

## 修正 $q$ -Szász-Kantorovich 算子在紧圆盘的复逼近 ( $q > 1$ )

闫丽新, 韩领兄

(内蒙古民族大学数学科学学院, 内蒙古 通辽 028000)

**摘要:** 本文给出了修正  $q$ -Szász-Kantorovich 算子在复空间的定义, 参照 Gal S G 等人在文献 [10] 的方法, 研究了当  $q > 1$  时修正  $q$ -Szász-Kantorovich 算子在紧圆盘对解析函数的逼近性质, 获得了 Voronovskaja 结果, 并给出其精确估计, 丰富了修正  $q$ -Szász-Kantorovich 算子在复空间的逼近性质.

**关键词:** 修正  $q$ -Szász-Kantorovich 算子; 逼近性质; Voronovskaja 型结果

MR(2010) 主题分类号: 41A17; 41A25

中图分类号: O174.41

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2024)03-0247-12

### 1 预备知识与主要结果

我们要用到以下符号<sup>[1]</sup>. 对  $\forall k > 0$

$$[k]_q := \begin{cases} \frac{1 - q^k}{1 - q}, & q > 0, q \neq 1 \\ k, & q = 1 \end{cases}$$

对  $\forall k \in \mathbb{N}$

$$[k]_q! := [1]_q [2]_q \cdots [k]_q, [0]! = 1.$$

对整数  $0 \leq k \leq n$ ,  $q$ -二项式系数定义为

$$\binom{n}{k}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!}.$$

对固定  $q > 1$ ,  $q$ -导数定义为

$$D_q f(z) = \begin{cases} \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}$$

若  $|q| > 1$  或  $0 < |q| < 1$  且  $|z| < \frac{1}{1-|q|}$ ,  $q$ -指数函数定义为

$$e_q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{[k]_q!}.$$

\*收稿日期: 2023-05-25

接收日期: 2023-07-10

基金项目: 内蒙古自然科学基金项目 (2020LH01007).

作者简介: 闫丽新 (1999-), 女, 吉林四平, 主要研究方向: 函数逼近论. E-mail: 2979821538@qq.com

通讯作者: 韩领兄, E-mail: hanlx2023@126.com

当  $|q| > 1$  时,  $e_q(z)$  是整函数且有

$$e_q(z) = \prod_{j=0}^{\infty} \left( 1 + (q-1) \frac{z}{q^{j+1}} \right), |q| > 1.$$

关于算子在紧圆盘的复逼近的相关研究已经有很多了, 如参考文献 [2-4] 分别研究了复 Szász-Durrmeyer 算子、复 Baskakov-Stancu 算子和复 Baskakov-Kantorovich 算子在紧圆盘上对解析函数的逼近性质, 参考文献 [5,6] 则分别研究了 Bernstein-Durrmeyer 算子和 Durrmeyer 型 Bernstein-Stancu 算子在移动圆盘上的逼近性质, 但关于  $q$ -算子在紧圆盘上逼近问题的相关研究则相对较少 (参见文献 [7-10]). 对  $q > 1$ , 复  $q$ -szász-Mirakjan 算子定义为

$$S_{n,q}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) \frac{1}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}} \frac{[n]_q^k z^k}{[k]_q!} e_q(-[n]_q q^{-k} z).$$

上述算子在紧圆盘的逼近性质在文 [9] 中已研究. 2013 年 Gal S G 等人在文 [10] 中给出了  $q$ -Szász-Kantorovich 算子在紧圆盘的逼近性质. 2021 年程文韬, 周晓玲在文 [11] 中给出了修正  $q$ -Szász-Kantorovich 算子在连续函数空间的定义: 若  $f \in [0, \infty)$ ,  $q > 1$ , 对  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$K_{n,q}(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,q}^k(x) \int_0^1 f\left(\frac{[k]_q + t}{[n]_q}\right) d_q t,$$

其中  $s_{n,q}^k(x) = \frac{1}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}} \frac{[n]_q^k x^k}{[k]_q!} e_q(-[n]_q q^{-k} x)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ). 并得出以下结果:

**定理 1** [11] 若数列  $q_n$  满足  $q_n > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = a \in [1, \infty)$ , 则对  $\forall x \in [0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C_B^2[0, \infty)$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_{q_n} [K_{n,q_n}(f; x) - f(x)] = \frac{1}{2} f'(x) + \frac{1}{2} x f''(x)$ .

