

具有周期系数的线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性

董居悦, 谢峰
(东华大学理学院, 上海 201620)

摘要: 本文研究了具有周期系数的一阶和二阶线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 利用常数变易法, 获得了其 Hyers-Ulam 稳定性的充分必要条件, 推广了具有周期系数的一阶齐次线性微分方程 Hyers-Ulam 稳定性的相关结果.

关键词: Ulam 型稳定性; 线性微分方程; 周期系数; 充要条件

MR(2010) 主题分类号: 34A30; 34A12

中图分类号: O175.13

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2024)03-0225-11

1 引言

1940 年 Ulam^[1] 提出了一个关于同态泛函方程稳定性的问题, 一年后 Hyers^[2] 首次做出回答, 而后 Rassias^[3] 提出并证明了 Hyers-Ulam 稳定性的一般情况, 此后, 众多研究者的积极贡献促进了 Ulam 型稳定性理论的进步^[4-7]. 1998 年, Alsina 和 Ger^[8] 首次将 Ulam 型稳定性的研究范围从泛函方程扩展到了微分方程领域, 引入了微分方程 Hyers-Ulam 稳定性的概念.

近二十年来, 微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性研究成为一个非常活跃的研究方向, 很多学者在该领域做了大量富有成效的工作, 将 Hyers-Ulam 稳定性陆续推广到各种线性微分方程、微分算子、差分方程和动力系统等方向上^[9,10]. 这些工作不仅推动了 Hyers-Ulam 稳定性研究的发展, 同时也丰富了微分方程(包括微分系统)的研究内容, 该方向的研究也被应用到了很多实际问题中.

对于一阶线性微分方程 $y' - \lambda(x)y = 0$, 我们知道, 若 $\lambda(x) \equiv 0$, 那么它在 \mathbb{R} 上不是 Hyers-Ulam 稳定的^[11], 但 $\lambda(x) \not\equiv 0$ 是更为普遍的情况. Fukutaka 和 Onitsuka^[12] 在该方程系数 $\lambda(x)$ 是连续周期函数的情况下, 获得了该方程在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的充分条件, 并进一步阐明了其 Hyers-Ulam 稳定性的最佳常数. 之后, Fukutaka 和 Onitsuka^[13] 又建立了具有周期系数的一阶齐次线性微分方程 Hyers-Ulam 稳定的充要条件.

与此同时, 学者们研究了二阶线性微分方程的 Ulam 稳定性. 2010 年, Li^[14] 研究了简单二阶线性微分方程 $y'' = \lambda^2 y$ 的 Ulam 型稳定性. 之后, 这一研究被推广到更一般的常系数微分方程^[15-17]. 此外, 关于二阶变系数线性微分方程的研究也很多^[18-21]. 然而, 目前对具有周期系数的二阶线性微分方程的 Ulam 稳定性的研究较少. Akbar Zada 等人^[22] 在一定条件下研究了一类具有周期系数的线性微分系统 Hyers-Ulam 稳定性与一致指数稳定的关

*收稿日期: 2023-10-08

接收日期: 2023-11-20

基金项目: 上海市自然科学基金资助 (21ZR1401000).

作者简介: 董居悦 (1999-), 女, 江苏苏州, 研究生, 主要研究方向: 常微分方程及应用.

E-mail: 1427381913@qq.com.

通讯作者: 谢峰, 男, 教授, 主要研究方向: 常微分方程与动力系统. E-mail: fxie@dhu.edu.cn.

系, Bakht Zada^[23] 对一类具有周期系数的时变线性系统的 Hyers-Ulam 稳定性进行了研究. Fukutaka 和 Onitsuka^[24] 建立了一类具有周期系数的 Hill 方程 $y'' - (\lambda^2(x) - \lambda'(x))y = 0$ 在 \mathbb{R} 上 Hyers-Ulam 稳定的充分必要条件并在 [25] 中得到了 Hill 方程 Hyers-Ulam 稳定的最佳常数. 受其启发, 本文将该理论推广至更一般的具有周期系数的线性微分方程 Hyers-Ulam 稳定性的研究中.

