Vol. 44 (2024)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

分数 $[a,b]$- 因子的紧孤立韧度条件

高 炜 [1], 王维凡 [2], 陈耀俊 [3]

(1. 云南师范大学信息学院, 云南 昆明 650500)
(2. 浙江师范大学数学系, 浙江 金华 321004)
(3. 南京大学数学系, 江苏 南京 210093)

摘 要: 本文研究了分数 $[a,b]$- 因子和孤立韧度相关性的问题. 利用子图分解的方法, 获得了一个图存在分数 $[a,b]$- 因子的孤立韧度条件, 通过反例说明该条件是紧的. 改进了原有对分数 $[a,b]$- 因子的孤立韧度界.

关键词: 图; 分数因子; 分数 $[a,b]$- 因子; 孤立韧度
MR(2010) **主题分类号**: 05C70 **中图分类号**: O157
文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2024)03-0203-09

1 引言

本文只讨论有限无向简单图. 设 G 是一个图, 其顶点集和边集分别表示为 $V(G)$ 和 $E(G)$. 记 $d_G(v)$ 和 $N_G(v)$ (简记为 $d(v)$ 和 $N(v)$) 为图 G 中顶点 v 的度和邻域, $\delta(G)$ 是图 G 的最小度, $G[S]$ 表示由 $S\subseteq V(G)$ 导出的子图. 设 $i(G)$ 为图 G 中孤立点的数量, $G_1\vee G_2$ 表示将每一对来自 G_1 和 G_2 的顶点通过边相连. 其他相关符号和标记可参考 [1].

设 a,b,k 为正整数满足 $1\le a\le b$, $h: E(G)\to[0,1]$ 是定义在边集上的示性函数. 分数 $[a,b]$- 因子是由边集 $E_h=\{e\in E(G)|h(e)>0\}$ 决定的生成图, 对任意 $v\in V(G)$ 满足 $a\le\sum_{v'\in N(v)}h(vv')\le b$. 图 G 存在分数 $[a,b]$- 因子是指满足上述条件的示性函数 h 存在. 若 $a=b=k$, 则分数 $[a,b]$- 因子退化为分数 k- 因子.

文献 [2] 引入孤立韧度的概念, 对于非完全图定义为

$$I(G)=\min\left\{\frac{|S|}{i(G-S)}\middle|S\subset V(G), i(G-S)\ge 2\right\},$$

对于完全图则规定 $I(G)=+\infty$.

近 20 年来, 关于孤立韧度和分数因子的关系, 得到了丰富的结果. [3] 指出图 G 存在分数 k- 因子若 $\delta(G)\ge k$ 且 $I(G)\ge k$. [4] 给出了图存在分数 $[a,b]$- 因子的一个孤立韧度条件, 并说明结论在一定意义下是 "最好" 的. 最近, [5] 得到了在删除任意 n 个顶点条件下依然存在分数 k- 因子的孤立韧度条件, 同时说明该条件是紧的.

本文的主要贡献在于给出一个图存在分数 $[a,b]$- 因子的孤立韧度条件, 并且通过反例说明该条件是最好的. 本文的组织结构如下: 首先对 [4] 中的结果证明, 反例及猜想进行分析;

*收稿日期: 2022-11-15 接收日期: 2024-01-22
基金项目: 国家自然科学基金资助 (12161094, 12031018, 11871270, 12161141003, 11931006).
作者简介: 高炜 (1981–), 男, 浙江绍兴人, 教授, 主要研究方向: 图论及应用.
E-mail: gaowei@ynnu.edu.cn.

其次, 给出分数 $[a,b]$- 因子存在性的紧孤立韧度条件, 结果的最好性通过反例说明; 然后, 对本文主要结果给出详细证明.

2 对 [4] 的分析

首先, 我们对文献 [4] 中存在的问题进行分析. 文献 [4] 给出如下结论:

定理 2.1 [4] 设 G 是一个图, a,b 都是正整数, 且 $2\le a<b$. 若 G 的孤立韧度与最小度满足 $\delta(G)\ge I(G)\ge a-1+\frac{a-1}{b}$, 则 G 有分数 $[a,b]$- 因子.

