定理 2.1和定理 2.2就可以得出方程 (2.10) 存在整函数解的充要条件, 以及整函数 F 的表达式. 如果存在整函数解 F, 再对 F 求导即可得出关于 $f(z)$ 的方程 $(a_1f+b_1f')^2+(a_2f+b_2f')^2=\gamma$ 的整函数解 f. 因此对应于定理 2.1和定理 2.2, 我们有

推论 2.3 设 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{C}$, 并且 $D_{ab}\neq 0$, 而 $g(z)$ 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的多项式函数, 那么关于 $f(z)$ 的方程

$$(a_1f+b_1f')^2+(a_2f+b_2f')^2=\mathrm{e}^g \tag{2.11}$$

存在整函数解的充要条件是: $g(z)=Az+B$, 其中 A,B 都是$\mathbf{C}$中的常数, 并且满足
(i)

$$4(a_1^2+a_2^2)+4(a_1b_1+a_2b_2)A+(b_1^2+b_2^2)A^2\neq 0. \tag{2.12}$$

此时方程 (2.11) 的整函数解形如

$$f(z)=+\frac{2\mathrm{e}^{\frac{Az+B}{2}}}{\sqrt{4(a_1^2+a_2^2)+4(a_1b_1+a_2b_2)A+(b_1^2+b_2^2)A^2}}.$$

或者 (ii)

$$b_1^2+b_2^2\neq 0,\quad \frac{a_1b_1+a_2b_2}{b_1^2+b_2^2}+\frac{A}{2}=0.$$

此时方程 (2.11) 的整函数解形如

$$f(z)=\frac{b_2\cos h(z)-b_1\sin h(z)}{D_{ab}}\mathrm{e}^{\frac{Az+B}{2}},$$

其中 $h(z)=-\dfrac{D_{ab}}{b_1^2+b_2^2}z+\mu_2$, 而 μ_2 是$\mathbf{C}$中的任意常数.

推论 2.4 设 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{C}$, 并且 $D_{ab}\neq 0$, 而 $p(z)$ 是定义在 $\mathbf{C}$ 上不恒为 0 的多项式函数, 那么关于 $f(z)$ 的方程

$$(a_1f+b_1f')^2+(a_2f+b_2f')^2=p \tag{2.13}$$

存在整函数解的充要条件是:

(i)

存在$\mathbf{C}$中的非零常数 l 以及 p 的因式 u 和 v, 满足 $p=uv$, 以及

$$l^2(a_2+\mathrm{i}a_1)u+(a_2-\mathrm{i}a_1)v+l^2(b_2+\mathrm{i}b_1)u'+(b_2-\mathrm{i}b_1)v'=0.$$

此时方程 (2.13) 的整函数解形如

$$f(z)=\frac{l^2(b_2+\mathrm{i}b_1)u(z)+(b_2-\mathrm{i}b_1)v(z)}{2lD_{ab}}.$$

或者 (ii)

$$a_1^2+a_2^2\neq 0,\quad a_1b_1+a_2b_2=0.$$

并且 p 是$\mathbf{C}$中的非零常数, 此时方程 (2.13) 的整函数解形如

$$f(z)=\sqrt{\frac{p}{a_1^2+a_2^2}}.$$

或者 (iii)

$$b_1^2+b_2^2\neq 0,\quad a_1b_1+a_2b_2=0.$$

并且 p 是$\mathbf{C}$中的非零常数, 此时方程 (2.13) 的整函数解形如

$$f(z)=\frac{b_2\cos h(z)-b_1\sin h(z)}{D_{ab}}\sqrt{p},$$

其中 $h(z)=-\dfrac{D_{ab}}{b_1^2+b_2^2}z+\mu_2$, 而 μ_2 是$\mathbf{C}$中的任意常数.

3 定理的证明

下面列出三个引理, 这在本文定理的证明过程中具有关键作用.