**定理 2** [11] 当序列  $q_n$  满足  $q_n \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 函数  $f \in C_B^2[0, \infty)$ , 则  $\forall x \in [0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 存在一个常数  $C > 0$ , 有

$$|K_{n,q_n}(f; x) - f(x)| \leq 4C\omega_2(f; \sqrt{B_{q_n}(x) + A_{q_n}^2(x)}) + \omega(f; |A_{q_n}(x)|),$$

其中  $A_{q_n}(x) = K_{n,q_n}(t-x; x)$ ,  $B_{q_n}(x) = K_{n,q_n}((t-x)^2; x)$ .

**定理 3** [11] 当函数  $f \in C_B[0, \infty)$ ,  $\gamma \in (0, 1]$ , 对于  $\forall x \in [0, \infty)$ , 有

$$|K_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq \widetilde{\omega}_r(f; x) B_q^{\frac{\gamma}{2}}(x).$$

**定理 4** [11] 令  $f \in C_B^2[0, \infty) \cap Lip_M(\gamma, E)$ ,  $\gamma \in (0, 1]$ , 其中  $E$  是区间  $[0, \infty)$  上的任意有界子集, 则对于  $q > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M > 0$ , 有

$$|K_{n,q}(f; x) - f(x)| \leq M(B_q^{\frac{\gamma}{2}}(x) + 2d^\gamma(x; E)),$$

其中  $d(x; E)$  是点  $x$  与空间  $E$  之间的距离, 即  $d(x; E) = \inf\{|t-x| : t \in E\}$ .

本文主要借鉴文献 [10] 的研究方法及思路研究修正  $q$ -Szász-Kantorovich 算子在  $q > 1$  时对复空间紧圆盘上解析函数的逼近性质. 首先根据修正的  $q$ -Szász-Kantorovich 算子在连续函数空间的定义, 本文给出其在复空间的定义:

$$K_{n,q}(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,q}^k(z) \int_0^1 f\left(\frac{[k]_q + t}{[n]_q}\right) d_q t,$$

其中  $s_{n,q}^k(z) = \frac{1}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}} \frac{[n]_q^k z^k}{[k]_q!} e_q(-[n]_q q^{-k} z)$ , ( $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ). 若  $f$  为紧圆盘  $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$  上的解析函数, 有  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ .

对  $1 < q < r'$ ,  $|z| < r'$  定义  $L_q(f; z) := \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q} f'(z) + \frac{D_q f(z) - f'(z)}{q-1}$ , 则有

$$\begin{aligned} L_q(f; z) &= \sum_{m=2}^{\infty} a_m \frac{[m]_q - m}{q-1} z^{m-1} + \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q} \sum_{m=1}^{\infty} a_m m z^{m-1} \\ &= \sum_{m=2}^{\infty} a_m ([1]_q + [2]_q + \dots + [m-1]_q) z^{m-1} + \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q} \sum_{m=1}^{\infty} a_m m z^{m-1} \\ &:= \sum_{m=1}^{\infty} a_m V_m^{(q)}(z), \end{aligned}$$

其中  $V_m^{(q)}(z) = ([1]_q + [2]_q + \dots + [m-1]_q) z^{m-1} + \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q} m z^{m-1}$ .

主要结果如下:

**定理 1.1** 令  $1 < q < \frac{r'}{4}$ ,  $f$  为  $\overline{D_{r'}} \cup [r', +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  的连续有界函数, 且在  $D_{r'}$  内解析, 即  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$  对  $\forall z \in D_{r'}$  成立.

(i) 若  $1 \leq r < \frac{r'}{4q}$ , 那么对  $\forall |z| \leq r$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 有

$$|K_{n,q}(f; z) - f(z)| \leq \frac{C_r(f)}{[n]_q},$$

其中  $C_r(f) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m(m+1) (4qr)^m$ .

(ii) 若  $1 \leq r < r_1 < \frac{r'}{4q}$ , 则对  $\forall |z| \leq r$  和  $n, p \in \mathbb{N}$ , 有

$$|K_{n,q}^{(p)}(f; z) - f^{(p)}(z)| \leq \frac{C_{r_1}(f)}{[n]_q} \frac{p! r_1}{(r_1 - r)^{p+1}},$$

其中  $C_{r_1}(f) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m(m+1) (4qr_1)^m$ .

下面定理给出了  $K_{n,q}(f; z)$  在紧圆盘的 Voronovskaja 型结果.

**定理 1.2**  $f$  为  $\overline{D_{r'}} \cup [r', +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  的连续有界函数且在  $D_{r'}$  上解析, 即  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$  对  $\forall z \in D_{r'}$  成立.