本文首先研究具有周期系数的一阶非齐次线性微分方程

$$y' - \lambda(x)y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

其中 $\lambda(x), f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的连续函数. 在得到该方程 Hyers-Ulam 稳定的充要条件的基础上, 研究具有周期系数的二阶齐次线性微分方程

$$y'' + m\lambda(x)y' - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

其中 $\lambda(x)$ 为 \mathbb{R} 上以 $\omega (> 0)$ 为周期的连续函数, $m \in \mathbb{R}$. 进而, 我们研究相应的二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + m\lambda(x)y' - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))y = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

其中 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的连续函数.

2 预备知识

本文中, $I = (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$.

定义 2.1^[26] 假设 $K > 0$, 任给 $\varepsilon > 0$, 若对于满足

$$|\varphi'(x) - \lambda(x)\varphi(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in I$$

的连续可微函数 $\varphi(x)$, 存在方程 (1.1) 的一个解 $y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, 使得

$$|\varphi(x) - y(x)| \leq K\varepsilon$$

对一切 $x \in I$ 都成立, 则称方程 (1.1) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的, K 为方程 (1.1) 在 I 上的一个 Ulam 常数 (HUS 常数).

定义 2.2 假设 $K > 0$, 任给 $\varepsilon > 0$, 若对于满足

$$|\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in I$$

的二阶连续可微函数 $\eta(x)$, 存在方程 (1.3) 在 I 上的解 $y(x)$, 使得

$$|\eta(x) - y(x)| \leq K\varepsilon, \quad x \in I$$

成立, 则称方程 (1.3) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的, K 为方程 (1.3) 在 I 上的一个 Ulam 常数 (HUS 常数). 若 $f(x) = 0$, 则方程 (1.2) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的, K 为方程 (1.2) 在 I 上的一个 Ulam 常数 (HUS 常数).

引理 2.1 ^[12] 假设 $\lambda(x)$ 为 \mathbb{R} 上以 $\omega > 0$ 为周期的连续函数, $A(x)$ 为 $\lambda(x)$ 在 \mathbb{R} 上的不定积分, 则

$$A(x + \omega) - A(x) = \int_0^\omega \lambda(s) ds$$

在 \mathbb{R} 上成立. 特别地, 当 $\int_0^\omega \lambda(s) ds = 0$ 时, $A(x + \omega) - A(x) = 0$ 在 \mathbb{R} 上恒成立.

进而, 恒有

$$\min_{x \in (0, \omega]} A(x) \leq A(x) \leq \max_{x \in (0, \omega]} A(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

本文中, 恒假设方程 (1.1), (1.2) 和 (1.3) 中的系数 $\lambda(x)$ 是 \mathbb{R} 上以 $\omega (> 0)$ 为周期的连续函数, 并记 $A(x), \Gamma^+(x), \Gamma^-(x)$ 分别为 $\lambda(x), e^{A(x)}, e^{-A(x)}$ 在 \mathbb{R} 上的不定积分.

3 具有周期系数的一阶线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性

本节考虑具有周期系数的一阶线性微分方程 (1.1). 首先给出方程 (1.1) 在 I 上 Hyers-Ulam 稳定的必要条件.

定理 3.1 如果 $\int_0^\omega \lambda(x) dx = 0, a = -\infty$ 或 $b = \infty$, 则方程 (1.1) 在 I 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

证 令 $A(x)$ 为 $\lambda(x)$ 在 \mathbb{R} 上的不定积分, 由于 $\int_0^\omega \lambda(x) dx = 0$, 根据引理 2.1, 我们有

$$\min_{x \in (0, \omega]} A(x) \leq A(x) \leq \max_{x \in (0, \omega]} A(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 定义函数

$$\Phi(x) = \left(\varepsilon \int_0^x e^{-A(s)} ds + c_1 \right) e^{A(x)},$$

$x \in I, c_1 \in \mathbb{R}$. 显然 $\Phi(x)$ 是方程 $\Phi'(x) - \lambda(x)\Phi(x) = \varepsilon$ 的解, 则 $|\Phi'(x) - \lambda(x)\Phi(x)| = \varepsilon, x \in I$.