引理 3.1 [11,12] 设 f 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数, 那么除去一个有限测度集后, 有 $T(r,f')=O(T(r,f))(r\to+\infty)$.

引理 3.2 [13,14] 设 f 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的超越亚纯函数, 而 g 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的非常整函数, 那么 $T(r,g)=o(T(r,f\circ g))(r\to+\infty)$.

引理 3.3 [14] 设 f 是定义在 $\mathbf{C}$ 上的亚纯函数, 那么对于任意有穷复数 a, 有 $T\left(r,\dfrac{1}{f-a}\right)=T(r,f)+O(1)(r>0)$.

3.1 定理 2.1 的证明

充分性只需直接代入验证即可, 此处略去. 必要性的证明如下:
根据**定理 1.1**可知, 存在整函数 h, 满足

$$\begin{aligned}a_1f+b_1f'+c_1f''&=\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}\cos h,\\ a_2f+b_2f'+c_2f''&=\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}\sin h.\end{aligned}$$

从而可得

$$D_{bc}f'=(c_2\cos h-c_1\sin h)\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}+D_{ca}f, \tag{3.1}$$

$$D_{bc}f''=(b_1\sin h-b_2\cos h)\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}+D_{ab}f. \tag{3.2}$$

对 (3.1) 两边求导并结合 (3.2) 可得

$$\begin{aligned}&(b_1\sin h-b_2\cos h)\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}+D_{ab}f=D_{bc}f''\\ =&\left[\frac{c_2\cos h-c_1\sin h}{2}g'-(c_2\sin h+c_1\cos h)h'\right]\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}+D_{ca}f'\\ =&\left[\frac{c_2\cos h-c_1\sin h}{2}g'-(c_2\sin h+c_1\cos h)h'\right]\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}+(c_2\cos h-c_1\sin h)M\mathrm{e}^{\frac{g}{2}}+\frac{D_{ca}^2}{D_{bc}}f.\end{aligned}$$

又因为 $D_{ca}^2=D_{ab}D_{bc}$, 所以有

$$\left(b_1+c_1M+c_2h'+\frac{c_1g'}{2}\right)\sin h-\left(b_2+c_2M-c_1h'+\frac{c_2g'}{2}\right)\cos h=\frac{D_{ca}^2-D_{ab}D_{bc}}{D_{bc}}f\mathrm{e}^{-\frac{g}{2}}=0.$$

即有

$$\left(b_1+c_1M+c_2h'+\frac{c_1g'}{2}\right)\sin h=\left(b_2+c_2M-c_1h'+\frac{c_2g'}{2}\right)\cos h. \tag{3.3}$$

下面分两种情形讨论.

情形一 $b_1+c_1M+c_2h'+\dfrac{c_1g'}{2}$ 和 $b_2+c_2M-c_1h'+\dfrac{c_2g'}{2}$ 都等于 0.

此时有

$$(c_1^2+c_2^2)h'+D_{bc}=0, \tag{3.4}$$

$$\frac{c_1^2+c_2^2}{2}g'+(b_1c_1+b_2c_2)+(c_1^2+c_2^2)M=0.$$

由于 $D_{bc}\neq 0$, 根据 (3.4) 必然有 $c_1^2+c_2^2\neq 0$. 进而有 $h'=-\dfrac{D_{bc}}{c_1^2+c_2^2}, g'=-2\left(\dfrac{b_1c_1+b_2c_2}{c_1^2+c_2^2}+M\right)$. 因此可得

$$h=-\frac{D_{bc}}{c_1^2+c_2^2}z+\mu_1,$$
$$g=Az+B.$$

其中 μ_1, B 都是$\mathbf{C}$中的任意常数, 并且常数 A 满足 $A=-2\left(\dfrac{b_1c_1+b_2c_2}{c_1^2+c_2^2}+M\right)$, 即 (2.4). 再通过解关于 f 的一阶线性常微分方程 (3.1) 可得 (2.2) 的整函数解为

$$f(z)=r_2\mathrm{e}^{Mz}+\mathrm{e}^{Mz+\frac{B}{2}}\int_0^z\frac{c_2\cos h(t)-c_1\sin h(t)}{D_{bc}}\mathrm{e}^{\left(\frac{A}{2}-M\right)t}\mathrm{d}t,$$

其中 r_2 是$\mathbf{C}$中的任意常数.