(i) 若  $1 \leq r < \frac{r'}{4q^2}$ , 对  $\forall z \in D_r$ ,  $n \in \mathbb{N}$  有

$$|K_{n,q}(f; z) - f(z) - \frac{1}{[n]_q} L_q(f; z)| \leq \frac{6}{[n]_q^2} \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1)^3 (4q^2 r)^m.$$

(ii) 若  $1 < q < r'$ , 则对  $1 \leq r < \frac{r'}{4q}$  有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_q \left( K_{n,q}(f; z) - f(z) \right) = L_q(f; z),$$

其中

$$L_q(f; z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m V_m^{(q)}(z), \quad z \in D_{r'},$$

$$V_m^{(q)}(z) = \left( [1]_q + [2]_q + \cdots + [m-1]_q \right) z^{m-1} + \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q} m z^{m-1}.$$

当  $m = 1$  时,  $[1]_q + [2]_q + \cdots + [m-1]_q = 0$ .

作为定理 1 和定理 2 的应用, 我们得到算子逼近的精确估计.

**定理 1.3** 假设  $f: \overline{D_{r'}} \cup [r', +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  在  $\overline{D_{r'}} \cup [r', +\infty)$  上连续有界且在  $D_{r'}$  内解析, 令  $1 \leq r < \frac{r'}{4q}$ , 若  $f$  在  $D_{r'}$  内不是常函数, 则  $\|K_{n,q}(f) - f\|_r \sim \frac{1}{[n]_q}$ , 其中等价中的常数取决于  $f, q$  和  $r$ , 但与  $n$  无关.

## 2 相关引理

为了证明上述定理, 先给出一些引理.

**引理 2.1** 令  $q > 1$ , 对  $\forall n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \cup 0, z \in \mathbb{C}$ , 有

$$K_{n,q}(e_m; z) = \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j+1]_q} S_{n,q}(e_j; z).$$

证

$$\begin{aligned} K_{n,q}(e_m; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,q}^k(z) \int_0^1 \left( \frac{[k]_q + t}{[n]_q} \right)^m d_q t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,q}^k(z) \int_0^1 \frac{\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} [k]_q^j t^{m-j}}{[n]_q^m} d_q t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_{n,q}^k(z) \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} [k]_q^j \frac{1}{[m-j+1]_q} \\ &= \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j+1]_q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]_q^j}{[n]_q^j} s_{n,q}^k(z) \\ &= \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j+1]_q} S_{n,q}(e_j; z). \end{aligned}$$

**引理 2.2** 对  $\forall z \in \mathbb{C}$ , 有

$$|K_{n,q}(e_m; z)| \leq (4qr)^m.$$

证 由文献 [9] 得  $|S_{n,q}(e_j; z)| \leq (2qr)^j$ , 从而有

$$\begin{aligned} |K_{n,q}(e_m; z)| &\leq \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j+1]_q} |S_{n,q}(e_j; z)| \\ &\leq \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j+1]_q} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q^j}{[n]_q^j} s_{n,q}^k(z) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( 1 + [k]_q \right)^m}{[n]_q^m} s_{n,q}^k(z) \\ &\leq (4qr)^m. \end{aligned}$$

引理 2.3 对  $\forall n, m \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $q > 1$ , 有

$$K_{n,q}(e_m; z) = \frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) + z K_{n,q}(e_{m-1}; z) \\ + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z).$$

证 由文献 [9] 得  $S_{n,q}(e_{k+1}; z) = \frac{z}{[n]_q} D_q S_{n,q}(e_k; z) + z S_{n,q}(e_k; z)$ , 从而

$$\frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j-1} [m-j]_q} \left( S_{n,q}(e_{j+1}; z) - z S_{n,q}(e_j; z) \right) \\ = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j-1} [m-j]_q} S_{n,q}(e_{j+1}; z) \\ - \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{z}{[n]_q^{m-j-1} [m-j]_q} S_{n,q}(e_j; z) \\ = \sum_{j=1}^m \binom{m-1}{j-1} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} S_{n,q}(e_j; z) - z K_{n,q}(e_{m-1}; z).$$

由上式及引理 2.1 有

$$K_{n,q}(e_m; z) = \frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) + z K_{n,q}(e_{m-1}; z) \\ + \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j+1]_q} S_{n,q}(e_j; z) \\ - \sum_{j=1}^m \binom{m-1}{j-1} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} S_{n,q}(e_j; z) \\ = \frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) + z K_{n,q}(e_{m-1}; z) \\ + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z).$$

记  $E_{n,m}(z) = K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z) - \frac{1+[2]_q}{[2]_q [n]_q} m z^{m-1} - \sum_{k=1}^{m-1} [k]_q \frac{z^{m-1}}{[n]_q}$ .