假设 $u(x)$ 为方程 (1.1) 所对应的齐次微分方程 $y' - \lambda(x)y = 0$ 在 \mathbb{R} 上的任意一个解, 令 $\eta(x) = \Phi(x) + u(x)$. 于是对 $\forall x \in I$, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |\Phi'(x) - \lambda(x)\Phi(x)| \\ &= |\eta'(x) - u'(x) - \lambda(x)[\eta(x) - u(x)]| \\ &= |\eta'(x) - \lambda(x)\eta(x) - u'(x) - \lambda(x)u(x)| \\ &= |\eta'(x) - \lambda(x)\eta(x) - f(x)| \end{aligned}$$

成立.

假设 $c_2 \in \mathbb{R}$ 为任意常数, 则 $v(x) = c_2 e^{A(x)}$ 为方程 $y' - \lambda(x)y = 0$ 在 \mathbb{R} 上的通解.

令 $y(x) = u(x) + v(x), x \in \mathbb{R}$. 根据叠加原理可知, $y(x)$ 为方程 (1.1) 的通解. 从而对 $\forall x \in I$, 有

$$\begin{aligned} |\eta(x) - y(x)| &= |\Phi(x) + u(x) - u(x) - v(x)| \\ &= |\Phi(x) - v(x)| \\ &= \left| \varepsilon \int_0^x e^{-A(s)} ds + c_1 - c_2 \right| e^{A(x)} \\ &= \left| \int_0^x e^{-A(s)} ds + \frac{c_1 - c_2}{\varepsilon} \right| e^{A(x)} \varepsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

成立.

现在考虑 $b = \infty$ 的情况, 利用不等式 (2.1), 可知当 $x \geq 0$ 时,

$$\int_0^x e^{-A(s)} ds + \frac{c_1 - c_2}{\varepsilon} \geq x e^{-\max_{x \in [0, \omega]} A(x)} + \frac{c_1 - c_2}{\varepsilon},$$

且存在 $x_1 > \max\{0, a\}$, 使得当 $x \geq x_1$ 时,

$$x e^{-\max_{x \in (0, \omega]} A(x)} + \frac{c_1 - c_2}{\varepsilon} > 0.$$

因此, 利用式 (2.1) 和 (3.1), 可知当 $x \geq x_1$ 时,

$$\begin{aligned} |\eta(x) - y(x)| &\geq \left(x e^{-\max_{x \in [0, \omega]} A(x)} + \frac{c_1 - c_2}{\varepsilon} \right) e^{A(x)} \varepsilon \\ &\geq \left(x e^{-\max_{x \in (0, \omega]} A(x)} + \frac{c_1 - c_2}{\varepsilon} \right) e^{-\max_{x \in (0, \omega]} A(x)} \varepsilon \end{aligned}$$

成立.

从而, $\lim_{x \rightarrow \infty} |\eta(x) - y(x)| = \infty$, 即方程 (1.1) 在 $I = (a, \infty)$ 上不是 Hyers-Ulam 稳定的. 同理可证 $a = -\infty$ 的情况.

推论 3.1 如果 $\int_0^\omega \lambda(x) dx = 0$, $a = -\infty$ 或 $b = \infty$, 则方程 (1.1) 在 \mathbb{R} 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

在文献 [24] 中, 作者给出了方程 (1.1) 在 I 上 Hyers-Ulam 稳定的充分条件.

定理 3.2 [24] 若 $\lambda(x)$ 为 \mathbb{R} 上以 $\omega > 0$ 为周期的连续函数, 假设 $A(x), \Gamma^-(x)$ 分别为 $\lambda(x), e^{-A(x)}$ 在 \mathbb{R} 上的不定积分. 则:

(i) 若 $b = \infty$ 且 $\int_0^\omega \lambda(x) dx > 0$, 则方程 (1.1) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的, 且存在一个 Ulam 常数

$$\max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) \right) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right];$$

(ii) 若 $a = -\infty$ 且 $\int_0^\omega \lambda(x) dx < 0$, 则方程 (1.1) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的, 且存在一个 Ulam 常数

$$\max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^-(x) - \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^-(x) \right) \right) e^{A(x)} \right].$$

将这两个定理结合起来, 就得到了方程 (1.1) 在 \mathbb{R} 上 Hyers-Ulam 稳定的充要条件.