作者对孤立韧度的 "最好性" 用下面的例子来阐述: $a\ge 2$, $V(G)=V(K_{n(a-1)})\cup V((nb+1)K_1)\cup V(K_{(nb+1)(a-1)})$. 令 $V((nb+1)K_1)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{nb+1}\}$, $\{u_1,u_2,\cdots,u_{nb+1}\}\subseteq V(K_{(nb+1)(a-1)})$. $E(G)=E(K_{n(a-1)})\cup E(K_{(nb+1)(a-1)})\cup\{u_iv_i: i=1,\cdots,nb+1\}\cup\{xy: x\in V(K_{n(a-1)}), y\in(nb+1)K_1\}$.

此外, 文献 [4] 还给出如下猜想:

猜想 2.2[4] 定理 1.1 对 $a=b$ 也成立. 即当整数 $k\ge 2$ 时, 对于图 G, 若图 G 的孤立韧度和最小度满足 $\delta(G)\ge I(G)\ge k-\frac{1}{k}$, 则 G 有分数 k- 因子.

通过对文献 [4] 的深入分析, 我们给出如下几个注记:

(1) 在文献 [4] 中, 对定理 2.1 的证明忽略了对 T 中只有 K_a 的情况讨论. 事实上, 通过本文主要定理的证明和反例选取, 会发现真正孤立韧度的界和反例恰好出现在 T 中只有 K_a 的情况.

(2) 在定理 2.1 孤立韧度界最好性的说明中, 作者认为在上述所给的例子中令 $S=V(K_{n(a-1)})\cup V(K_{(nb+1)(a-1)})$, 就有

$$I(G)\le\frac{(nb+1+n)(a-1)}{nb+1}=a-1+\frac{n(a-1)}{nb+1}<a-1+\frac{a-1}{b}.$$

进而当 $n\to\infty$ 时有 $I(G)\to a-1+\frac{a-1}{b}$.

这里关于 $I(G)$ 的计算是一个明显的错误. 因为根据图 G 的构造, $K_{(nb+1)(a-1)}$ 中只有

$$\{u_1,u_2,\cdots,u_{nb+1}\}$$

这部分顶点与 $(nb+1)K_1$ 相邻, 因此, 只要删除 $V(K_{n(a-1)})$ 和 $\{u_1,u_2,\cdots,u_{nb+1}\}$ 就可以得到 $nb+1$ 个孤立顶点. 从而图 G 的真实孤立韧度值应该为 $I(G)=\frac{n(a-1)+nb+1}{nb+1}=1+\frac{n(a-1)}{nb+1}$ 且 $\lim_{n\to\infty}=1+\frac{a-1}{b}$. 由此可知, [4] 中的反例无法说明定理 2.1 中孤立韧度是紧的.

(3) 关于分数 k- 因子孤立韧度条件的猜想 2.2 是不成立的. 事实上, [3] 中已经给出了 G 存在分数 k- 因子的紧孤立韧度条件, 即: 若 $\delta(G)\ge k$ 且 $I(G)\ge k$, 则 G 存在分数 k- 因子. 虽然我们发现 [3] 中关于 $I(G)\ge k$ 最好性解释的反例也存在漏洞, 但文献 [5] 中对此作了补充解释, 给出了正确反例.

基于如上的分析, 可知关于分数 $[a,b]$- 因子的紧孤立韧度条件至今没有得到解决, 依然是个开问题. 这引导我们去深入思考到底图中存在分数 $[a,b]$- 因子的最好孤立条件是什么. 本文的贡献在于解答这个问题, 给出关于分数 $[a,b]$- 因子的孤立韧度下界, 并且通过反例来说明新给出的界是紧的.

3 相关定理, 反例及预备知识

本文主要结论如下:

定理 3.1 设 G 是一个图, a,b 都是正整数, 且 $2\le a\le b$. 若 $\delta(G)\ge a$ 且 $I(G)\ge a-1+\frac{a}{b}$, 则 G 存在分数 $[a,b]$- 因子.

根据分数 $[a,b]$- 因子的定义, 最小度条件 $\delta(G)\ge a$ 显然是紧的. 下面通过实例来解释定理 3.1 中的孤立韧度也是紧的. 设 $G=K_{\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor}\vee(lK_a)$ 其中 $l\ge 2$ 是正整数. 为了得到至少两个孤立点, 显然要删除 $K_{\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor}$ 中的所有顶点, 选择 m (其中 $m\in[2,l]$ 是整数) 个 K_a 并对每个 K_a 删除其中的 $a-1$ 个顶点. 从而有,

$$I(G)=\min_{m\in\{2,\cdots,l\}}\{\frac{\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor+m(a-1)}{m}\}=a-1+\min_{m\in\{2,\cdots,l\}}\{\frac{\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor}{m}\}.$$