情形二 $b_1+c_1M+c_2h'+\dfrac{c_1g'}{2}$ 和 $b_2+c_2M-c_1h'+\dfrac{c_2g'}{2}$ 至少有一个不等于 0.

此时有

$$\tan h=\frac{2b_2D_{bc}+2c_2D_{ca}-2c_1D_{bc}h'+c_2D_{bc}g'}{2b_1D_{bc}+2c_1D_{ca}+2c_2D_{bc}h'+c_1D_{bc}g'}, \tag{3.5}$$

或者

$$\cot h=\frac{2b_1D_{bc}+2c_1D_{ca}+2c_2D_{bc}h'+c_1D_{bc}g'}{2b_2D_{bc}+2c_2D_{ca}-2c_1D_{bc}h'+c_2D_{bc}g'}. \tag{3.6}$$

此时可以断定 h 必为$\mathbf{C}$上的常数, 下面利用反证法证明.

假设 h 为定义在$\mathbf{C}$上的非常整函数, 那么有 $\log r=o(T(r,h))(r\to+\infty)$. 又因为 g 是定义在$\mathbf{C}$上的多项式函数, 结合引理 3.1 可知, 除去一个有限测度集后有

$$T(r,g')=O(T(r,g))=O(\log r)=O(o(T(r,h)))=o(T(r,h))(r\to+\infty).$$

再根据引理 3.2 与引理 3.3 可知, 对于 (3.5), 除去一个有限测度集后有

$$T(r,h)=o(T(r,\tan h))=o(O(T(r,h')+T(r,g')))=o(T(r,h))+o(T(r,g'))=o(T(r,h))(r\to+\infty).$$

对于 (3.6), 除去一个有限测度集后也有

$$T(r,h)=o(T(r,\cot h))=o(O(T(r,h')+T(r,g')))=o(T(r,h))+o(T(r,g'))=o(T(r,h))(r\to+\infty).$$

均出现矛盾, 因此 h 为$\mathbf{C}$上的常数, 此时有 $h'=0$, 代入 (3.3) 有

$$\left(b_1+c_1M+\frac{c_1g'}{2}\right)\lambda_2=\left(b_2+c_2M+\frac{c_2g'}{2}\right)\lambda_1.$$

即

$$\frac{c_1\lambda_2-c_2\lambda_1}{2}g'=b_2\lambda_1-b_1\lambda_2+(c_2\lambda_1-c_1\lambda_2)M.$$

其中 $\lambda_1=\cos h, \lambda_2=\sin h$ 为$\mathbf{C}$中的常数, 且满足 $\lambda_1^2+\lambda_2^2=1$.

此时必然有 $c_1\lambda_2 \neq c_2\lambda_1$, 否则假设 $c_1\lambda_2 = c_2\lambda_1$, 那么显然有 $b_2\lambda_1 = b_1\lambda_2$. 于是有 $\lambda_1\lambda_2 D_{bc} = \lambda_1\lambda_2(b_1c_2 - b_2c_1) = 0$. 即 $\lambda_1\lambda_2 = 0$. 若 $\lambda_1 = 0$, 那么 $\lambda_2^2 = 1$, 此时必然有

$$b_1 = \frac{\lambda_1 b_2}{\lambda_2} = 0, c_1 = \frac{\lambda_1 c_2}{\lambda_2} = 0,$$