定理 3.3 方程 (1.1) 在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的当且仅当 $\int_0^\omega \lambda(x) dx \neq 0$.

4 具有周期系数的二阶齐次线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性

本节考虑具有周期系数的二阶齐次线性微分方程 (1.2).

本节及以后, 我们进一步假设 $\lambda(x)$ 是 \mathbb{R} 上以 $\omega > 0$ 为周期的连续可微函数, $m \in \mathbb{R}$, 此时 $(m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))$ 也是 \mathbb{R} 上以 $\omega > 0$ 为周期的连续函数. 特别地, 当 $m = 0$ 时, 方程 (1.2) 为 Hill 方程.

定理 4.1

(i) 若 $\int_0^\omega \lambda(x)dx > 0$, 则方程 (1.2) 在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的, 且存在一个 Ulam 常数

$$\left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^+(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\};$$

(ii) 若 $\int_0^\omega \lambda(x)dx < 0$, 则方程 (1.2) 在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的, 且存在一个 Ulam 常数

$$\left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^+(x) - \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^-(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\}.$$

证 令 $I = \mathbb{R}$, 即 $a = -\infty, b = \infty$. 任给 $\varepsilon > 0$, 假设对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 存在二阶连续可微函数 $\eta(x)$, 满足

$$|\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x)| \leq \varepsilon.$$

在 \mathbb{R} 上定义 $\psi(x) = \eta'(x) + (m+1)\lambda(x)\eta(x)$, 由于 $\lambda(x)$ 和 $\eta'(x)$ 都是 \mathbb{R} 上连续可微的函数, 则 $\psi(x)$ 也是一个在 \mathbb{R} 上连续可微的函数. 于是对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} & |\psi'(x) - \lambda(x)\psi(x)| \\ &= |[\eta'(x) + (m+1)\lambda(x)\eta(x)]' - \lambda(x)[\eta'(x) + (m+1)\lambda(x)\eta(x)]| \\ &= |\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)[\lambda^2(x) - \lambda'(x)]\eta(x)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

首先证明 (i). 假设 $\int_0^\omega \lambda(x)dx > 0$. 根据定理 3.2, 存在方程

$$w'(x) - \lambda(x)w(x) = 0$$

的一个解 $w(x)$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} & |\eta'(x) + (m+1)\lambda(x)\eta(x) - w(x)| \\ &= |\psi(x) - w(x)| \\ &\leq \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \varepsilon. \end{aligned}$$

根据定理 3.2, $a = -\infty$ 且 $\int_0^\omega -\lambda(x)dx < 0$, 存在方程

$$z'(x) + (m+1)\lambda(x)z(x) - w(x) = 0$$

的一个解 $z(x)$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} & |\eta(x) - z(x)| \\ &\leq \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^+(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\} \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\lambda(x)$ 和 $z(x)$ 都是可微函数, 所以 $z'(x)$ 也是可微的. 于是对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} & z''(x) + m\lambda(x)z'(x) - (m+1)[\lambda^2(x) - \lambda'(x)]z(x) \\ &= [z'(x) + (m+1)\lambda(x)z(x)]' - \lambda(x)[z'(x) + (m+1)\lambda(x)z(x)] \\ &= w'(x) - \lambda(x)w(x) = 0. \end{aligned}$$

即 $z(x)$ 为方程 (1.2) 在 \mathbb{R} 上的一个解. 故此时方程 (1.2) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的且存在一个 Ulam 常数为

$$\left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^+(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\}.$$