引理 2.4 令  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $q > 1$ , 有

$$E_{n,m}(z) = \frac{z}{[n]_q} D_q \left[ K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z) \right] + z E_{n,m-1}(z) \\ - \frac{1+[2]_q}{[2]_q [n]_q} z^{m-1} + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z).$$

证

$$\begin{aligned}
& E_{n,m}(z) \\
&= \frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) + z K_{n,q}(e_{m-1}; z) + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z) \\
&\quad - e_m(z) - \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q [n]_q} m z^{m-1} - \sum_{k=1}^{m-1} [k]_q \frac{z^{m-1}}{[n]_q} \\
&= \frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) + z \left[ E_{n,m-1}(z) + e_{m-1}(z) + \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q [n]_q} (m-1) z^{m-2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{m-2} [k]_q \frac{z^{m-2}}{[n]_q} \right] + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z) \\
&\quad - e_m(z) - \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q [n]_q} m z^{m-1} - \sum_{k=1}^{m-1} [k]_q \frac{z^{m-1}}{[n]_q} \\
&= \frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) + z E_{n,m-1}(z) - \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q [n]_q} z^{m-1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z) - [m-1]_q \frac{z^{m-1}}{[n]_q} \\
&= \frac{z}{[n]_q} D_q \left[ K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z) \right] + z E_{n,m-1}(z) - \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q [n]_q} z^{m-1} \\
&\quad + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z).
\end{aligned}$$

### 3 定理的证明

定理 1.1 的证明

(i) 由引理 2.3

$$\begin{aligned}
K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z) &= \frac{z}{[n]_q} D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z) + z \left( K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z) \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z) \right| \\
&= \left| \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{m}{m-j} \frac{[n]_q^j}{[m-j+1]_q} \frac{m-j}{m} S_{n,q}(e_j; z) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j]_q} S_{n,q}(e_j; z) \right| \\
&\leq \frac{[n]_q^{m-1}}{[n]_q^m} \left| \frac{1}{[n]_q^{m-1}} \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{[n]_q^j}{[m-j]_q} S_{n,q}(e_j; z) \right| \\
&\leq \frac{|K_{n,q}(e_{m-1}; z)|}{[n]_q} \leq \frac{(4qr)^{m-1}}{[n]_q}.
\end{aligned}$$

由  $|P'_m(z)| \leq \frac{m}{qr} \|P_m\|_{qr}$ , 对  $\forall |z| \leq qr, r \geq 1$ . 这里  $\|P_m\|_{qr} = \max\{|P_m(z)| : |z| \leq qr\}$ .

$$\begin{aligned} |K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z)| &= \frac{z}{[n]_q} |D_q K_{n,q}(e_{m-1}; z)| + z |K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z)| + \frac{(4qr)^{m-1}}{[n]_q} \\ &\leq \frac{r}{[n]_q} \frac{m-1}{qr} \|K_{n,q}(e_{m-1})\|_{qr} + r |K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z)| + \frac{(4qr)^{m-1}}{[n]_q} \\ &\leq r |K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z)| + \frac{m-1}{q[n]_q} (4qr)^{m-1} + \frac{(4qr)^{m-1}}{[n]_q} \\ &\leq r |K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z)| + \frac{m}{[n]_q} (4qr)^{m-1}. \end{aligned}$$

通过数学归纳法可得

$$|K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z)| \leq \frac{m(m+1)(4qr)^{m-1}}{2[n]_q} \leq \frac{m(m+1)}{2[n]_q} (4qr)^m.$$

由于  $K_{n,q}(f; z)$  在  $D_r$  内解析, 我们可以写  $K_{n,q}(f; z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m K_{n,q}(e_m; z), z \in D_r$ . 事实上, 为了这个目的, 对任意  $m \in \mathbb{N}$ , 我们定义  $f_m(z) = \sum_{j=0}^m c_j z^j$ , 若  $|z| \leq r; f_m(x) = f(x)$ , 若  $x \in (r, \infty)$ . 从  $f$  的假设可知对任意  $m \in \mathbb{N}$ , 有  $|f_m(x)| \leq C_{m,r}$  对所有  $x \in [0, \infty)$  成立. 这导致对每一固定的  $n, m \in \mathbb{N}$  和  $z$  有

$$|K_{n,q}(f_m; z)| \leq C_{m,r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q^{\frac{j(j-1)}{2}}} \frac{[n]_q^j z^j}{[j]_q!} e_q(-[n]_q q^{-j} z) < \infty.$$