从而

$$D_{bc} = b_1c_2 - b_2c_1 = 0,$$

矛盾; 若 $\lambda_2 = 0$, 同样可以得出矛盾. 即有 $c_1\lambda_2 \neq c_2\lambda_1$.
记 $x = b_2\lambda_1 - b_1\lambda_2, y = c_2\lambda_1 - c_1\lambda_2 \neq 0$, 于是就有 $g' = -2\left(\frac{x}{y} + M\right)$, 从而 $g(z) = Az + B$, 其中 B 是$\mathbf{C}$中的任意常数, 并且常数 A 满足 $A = -2\left(\frac{x}{y} + M\right)$. 又因为

$$\left(\frac{b_1y - c_1x}{D_{bc}}\right)^2 + \left(\frac{b_2y - c_2x}{D_{bc}}\right)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1,$$

所以

$$\left(\left(b_1 + c_1\left(M + \frac{A}{2}\right)\right)^2 + \left(b_2 + c_2\left(M + \frac{A}{2}\right)\right)^2\right) y^2 = D_{bc}^2.$$

考虑到 $D_{bc} \neq 0$, 所以

$$\left(b_1 + c_1\left(M + \frac{A}{2}\right)\right)^2 + \left(b_2 + c_2\left(M + \frac{A}{2}\right)\right)^2 \neq 0,$$

$$y = \frac{D_{bc}}{\sqrt{\left(b_1 + c_1\left(M + \frac{A}{2}\right)\right)^2 + \left(b_2 + c_2\left(M + \frac{A}{2}\right)\right)^2}},$$

即 (2.3) 成立, 再通过解关于 f 的一阶线性常微分方程 (3.1) 可得 (2.2) 的整函数解为

$$\begin{aligned} f(z) &= r_1 \mathrm{e}^{Mz} + \frac{y\mathrm{e}^{Mz}}{D_{bc}} \int_0^z \mathrm{e}^{\frac{g(t)}{2} - Mt} \mathrm{d}t \\ &= r_1 \mathrm{e}^{Mz} + \frac{\mathrm{e}^{Mz + \frac{B}{2}}}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + 2(b_1c_1 + b_2c_2)\left(M + \frac{A}{2}\right) + (c_1^2 + c_2^2)\left(M + \frac{A}{2}\right)^2}} \int_0^z \mathrm{e}^{\left(\frac{A}{2} - M\right)t} \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

其中 r_1 是$\mathbf{C}$中的任意常数.

3.2 定理 2.2 的证明

这里依然略去充分性的验证, 必要性的证明如下:
由 (2.6) 可得

$$[(a_1f + b_1f' + c_1f'') + \mathrm{i}(a_2f + b_2f' + c_2f'')] \cdot [(a_1f + b_1f' + c_1f'') - \mathrm{i}(a_2f + b_2f' + c_2f'')] = p.$$

于是存在 p 的因式 u 和 v 满足 $p = uv$, 并且使得 $(a_1f + b_1f' + c_1f'') + \mathrm{i}(a_2f + b_2f' + c_2f'')$ 与 u 具有相同的零点包括零点重数, 那么 $(a_1f + b_1f' + c_1f'') - \mathrm{i}(a_2f + b_2f' + c_2f'')$ 与 v 也

将具有相同的零点包括零点重数, 所以存在整函数 k, 满足

$$\begin{aligned}(a_1f+b_1f'+c_1f'')+\mathrm{i}(a_2f+b_2f'+c_1f'')&=u\mathrm{e}^k,\\(a_1f+b_1f'+c_2f'')-\mathrm{i}(a_2f+b_2f'+c_2f'')&=v\mathrm{e}^{-k}.\end{aligned}$$

即有

$$a_1f+b_1f'+c_1f''=\frac{u\mathrm{e}^k+v\mathrm{e}^{-k}}{2}, \tag{3.7}$$

$$a_2f+b_2f'+c_2f''=\frac{u\mathrm{e}^k-v\mathrm{e}^{-k}}{2\mathrm{i}}. \tag{3.8}$$