接下来证明 (ii). $a = -\infty$ 且 $\int_0^\omega \lambda(x)dx < 0$ 时, 对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有 $|\psi'(x) - \lambda(x)\psi(x)| \leq \varepsilon$. 根据定理 3.2, 存在方程

$$w'(x) - \lambda(x)w(x) = 0$$

的一个解 $w(x)$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} & |\eta'(x) + (m+1)\lambda(x)\eta(x) - w(x)| \\ &= |\psi(x) - w(x)| \\ &\leq \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^-(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \varepsilon. \end{aligned}$$

根据定理 3.2, $b = \infty$ 且 $\int_0^\omega -\lambda(x)dx > 0$, 存在方程

$$z'(x) + (m+1)\lambda(x)z(x) - w(x) = 0$$

的一个解 $z(x)$, 使得对 $\forall x \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned} & |\eta(x) - z(x)| \\ &\leq \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^+(x) - \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^-(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\} \varepsilon. \end{aligned}$$

与 (i) 中证明类似, 易得 $z(x)$ 为方程 (1.2) 在 \mathbb{R} 上的一个解. 故此时方程 (1.2) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的且存在一个 Ulam 常数为

$$\left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^+(x) - \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^-(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\}.$$

定理 4.2 如果 $\int_0^\omega \lambda(x)dx = 0$, $a = -\infty$ 或 $b = \infty$, 则方程 (1.2) 在 I 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 定义函数

$$\eta(x) = \left\{ \varepsilon \int_0^x e^{(m+2)A(s)} \int_0^s e^{-A(u)} du ds + \left(c_1 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_2 \right) \right\} e^{-(m+1)A(x)},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则 $\eta(x)$ 满足方程

$$\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x) = \varepsilon,$$

于是,

$$|\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x)| = \varepsilon.$$

显然方程 (1.2) 的通解为

$$v(x) = \left(c_3 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_4 \right) e^{-(m+1)A(x)},$$

其中 c_3, c_4 为任意常数. 于是对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} & |\eta(x) - v(x)| \\ &= \left| \left[\varepsilon \int_0^x e^{(m+2)A(s)} \int_0^s e^{-A(u)} du ds + \left(c_1 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_2 \right) \right] e^{-(m+1)A(x)} \right. \\ & \quad \left. - \left(c_3 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_4 \right) e^{-(m+1)A(x)} \right| \end{aligned} \quad (4.1)$$

成立.

现在考虑 $b = \infty$ 的情况. 利用不等式 (2.1), 可知当 $x \geq 0$ 时,

$$\int_0^x e^{-A(s)} ds \geq e^{-\max_{x \in (0, \omega]} A(x)} x \geq 0$$

且

$$e^{(m+2) \max_{x \in (0, \omega]} A(x)} \geq e^{(m+2)A(x)} \geq e^{(m+2) \min_{x \in (0, \omega]} A(x)} > 0.$$

进一步,

$$\begin{aligned} & e^{(m+2)A(x)} \int_0^x e^{-A(u)} du + \frac{c_1 - c_3}{\varepsilon} e^{(m+2)A(x)} \\ & \geq e^{(m+2) \min_{x \in (0, \omega]} A(x) - (m+2) \max_{x \in (0, \omega]} A(x)} x - \frac{|c_1 - c_3|}{\varepsilon} e^{(m+2) \max_{x \in (0, \omega]} A(x)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^x \left(e^{(m+2)A(s)} \int_0^s e^{-A(u)} du + \frac{c_1 - c_3}{\varepsilon} e^{(m+2)A(s)} \right) ds + \frac{c_2 - c_4}{\varepsilon} \\ & \geq \frac{e^{(m+2) \min_{x \in (0, \omega]} A(x) - (m+2) \max_{x \in (0, \omega]} A(x)}}{2} x^2 - \frac{|c_1 - c_3|}{\varepsilon} e^{(m+2) \max_{x \in (0, \omega]} A(x)} x + \frac{c_2 - c_4}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

且存在一个 $x_1 > \max\{0, a\}$, 使得当 $x \geq x_1$ 时,

$$\frac{e^{(m+2) \min_{x \in (0, \omega]} A(x) - (m+2) \max_{x \in (0, \omega]} A(x)}}{2} x^2 - \frac{|c_1 - c_3|}{\varepsilon} e^{(m+2) \max_{x \in (0, \omega]} A(x)} + \frac{c_2 - c_4}{\varepsilon} > x.$$