现在定义  $f_{m,k}(z) = c_k e_k(z)$ , 若  $|z| \leq r; f_{m,k}(x) = \frac{f(x)}{m+1}$ , 若  $x \in (r, \infty)$ . 显然  $f_{m,k}$  在  $[0, \infty)$  是有界的且  $f_m(z) = \sum_{k=0}^m f_{m,k}(z)$ . 由  $K_{n,q}$  的线性, 我们有  $K_{n,q}(f_m)(z) = \sum_{k=0}^m c_k K_{n,q}(e_k)(z)$ , 对  $\forall |z| \leq r$  成立. 通过

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_r = 0, \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \leq \|f_m - f\|_r$$

和不等式

$$|K_{n,q}(f_m)(z) - K_{n,q}(f)(z)| \leq M_{r,n} \cdot \|f_m - f\|_{B[0,+\infty)} \leq M_{r,n} \cdot \|f_m - f\|_r$$

对任意  $|z| \leq r$  成立, 足以证明  $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{n,q}(f_m)(z) = K_{n,q}(f)(z)$  对每一固定  $n \in \mathbb{N}$  和  $|z| \leq r$  成立. 这里  $\|\cdot\|_{B[0,+\infty)}$  定义为在  $C[0, \infty)$  上的一致范数,  $C[0, \infty)$  表示所有在  $[0, \infty)$  上的实值有界的函数所构成的空间.

对  $\forall |z| \leq r$ , 有

$$|K_{n,q}(f; z) - f(z)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| |K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z)| \leq \frac{1}{2[n]_q} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m(m+1)(4qr)^m := \frac{C_r f}{[n]_q},$$

其中  $C_r(f) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m(m+1)(4qr)^m$ .

(ii) 定义  $\gamma$  为圆心为  $o$  半径为  $r_1 > r$  的圆, 对每一  $|z| \leq r$  和  $v \in \gamma$ , 我们有  $|v-z| \geq r_1-r$ . 由参考文献 (12) 有: 对任意  $|z| \leq r$  和  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |K_{n,q}^{(P)}(f; z) - f^{(P)}(z)| &\leq \frac{P!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{K_{n,q}(f; v) - f(v)}{(v-z)^{p+1}} dv \right| \\ &\leq \frac{1}{2[n]_q} \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m(m+1) (4qr)^m \frac{P!}{2\pi} \frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{p+1}} \\ &:= \frac{C_{r_1} f}{[n]_q} \frac{P! r_1}{(r_1-r)^{p+1}}. \end{aligned}$$

定理 1.2 的证明

(i) 由引理 2.4

$$\begin{aligned} E_{n,m}(z) &= \frac{z}{[n]_q} D_q \left[ K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z) \right] + z E_{n,m-1}(z) - \frac{1 + \frac{[2]_q}{z}}{[2]_q [n]_q} z^{m-1} \\ &\quad + \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left( 1 - \frac{j}{m} \right) S_{n,q}(e_j; z) \\ &= \frac{z}{[n]_q} D_q \left[ K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z) \right] + z E_{n,m-1}(z) \\ &\quad + \frac{1}{[2]_q [n]_q} \left( S_{n,q}(e_{m-1}; z) - z^{m-1} \right) - \frac{1}{[n]_q} \left( z^{m-2} - S_{n,q}(e_{m-2}; z) \right) \\ &\quad + \frac{1}{[n]_q} \left( \frac{m-1}{[n]_q [3]_q} - 1 \right) S_{n,q}(e_{m-2}; z) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{m-3} \binom{m}{j} \frac{1}{[n]_q^{m-j} [m-j+1]_q} \left( 1 - \frac{j}{m} \right) S_{n,q}(e_j; z) \\ &:= \sum_{i=1}^6 I_i. \end{aligned}$$