从而可得

$$D_{bc}f'=\frac{(c_2+\mathrm{i}c_1)u\mathrm{e}^k+(c_2-\mathrm{i}c_1)v\mathrm{e}^{-k}}{2}+D_{ca}f, \tag{3.9}$$

$$D_{bc}f''=\frac{(\mathrm{i}b_1-b_2)v\mathrm{e}^{-k}-(\mathrm{i}b_1+b_2)u\mathrm{e}^k}{2}+D_{ab}f. \tag{3.10}$$

对 (3.9) 两边求导并结合 (3.10) 可得

$$\begin{aligned}&\frac{(\mathrm{i}b_1-b_2)v\mathrm{e}^{-k}-(b_2+\mathrm{i}b_1)u\mathrm{e}^k}{2}+D_{ab}f=D_{bc}f''\\=&\frac{(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u)\mathrm{e}^k+(c_2-\mathrm{i}c_1)(v'-k'v)\mathrm{e}^{-k}}{2}+D_{ca}f'\\=&\frac{[(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u)+M(c_2+\mathrm{i}c_1)u]\mathrm{e}^k+[(c_2-\mathrm{i}c_1)(v'-k'v)+M(c_2-\mathrm{i}c_1)v]\mathrm{e}^{-k}}{2}+\frac{D_{ca}^2}{D_{bc}}f.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&[(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u)+M(c_2+\mathrm{i}c_1)u+(b_2+\mathrm{i}b_1)u]\mathrm{e}^k\\&+[(c_2-\mathrm{i}c_1)(v'-k'v)+M(c_2-\mathrm{i}c_1)v+(b_2-\mathrm{i}b_1)v]\mathrm{e}^{-k}\\=&2\frac{D_{ab}D_{bc}-D_{ca}^2}{D_{bc}}f=0.\end{aligned}$$

即有

$$[(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u+Mu)+(b_2+\mathrm{i}b_1)u]\mathrm{e}^k=[(c_2-\mathrm{i}c_1)(k'v-v'-Mv)-(b_2-\mathrm{i}b_1)v]\mathrm{e}^{-k}. \tag{3.11}$$

下面分两种情形讨论.

情形一 $(c_2-\mathrm{i}c_1)(k'v-v'-Mv)-(b_2-\mathrm{i}b_1)v=0$.

此时必然有 $c_1^2+c_2^2\neq 0$. 否则, 若 $c_2-\mathrm{i}c_1=0$, 又因为 $uv=p\not\equiv 0$, 故 $v\not\equiv 0$, 从而有 $(b_2-\mathrm{i}b_1)v=(c_2-\mathrm{i}c_1)(k'v-v'-Mv)\equiv 0$. 于是 $b_2-\mathrm{i}b_1=0$, 进而有 $D_{bc}=b_1c_2-b_2c_1=0$, 矛盾, 即有 $c_2-\mathrm{i}c_1\neq 0$. 注意到

$$(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u+Mu)+(b_2+\mathrm{i}b_1)u=[(c_2-\mathrm{i}c_1)(k'v-v'-Mv)-(b_2-\mathrm{i}b_1)v]\mathrm{e}^{-2k}=0,$$

同理亦有 $c_2+\mathrm{i}c_1\neq 0$, 从而 $c_1^2+c_2^2\neq 0$. 因此

$$k'=-M-\frac{b_2+\mathrm{i}b_1}{c_2+\mathrm{i}c_1}-\frac{u'}{u}=M+\frac{b_2-\mathrm{i}b_1}{c_2-\mathrm{i}c_1}+\frac{v'}{v}.$$

即有

$$\frac{p'}{p}=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}=-2M-\frac{b_2+\mathrm{i}b_1}{c_2+\mathrm{i}c_1}-\frac{b_2-\mathrm{i}b_1}{c_2-\mathrm{i}c_1}=-2M-2\frac{b_1c_1+b_2c_2}{c_1^2+c_2^2}.$$