因此, 利用式 (2.1) 和 (4.1), 有

$$|\eta(x) - v(x)| \geq xe^{-A(x)}\varepsilon \geq xe^{-\max_{x \in (0, \omega]} A(x)}\varepsilon, \quad x \geq x_1.$$

从而, $\lim_{x \rightarrow \infty} |\eta(x) - v(x)| = \infty$, 即方程 (1.2) 在 $I = (a, \infty)$ 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

同理可证 $a = -\infty$ 的情况.

推论 4.1 如果 $\int_0^\omega \lambda(x)dx = 0$, $a = -\infty$ 或 $b = \infty$, 则方程 (1.2) 在 \mathbb{R} 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

定理 4.3 方程 (1.2) 在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的当且仅当 $\int_0^\omega \lambda(x)dx \neq 0$.

5 具有周期系数的二阶非齐次线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性

本节考虑具有周期系数的二阶非齐次线性微分方程 (1.3).

定理 5.1

(i) 若 $\int_0^\omega \lambda(x)dx > 0$, 则方程 (1.3) 在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的, 且存在一个 Ulam 常数

$$\left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^+(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\};$$

(ii) 若 $\int_0^\omega \lambda(x)dx < 0$, 则方程 (1.3) 在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的, 且存在一个 Ulam 常数

$$\left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^+(x) - \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^-(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\}.$$

证 首先证明 (i). 不妨设 $u(x)$ 为方程 (1.3) 在 \mathbb{R} 上的任意一个解. 在 I 上 $\int_0^\omega \lambda(x)dx > 0$, 并假设

$$|\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

则

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq |\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x) - f(x)| \\ &= |\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x) \\ &\quad - [u''(x) + m\lambda(x)u'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))u(x)]| \\ &= |[\eta(x) - u(x)]'' + m\lambda(x)[\eta(x) - u(x)]' - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))[\eta(x) - u(x)]| \end{aligned}$$

成立.

根据定理 4.1 和以上不等式, 存在方程 (1.2) 的一个解 $v(x)$, 使得在 I 上

$$\begin{aligned} &|[\eta(x) - u(x)] - v(x)| \\ &\leq \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^+(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\} \varepsilon \end{aligned}$$

成立.

记 $y(x) = u(x) + v(x), x \in \mathbb{R}$. 显然, $y(x)$ 为方程 (1.3) 的解, 且在 I 上

$$\begin{aligned} & |\eta(x) - y(x)| = |[\eta(x) - u(x)] - v(x)| \\ & \leq \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^+(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\} \varepsilon \end{aligned}$$

成立. 此时方程 (1.3) 在 I 上是 Hyers-Ulam 稳定的且存在一个 Ulam 常数为

$$\left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\Gamma^+(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \Gamma^+(x) \right) e^{-A(x)} \right] \right\} \left\{ \max_{x \in (0, \omega]} \left[\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma^-(x) - \Gamma^-(x) \right) e^{A(x)} \right] \right\}.$$

类似可证 (ii).

定理 5.2 如果 $\int_0^\omega \lambda(x) dx = 0, a = -\infty$ 或 $b = \infty$, 则方程 (1.3) 在 I 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 定义函数

$$\eta(x) = \left\{ \varepsilon \int_0^x e^{(m+2)A(s)} \int_0^s e^{-A(u)} du ds + \left(c_1 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_2 \right) \right\} e^{-(m+1)A(x)},$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, 则 $\eta(x)$ 满足方程 $\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x) = \varepsilon$, 于是, $|\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x)| = \varepsilon$.