由文献 [9] 可得  $|z^m - S_{n,q}(e_m; z)| \leq \frac{2(m-1)}{[n]_q} (2qr)^{m-1}$ , 从而

$$|I_3| \leq \frac{2(m-2)}{[2]_q [n]_q^2} (2qr)^{m-2} \leq \frac{(m-2)}{[n]_q^2} (2qr)^{m-2};$$

$$|I_4| \leq \frac{2(m-3)}{[n]_q^2} (2qr)^{m-3};$$

$$|I_5| \leq \frac{(m-1)}{[n]_q^2} (2qr)^{m-2}.$$

即

$$|I_3| + |I_4| + |I_5| \leq \frac{m-2 + 2(m-3) + (m-1)}{[n]_q^2} (2qr)^{m-2} \leq \frac{4(m-2)}{[n]_q^2} (2qr)^{m-2},$$

$$\begin{aligned}
|I_6| &= \sum_{j=0}^{m-3} \binom{m-3}{j} \frac{(m-2)(m-1)m}{(m-j-2)(m-j-1)(m-j)} \frac{1}{[n]_q^{m-j}[m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m}\right) S_{n,q}(e_j; z) \\
&= \frac{1}{[n]_q^3} \sum_{j=0}^{m-3} \binom{m-3}{j} \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{(m-j-3)(m-j-2)(m-j-1)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{[n]_q^{m-j-3}[m-j+1]_q} \left(1 - \frac{j}{m-3}\right) S_{n,q}(e_j; z) \\
&\leq \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{[n]_q^3} (4qr)^{m-3}.
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
E_{n,m}(z) &\leq \frac{r}{[n]_q} D_q \left[ K_{n,q}(e_{m-1}; z) - e_{m-1}(z) \right] + r |E_{n,m-1}(z)| \\
&\quad + \frac{4(m-2)}{[n]_q^2} (2qr)^{m-2} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{[n]_q^3} (4qr)^{m-3} \\
&\leq \frac{r}{[n]_q} \frac{m-1}{qr} \frac{m(m-1)}{2[n]_q} (4qr)^{m-1} + r |E_{n,m-1}(z)| \\
&\quad + \frac{4(m-2)}{[n]_q^2} (2qr)^{m-2} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{[n]_q^3} (4qr)^{m-3} \\
&\leq \frac{m(m-1)^2}{2[n]_q^2} (4q^2r)^{m-1} + r |E_{n,m-1}(z)| \\
&\quad + \frac{4(m-2)}{[n]_q^2} (4qr)^{m-1} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{[n]_q^3} (4qr)^{m-1} \\
&\leq r |E_{n,m-1}(z)| + \frac{m(m-1)^2 + 8(m-2) + 2(m-3)(m-2)(m-1)}{2[n]_q^2} (4q^2r)^{m-1} \\
&\leq r |E_{n,m-1}(z)| + \frac{6m(m-1)^2}{[n]_q^2} (4q^2r)^{m-1}.
\end{aligned}$$

应用数学归纳法可得

$$|E_{n,m}(z)| \leq \frac{6m(m-1)^3}{[n]_q^2} (4q^2r)^m.$$

所以

$$\left| K_{n,q}(f; z) - f(z) - \frac{1}{[n]_q} L_q(f; z) \right| \leq \frac{6}{[n]_q^2} \sum_{m=2}^{\infty} |a_m| m(m-1)^3 (4q^2r)^m.$$

(ii) 令  $1 \leq r < \frac{r'}{4q}$ , 当  $t \rightarrow 0$  时,  $\frac{r'}{4q^{1+t}} \rightarrow \frac{r'}{4q}$ , 显然当  $1 \leq r < \frac{r'}{4q}$  时, 存在  $t \in (0, 1)$  使得  $4q^{1+t}r < r'$ . 因为  $f$  在  $D_{r'}$  内解析, 所以有

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m^4 q^{(1+t)m} (4r)^m = \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| m^4 \left(4q^{(1+t)}r\right)^m < \infty,$$

对  $\forall z \in \overline{D_r}$  成立.

同样有序列  $\sum_{m=1}^{\infty} |a_m|(m+1)^2(4qr)^m$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n_0$  使得  $\sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m|(m+1)^2(4qr)^m < \varepsilon$ . 因为  $q^{2m} \leq q^2[m]_q^2$ , 对  $\forall z \in \overline{D_r}$ ,  $n > n_0$  有

$$\begin{aligned} & |[n]_q \left( K_{n,q}(f; z) - f(z) \right) - L_q(f; z)| \\ & \leq \sum_{m=0}^{n_0} |a_m| |[n]_q \left( K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z) \right) - V_m^q(z)| \\ & \quad + \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| \left( [n]_q |K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z)| + |V_m^q(z)| \right) \\ & \leq \sum_{m=0}^{n_0} |a_m| \frac{6m(m-1)^3}{[n]_q} (4q^2r)^m + \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| \left( [n]_q |K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z)| + |V_m^q(z)| \right) \\ & \leq q^2 \sum_{m=0}^{n_0} |a_m| \frac{6m(m-1)^3 [m]_q^2}{[n]_q} (4r)^m + \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| \left( [n]_q |K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z)| + |V_m^q(z)| \right). \end{aligned}$$