由于 p 是定义在 $\mathbf{C}$ 上不恒为 0 的多项式函数, 所以

$$p'=0,$$
$$M+\frac{b_1c_1+b_2c_2}{c_1^2+c_2^2}=0.$$

即 p 是 $\mathbf{C}$ 的非零常数, 此时在推论 2.1 中取 $C=p$, 就有
情形 1:

$$b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)M+(c_1^2+c_2^2)M^2\neq 0,$$
$$b_1c_1+b_2c_2+(c_1^2+c_2^2)M=0,$$

即 (2.8), 此时方程 (2.6) 的整函数解形如

$$f(z)=r_4\mathrm{e}^{Mz}+\frac{\sqrt{p}\mathrm{e}^{Mz}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+2(b_1c_1+b_2c_2)M+(c_1^2+c_2^2)M^2}}\int_0^z \mathrm{e}^{-Mt}\mathrm{d}t,$$

其中 r_4 是$\mathbf{C}$中的任意常数.
或者情形 2:

$$c_1^2+c_2^2\neq 0,$$
$$b_1c_1+b_2c_2+(c_1^2+c_2^2)M=0,$$

即 (2.9), 此时方程 (2.6) 的整函数解形如

$$f(z)=r_5\mathrm{e}^{Mz}+\frac{\sqrt{p}}{D_{bc}}\mathrm{e}^{Mz}\int_0^z (c_2\cos h(t)-c_1\sin h(t))\mathrm{e}^{-Mt}\mathrm{d}t,$$

其中 $h(z)=-\dfrac{D_{bc}}{c_1^2+c_2^2}z+\mu_1$, 而 r_5,μ_1 都是$\mathbf{C}$中的任意常数.

情形二 $(c_2-\mathrm{i}c_1)(k'v-v'-Mv)-(b_2-\mathrm{i}b_1)v\neq 0$.

此时必然有

$$(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u+Mu)+(b_2+\mathrm{i}b_1)u\neq 0.$$

否则, 若 $(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u+Mu)+(b_2+\mathrm{i}b_1)u=0$, 根据 (3.11) 可知

$$(c_2-\mathrm{i}c_1)(k'v-v'-Mv)-(b_2-\mathrm{i}b_1)v=[(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u+Mu)+(b_2+\mathrm{i}b_1)u]\mathrm{e}^{2k}=0,$$

矛盾, 于是

$$\mathrm{e}^{2k}=\frac{(c_2-\mathrm{i}c_1)(k'v-v'-Mv)-(b_2-\mathrm{i}b_1)v}{(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+k'u+Mu)+(b_2+\mathrm{i}b_1)u}. \tag{3.12}$$

此时可以断定 k 必为$\mathbf{C}$上的常数, 下面利用反证法证明. 假设 k 为定义在$\mathbf{C}$上的非常整函数, 那么有

$$\log r = o(T(r,k))(r\to+\infty).$$

又因为 p 是定义在$\mathbf{C}$上不恒为 0 的多项式函数, 而 u 和 v 都是 p 的因式, 且 $p=uv$, 所以有

$$\begin{aligned}T(r,u)=O(\log r)=O(o(T(r,k)))=o(T(r,k))(r\to+\infty),\\ T(r,v)=O(\log r)=O(o(T(r,k)))=o(T(r,k))(r\to+\infty).\end{aligned}$$

再根据引理 3.1, 引理 3.2 与引理 3.3 可知, 对于 (3.12), 除去一个有限测度集后有

$$\begin{aligned}T(r,k)&=o(T(r,\mathrm{e}^{2k}))=o(O(T(r,k')+T(r,u')+T(r,v')+T(r,u)+T(r,v)))\\ &=o(T(r,k))+o(T(r,u))+o(T(r,v))=o(T(r,k))(r\to+\infty).\end{aligned}$$