假设 $u(x)$ 为方程 (1.3) 在 \mathbb{R} 上的任意一个解, 且 $\varphi(x) := \eta(x) + u(x)$, 则有

$$\begin{aligned} \varepsilon &= |\eta''(x) + m\lambda(x)\eta'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\eta(x)| \\ &= |[\varphi''(x) - u''(x)] + m\lambda(x)[\varphi'(x) - u'(x)] - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))[\varphi(x) - u(x)]| \\ &= |\varphi''(x) + m\lambda(x)\varphi'(x) - (m+1)(\lambda^2(x) - \lambda'(x))\varphi(x) - f(x)|, \quad x \in I. \end{aligned}$$

由于方程 (1.2) 的通解为

$$v(x) = \left(c_3 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_4 \right) e^{-(m+1)A(x)},$$

其中 c_3, c_4 为任意常数, 记 $y(x) = u(x) + v(x), x \in \mathbb{R}$, 显然 $y(x)$ 为方程 (1.3) 的通解. 于是对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} & |\Phi(x) - y(x)| = |\eta(x) - v(x)| \\ &= \left| \left[\varepsilon \int_0^x e^{(m+2)A(s)} \int_0^s e^{-A(u)} du ds + \left(c_1 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_2 \right) \right] e^{-(m+1)A(x)} \right. \\ & \quad \left. - \left(c_3 \int_0^x e^{(m+2)A(s)} ds + c_4 \right) e^{-(m+1)A(x)} \right| \\ &= \left| \int_0^x \left(e^{(m+2)A(s)} \int_0^s e^{-A(u)} du + \frac{c_1 - c_3}{\varepsilon} e^{(m+2)A(x)} \right) ds + \frac{c_2 - c_4}{\varepsilon} \right| e^{-A(x)} \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.1}$$

与定理 4.2 证明类似, 利用式 (2.1) 和 (5.1), 有

$$|\varphi(x) - y(x)| \geq x e^{-A(x)} \varepsilon \geq x e^{-\max_{x \in (0, \omega]} A(x)} \varepsilon, \quad x > \max\{0, a\}.$$

从而, $\lim_{x \rightarrow \infty} |\varphi(x) - y(x)| = \infty$, 即方程 (1.3) 在 $I = (a, \infty)$ 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

同理可证 $a = -\infty$ 的情况.

推论 5.1 如果 $\int_0^\omega \lambda(x)dx = 0$, $a = -\infty$ 或 $b = \infty$, 则方程 (1.3) 在 \mathbb{R} 上不是 Hyers-Ulam 稳定的.

推论 5.2 方程 (1.3) 在 \mathbb{R} 上是 Hyers-Ulam 稳定的当且仅当 $\int_0^\omega \lambda(x)dx \neq 0$.

6 结语

本文研究了具有周期系数的线性微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性. 首先, 我们建立了一阶非齐次线性微分方程 Hyers-Ulam 稳定的充分必要条件. 利用这一结果, 建立了一类具有周期系数的二阶齐次线性微分方程 Hyers-Ulam 稳定的充要条件. 当 $m = 0$ 时, 上述二阶微分方程为 Hill 方程. 最后, 将该理论推广到所对应的二阶非齐次微分方程. 特别地, 在定理中给出了精确的 HUS 常数. 如果系数是一个常数, 它就是最佳 HUS 常数. 这些结果可改进文献 [24] 中的结果. 应当指出, 关于此类具有周期系数的微分方程研究较少, 因此进一步的研究是非常重要的.