因为  $|K_{n,q}(e_m, z) - z^m| \leq \frac{m(m+1)}{2[n]_q} (4qr)^m$  对  $\forall z \in \overline{D_r}$  成立, 由  $[1]_q + [2]_q + \cdots + [m-1]_q \leq (m-1)[m-1]_q$  可得

$$\begin{aligned} |V_m^q(z)| & \leq (m-1)[m-1]_q r^{m-1} + \frac{3}{2} m r^{m-1} \\ & \leq (m-1)^2 (qr)^{m-1} + \frac{3}{2} m r^{m-1}, \end{aligned}$$

所以对  $\forall z \in \overline{D_r}$  有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| \left( [n]_q |K_{n,q}(e_m; z) - e_m(z)| + |V_m^q(z)| \right) \\ & \leq \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| \left[ \frac{m(m+1)}{2} (4qr)^m + (m-1)^2 (qr)^{m-1} + \frac{3}{2} m r^m \right] \\ & \leq \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| \left[ \frac{m(m+1)}{2} + (m-1)^2 + \frac{3}{2} m \right] (4qr)^m \\ & \leq \frac{3}{2} \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| (m+1)^2 (4qr)^m. \end{aligned}$$

综上, 对  $\forall z \in \overline{D_r}$  且  $n > n_0$ , 我们有

$$\begin{aligned} & |[n]_q \left( K_{n,q}(f; z) - f(z) \right) - L_q(f; z)| \\ & \leq q^2 \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| \frac{6m(m-1)^3 [m]_q^2}{[n]_q} (4r)^m + \frac{3}{2} \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| (m+1)^2 (4qr)^m \\ & \leq 6q^2 \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| \frac{m^4 [m]_q^2}{[n]_q} (4r)^m + \frac{3}{2} \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| (m+1)^2 (4qr)^m \\ & \leq \frac{6q^2}{[n]_q^t} \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| \frac{m^4 [m]_q^2}{[n]_q^{1-t}} (4r)^m + \frac{3}{2} \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| (m+1)^2 (4qr)^m \\ & \leq \frac{6q^2}{[n]_q^t} \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| \frac{m^4 [m]_q^2}{[m]_q^{1-t}} (4r)^m + \frac{3}{2} \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| (m+1)^2 (4qr)^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{6q^2}{[n]_q^t} \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| m^4 [m]_q^{1+t} (4r)^m + \frac{3}{2} \sum_{m=n_0+1}^{\infty} |a_m| (m+1)^2 (4qr)^m \\ &\leq \frac{6q^2}{[n]_q^t (q-1)^{1+t}} \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| m^4 q^{(1+t)m} (4r)^m + \frac{3}{2} \varepsilon, \end{aligned}$$

当  $n \rightarrow \infty$  时  $\frac{6q^2}{[n]_q^t (q-1)^{1+t}} \rightarrow 0$ ,

$$\sum_{m=1}^{n_0} |a_m| m^4 q^{(1+t)m} (4r)^m = \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| m^4 (4q^{1+t}r)^m < \infty,$$

所以对给定  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n_1$  使得当  $n > n_1$  时, 有

$$\frac{6q^2}{[n]_q^t (q-1)^{1+t}} \sum_{m=1}^{n_0} |a_m| m^4 q^{(1+t)m} (4r)^m < \frac{\varepsilon}{2},$$

即对任意  $n > \max(n_0, n_1)$ ,  $z \in \overline{D}_r$ , 有

$$|[n]_q \left( K_{n,q}(f; z) - f(z) \right) - L_q(f; z)| \leq 2\varepsilon.$$

定理 1.3 的证明

假设对对  $\forall z \in D_{r'}$  有  $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$  的  $f$  是  $K_{n,q}(f)$  近似逼近阶比  $\frac{1}{[n]_q}$  更好的函数, 有对  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\|K_{n,q}(f) - f\|_r \leq M \frac{S_n}{[n]_q}$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $S_n \rightarrow 0$ . 这意味着

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_q \|K_{n,q}(f) - f\|_r = 0.$$