矛盾, 因此 k 为$\mathbf{C}$上的常数, 此时有 $k'=0$, 代入 (3.11) 可得

$$[(c_2+\mathrm{i}c_1)(u'+Mu)+(b_2+\mathrm{i}b_1)u]l^2=(\mathrm{i}c_1-c_2)(v'+Mv)-(b_2-\mathrm{i}b_1)v,$$

其中 $l=\mathrm{e}^k$ 为$\mathbf{C}$中的非零常数, 即 (2.7) 成立, 再通过解关于 f 的一阶线性常微分方程 (3.9) 可得

$$f=r_3\mathrm{e}^{Mz}+\mathrm{e}^{Mz}\int_0^z\frac{l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u+(c_2-\mathrm{i}c_1)v}{2lD_{bc}}\mathrm{d}t, \tag{3.13}$$

其中 r_3 是$\mathbf{C}$中的任意常数.

下面断言 $M=0$. 考虑到

$$\begin{aligned}&a_1f+b_1f'+c_1f''\\ =&(a_1+b_1M+c_1M^2)\cdot\left[r_3+\int_0^z\frac{l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u+(c_2-\mathrm{i}c_1)v}{2lD_{bc}}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{Mz}\\ &+\left\{(b_1+2c_1M)[l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u+(c_2+\mathrm{i}c_1)v]+c_1[l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u'+(c_2+\mathrm{i}c_1)v']\right\}\frac{\mathrm{e}^{Mz}}{2lD_{bc}}.\end{aligned}$$

又因为 $D_{ca}^2=D_{ab}D_{bc}$, 所以有

$$a_1+b_1M+c_1M^2=\frac{a_1D_{bc}+b_1D_{ca}+c_1D_{ab}}{D_{bc}}=\frac{1}{D_{bc}}\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=0.$$

结合 (2.7) 可得

$$\begin{aligned}&a_1f+b_1f'+c_1f''\\ =&\{(b_1+2c_1M)[l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u+(c_2+\mathrm{i}c_1)v]+c_1[l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u'+(c_2+\mathrm{i}c_1)v']\}\frac{\mathrm{e}^{Mz}}{2lD_{bc}}\\ =&\{l^2[D_{bc}+c_1(c_2+\mathrm{i}c_1)M]u+[D_{bc}+c_1(c_2-\mathrm{i}c_1)M]v\}\frac{\mathrm{e}^{Mz}}{2lD_{bc}}.\end{aligned}$$

同理亦有

$$a_2f+b_2f'+c_2f''=\{l^2[D_{bc}-c_2(c_1-\mathrm{i}c_2)M]u-[D_{bc}-c_2(c_1+\mathrm{i}c_2)M]v\}\frac{\mathrm{e}^{Mz}}{2\mathrm{i}lD_{bc}}.$$

再结合 (3.7) 和 (3.8) 可知

$$\{l^2[D_{bc}+c_1(c_2+\mathrm{i}c_1)M]u+[D_{bc}+c_1(c_2-\mathrm{i}c_1)M]v\}\frac{\mathrm{e}^{Mz}}{D_{bc}}=l^2u+v,$$
$$\{l^2[D_{bc}-c_2(c_1-\mathrm{i}c_2)M]u-[D_{bc}-c_2(c_1+\mathrm{i}c_2)M]v\}\frac{\mathrm{e}^{Mz}}{D_{bc}}=l^2u-v.$$

考虑到 u 和 v 都是$\mathbf{C}$上不恒为 0 的多项式函数, 所以必然有 $M=0$, 于是 $D_{ca}=0$, 从而

$$D_{ab}=\frac{D_{ca}^2}{D_{bc}}=0.$$

即 $a_1=a_2=0$, 进而可得方程 (2.6) 的整函数解为

$$f=r_3+\int_0^z\frac{l^2(c_2+\mathrm{i}c_1)u+(c_2-\mathrm{i}c_1)v}{2lD_{bc}}\mathrm{d}t,$$

其中 r_3 是$\mathbf{C}$中的任意常数.