参 考 文 献

- [1] Ulam S M. A collection of mathematical problems[M]. New York: Interscience Publishers, 1960.
- [2] Hyers D H. On the stability of the linear functional equation[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1941, 27(4): 222–224.
- [3] Rassias T M, Themistocles M. On the stability of the linear mapping in Banach spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1978, 72(2): 297–300.
- [4] Jung S M. Hyers-Ulam-Rassias stability of functional equations in nonlinear analysis[M]. New York: Springer, 2011.
- [5] Brzdęk J, Ciepliński K, Leśniak Z. On Ulam's type stability of the linear equation and related issues[J]. Discrete Dyn. Nat. Soc., 2014, 2014: 1–14.
- [6] Brzdęk J, Popa D, Raşa I, Xu B. Ulam stability of operators[M]. London: Academic Press, 2018.
- [7] Benzarouala C, Brzdek J, El-Hady E S, Oubbi L. On Ulam stability of the inhomogeneous version of the general linear functional equation[J]. Results in Mathematics, 2023, 78: 1–32.
- [8] Alsina C, Ger R. On some inequalities and stability results related to the exponential function[J]. Inequal. Appl., 1998, 2(4): 373–380.
- [9] Anderson D R, Onitsuka M. Best constant for Hyers-Ulam stability of two step sizes linear difference equations[J]. J. Math. Anal. Appl., 2021, 496(2): 1–17.
- [10] Abuasbeh K, Mahmudov N I, Awadalla M. Relative controllability and Ulam-Hyers stability of the second-order linear time-delay systems[J]. Mathematics, 2023, 11(4): 1–19.
- [11] Miura T, Miyajima S, Takahasi S E. A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators[J]. J. Math. Anal. Appl., 2003, 286(1): 136–146.
- [12] Fukutaka R, Onitsuka M. Best constant in Hyers-Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a periodic coefficient[J]. J. Math. Anal. Appl., 2019, 473(2): 1432–1446.
- [13] Fukutaka R, Onitsuka M. A necessary and sufficient condition for Hyers-Ulam stability of first-order periodic linear differential equations[J]. Appl. Math. Lett., 2020, 100: 1–7.

- [14] Li Y. Hyers-Ulam stability of linear differential equations $y'' = \lambda'y$ [J]. Thai J. Math, 2010, 8(2): 215–219.
- [15] Li Y, Shen Y. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of second order[J]. Appl. Math. Lett., 2010, 23(3): 306–309.
- [16] Xue J. Hyers-Ulam stability of linear differential equations of second order with constant coefficient[J]. Ital. J. Pure Appl. Math., 2014, 32: 419–424.
- [17] Ellahiani I, Bouikhalene B. Ulam-Hyers stability of some linear differential equations of second order[J]. Examples and Counterexamples, 2023, 3: 1–3.
- [18] Abdollahpour M R, Park C. Hyers-Ulam stability of a class of differential equations of second order[J]. J. Comput. Anal. Appl., 2015, 18(5): 899–903.
- [19] Alqifiary Q H, Jung S M. On the Hyers-Ulam stability of differential equations of second order[J]. Abstr. Appl. Anal., 2014, 2014: 1–8.
- [20] Anderson D R. Hyers-Ulam stability of higher-order Cauchy-Euler dynamic equations on time scales[J]. Dyn. Syst. Appl., 2014, 23: 653–664.
- [21] Shen Y. An integrating factor approach to the Hyers-Ulam stability of a class of exact differential equations of second order[J]. Nonlinear Sci. Appl., 2016, 9: 2520–2526.
- [22] Zada A, Wang P, Lassoued D, Li T. Connections between Hyers-Ulam stability and uniform exponential stability of 2-periodic linear nonautonomous systems[J]. Adv. Difference Equ, 2017, 2017(1): 1–7.
- [23] Zada B. Uniform exponential stability in the sense of Hyers and Ulam for periodic time varying linear systems[J]. Differ. Equ. Appl., 2018, 10(2): 227–234.
- [24] Fukutaka R, Onitsuka M. Ulam stability for a class of Hill's equations[J]. Symmetry, 2019, 11(12): 1–15.
- [25] Fukutaka R, Onitsuka M. Best constant for Ulam stability of Hill's equations[J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2020, 163: 1–23.
- [26] Tripathy A K. Hyers-Ulam stability of ordinary differential equations[M]. Florida: CRC Press, 2021.

HYERS - ULAM STABILITY OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

DONG Ju-yue, XIE Feng

(College of Science, Donghua University, Shanghai 201620, China)

Abstract: This paper deals with Hyers-Ulam stability (HUS) of first and second order linear differential equations with periodic coefficients. Necessary and sufficient conditions are established for Hyers-Ulam stability of the linear differential equations by means of the constant variation method. The related results of Hyers-Ulam stability for first order homogeneous linear differential equations with periodic coefficients are generalized.

Keywords: Hyers-Ulam stability; linear differential equations; periodic coefficient; necessary and sufficient condition

2010 MR Subject Classification: 34A30; 34A12