由定理 2(ii) 立即可有  $L_q(f; z) = 0$  对  $\forall z \in \overline{D}_r$  成立. 但若  $L_q(f; z) = 0$ , 则有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{[2]_q} \sum_{m=1}^{\infty} m a_m z^{m-1} + \sum_{m=2}^{\infty} m a_m z^{m-2} + \sum_{m=2}^{\infty} a_m \sum_{k=1}^{m-1} [k]_q z^{m-1} = 0, \\ &\frac{1}{[2]_q} \sum_{m=1}^{\infty} m a_m z^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) a_{m+1} z^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+1} \sum_{k=1}^m [k]_q z^m = 0, \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{1}{[2]_q} (m+1) a_{m+1} + (m+2) a_{m+2} \right) z^m + \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+1} \sum_{k=1}^m [k]_q z^m = 0, \end{aligned}$$

对  $\forall z \in \overline{D}_{r'} \setminus \{0\}$  成立. 因此我们有  $a_m = 0, m = 1, 2, 3, \dots$ , 可知  $f$  是一个常数与假设矛盾. 所以若  $f$  不是一个常函数, 则逼近阶不可能比  $\frac{1}{[n]_q}$  更好. 结合定理 1 得证.

## 参 考 文 献

- [1] Kac V, Cheung P. Quantum Calculus[M]. New York: Springer, 2002.
- [2] Gal S G, Gupta V. Approximation by complex Szász-Durrmeyer operators in compact disks[J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34(4): 1157–1165.

- [3] Gal S G, Gupta V, Verma D K, et al. Approximation by complex Baskakov-Stancu operators in compact disks[J]. Rend. Circ. Mat. Palermo, 2012, 61(2): 153–165.
- [4] 李文霞, 齐秋兰. Baskakov-Kantorovich 算子在紧圆盘上的复逼近性质 [J]. 数学物理学报, 2018, 38(04): 641–648.
- [5] 庞兆璠, 虞旦盛, 周平. 移动紧圆盘上 Bernstein-Durrmeyer 型算子的逼近 [J]. 数学物理学报, 2020, 40(03): 545–555.
- [6] 庞兆璠, 虞旦盛. 移动紧圆盘上 Durrmeyer 型 Bernstein-Stancu 算子的逼近 [J]. 杭州师范大学学报 (自然科学版), 2020, 19(01): 87–91.
- [7] Ren M Y, Zeng X M. Approximation by complex  $q$ -Bernstein-Schurer operators in compact disks[J]. Georgian Mathematical Journal, 2013, 20(2): 377–395.
- [8] Gupta V, Yadav R. Approximation by complex summation-integral type operator in compact disks[J]. Mathematica Slovaca., 2013, 63(5): 1025–1036.
- [9] Mahmudov N I. Approximation properties of complex  $q$ -Szász - Mirakjan operators in compact disks[J]. Computers Mathematics with Applications, 2010, 60(6): 1784–1791.
- [10] Gal S G, Mahmudov N I, Kara M. Approximation by complex  $q$ -Szász - Kantorovich operators in compact disks( $q > 1$ )[J]. Complex Anal. Oper., 2013, 7(6): 1853–1867 .
- [11] 程文韬, 周晓玲. 修正  $q$ -Szász-Kantorovich 算子逼近性质 [J]. 安庆师范大学学报 (自然科学版), 2021, 27(3): 18–21.
- [12] 杨阔, 张小琴, 宋永. 复变函数中一个重要积分不等式的应用 [J]. 吉林省教育学院学报 (下旬), 2013, 29(08): 153–154.

## COMPLEX APPROXIMATION BY MODIFIED $q$ -SZÁSZ KANTOROVICH OPERATOR IN COMPACT DISKS( $q > 1$ )

YAN Li-xin, HAN Ling-xiong

(School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia Minzu University, Tongliao 028000, China)

**Abstract:** In this paper, the definition of the modified  $q$ -Szász-Kantorovich operator in complex spaces is given, referring to the method of Gal S G et al. [10], and the approximation properties of the modified  $q$ -Szász-Kantorovich operator in compact disks when  $q > 1$  are studied. Voronovskaja results are obtained, and their exact estimates are given, which enrich the approximation properties of the modified  $q$ -Szász-Kantorovich operator in complex spaces.

**Keywords:** the modified  $q$ -Szász-Kantorovich operator; Approximation properties; Voronovskaja type results

**2010 MR Subject Classification:** 41A17; 41A25