参 考 文 献

[1] Montel P. Lecons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications[J]. Paris: Gauthier-Villars., 1927: 135–136.

[2] Cartan H. Sur les zeros des combinaisons lineaires de p fonctions holomorphers donnees[J]. Mathematica, 1933, 7: 5–31.

[3] Iyer V G. On certain functional equations[J]. The Journal of the Indian Mathematical Society, 1939, 3: 312–315.

[4] Yang C C, Li P. On the transcendental solutions of a certaintype of nonlinear differential equations[J]. Archiv der Mathematik, 2004, 82(5): 442–448.

[5] Tang J F, Liao L W. The transcendental meromorphic solutions of a certain type of nonlinear differential equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 334(1): 517–527.

[6] Liu K, Dong X J. Fermat type differential and difference equations[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2015, 2015(159): 1–10.

[7] Han Q, Lü F. On the functional equation $f^n(z)+g^n(z)=\mathrm{e}^{\alpha z+\beta}$[J]. Journal of Contemporary Mathematical Analysis, 2019, 54(2): 98–102.

[8] Luo J, Xu H Y, Hu F. Entire solutions for several general quadratic trinomial differential difference equations[J]. Open Mathematics, 2021, 19(1): 1018–1028.

[9] Li B Q. Entire solutions of eiconal type equations[J]. Archiv der Mathematik, 2007, 89(4): 350–357.

[10] Li B Q. Entire solutions of $u_{z_1}^m+u_{z_2}^n=\mathrm{e}^g$[J]. Nagoya Mathematical Journal, 2005, 178: 151–162.

[11] Stoll W. Introduction to the value distribution theory of meromorphic functions[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[12] Vitter A. The lemma of the logarithmic derivative in several complex variables[J]. Duke Mathematical Journal, 1977, 44(1): 89–104.

[13] Chang D C, Li B Q, Yang C C. On composition of meromorphic functions in several complex variables[J]. Forum Mathematicum, 1995, 7: 77–94.

[14] Yi H X, Yang C C. Uniqueness theory of meromorphic functions[M]. Beijin: Science Press, 2003.

[15] Wang H, Xu H, Tu J. The existence and forms of solutions for some Fermat-type differential-difference equations[J]. AIMS Mathematics, 2020, 5(1): 685–700.

[16] Laine I. Nevanlinna theory and complex differential equations[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.

[17] Li B Q. On meromorphic solutions of $f^2 + g^2 = 1$[J]. Mathematische Zeitschrift, 2007, 258(4): 763–771.

[18] Gross F. On the equation $f^n + g^n = 1$[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1966, 72(1): 86–88.

[19] Gross F. On the functional equation $f^n + g^n = h^n$[J]. The American Mathematical Monthly, 1966, 73(10): 1093–1096.

ON ENTIRE SOLUTIONS OF THE SECOND-ORDER FERMAT-TYPE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ZHANG Yu, YANG Liu

(*Department of Applied Mathematics, Anhui University of Technology, Maanshan 243032, China*)

Abstract: This article investigates the problem of the entire function solution of second-order Fermat type ordinary differential equation $(a_1f + b_1f' + c_1f'')^2 + (a_2f + b_2f' + c_2f'')^2 = \gamma$, where γ is the entire function on $\mathbf{C}$. Using the method of Nevanlinna value distribution theory, we obtain the necessary and sufficient conditions for the existence of an entire function solution to the equation, and provide the expression of the solution.

Keywords: second-order Fermat-type ordinary differential equation; Nevanlinna value distribution theory; entire function

2010 MR Subject Classification: 39B32; 34M05; 30D35