设 $al-1=bn+c$, 其中 $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $c\in\{0,1,\cdots,b-1\}$. 进而 $\frac{1}{b}\le\frac{c+1}{b}\le 1$,

$$I(G)=a-1+\min_{m\in\{2,\cdots,l\}}\{\frac{\frac{al-1-c}{b}}{m}\}=a-1+\frac{\frac{al-1-c}{b}}{l}=a-1+\frac{a}{b}-\frac{1+c}{bl}.$$

可以看到为了让比值达到最小需要取 $m=l$, 同时 $I(G)$ 的值随着 l 的增大而增大, 最后逼近于 $a-1+\frac{a}{b}$ 但无法到达 $a-1+\frac{a}{b}$ (因为图是有限的). 即 $\lim\limits_{l\to+\infty}I(G)=a-1+\frac{a}{b}$. 设 $S=V(K_{\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor})$ 及 $T=V(lK_a)$, 则有

$$b|S|-a|T|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)=b\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor-la.$$

若 $al-1$ 是 b 的整数倍, 则

$$b\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor-la=b\frac{al-1}{b}-la=-1.$$

若 $al-1$ 不是 b 的整数倍, 则

$$b\lfloor\frac{al-1}{b}\rfloor-la<b\frac{al-1}{b}-la=-1.$$

综上所述, $b|S|-a|T|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)<0$, 根据引理 3.3, 可知 G 没有分数 $[a,b]$- 因子.

为了证明定理 3.1, 我们需要用到几个引理. 以下结果刻画了分数 $[a,b]$- 因子存在的充分必要条件.

引理 3.2[6] 设 G 是一个图,a,b 为正整数且满足 $a\le b$. 则 G 存在分数 $[a,b]$- 因子当且仅当对任意 $S\subseteq V(G)$, 有

$$b|S|-a|T|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)\ge 0$$

成立, 其中 $T=\{x\in V(G)-S|d_{G-S}(x)\le a\}$.

可知引理 3.2 中的 T 由顶点集 S 决定, 且可以改写为 $T=\{x\in V(G)-S|d_{G-S}(x)\le a-1\}$. 值得注意的是, 引理 3.2 有如下等价形式.

引理 3.3[6] 设 G 是一个图, a,b 为正整数且满足 $a\le b$. 则 G 存在分数 $[a,b]$- 因子当且仅当

$$b|S|-a|T|+\sum_{x\in T}d_{G-S}(x)\ge 0$$

对任意不相交的顶点子集 $S, T \subseteq V(G)$ 都成立.

以下引理刻画了特定框架下的独立集和覆盖集.

引理 3.4[7] 设 G 是一个图, $H = G[T]$ 满足对任意 $x \in V(H)$ 有 $d_G(x) = k-1$ 且 H 的任何一个连通分支都不与 K_k 同构, 其中 $T \subseteq V(G)$ 且 $k \geq 2$ 为整数. 则存在 H 的最大独立集 I 和覆盖集 $C = V(H) - I$ 满足

$$|V(H)| \leq \sum_{i=1}^{k}(k-i+1)|I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2} \quad \text{和} \quad |C| \leq \sum_{i=1}^{k}(k-i)|I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2},$$

其中 $I^{(i)} = \{x \in I, d_H(x) = k-i\}$ $(1 \leq i \leq k)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}|I^{(i)}| = |I|$.

4 定理 3.1 的证明

若 G 是完全图, 则根据 $\delta(G) \geq a$ 可知结果成立. 下面讨论非完全图. 设 G 满足定理 3.1 的所有条件, 但不存在分数 $[a,b]$- 因子. 根据引理 3.3, 存在 $V(G)$ 的不相交子集 S 和 T 满足

$$b|S| - a|T| + \sum_{x\in T} d_{G-S}(x) = b|S| + \sum_{x \in T}(d_{G-S}(x) - a) \leq -1. \tag{4.1}$$

选取 S 和 T 使得 $|T|$ 达到最小. 从而可知 $T \neq \emptyset$, 且对任意 $x \in T$ 有 $d_{G-S}(x) \leq a-1$.

设 l 是 $H' = G[T]$ 中与 K_a 同构的连通分支数, $T_0 = \{x \in V(H') | d_{G-S}(x) = 0\}$. 设子图 H 是从 $H' - T_0$ 中删除 l 个与 K_a 同构的连通分支后得到的子图. 在 H' 的每个 K_a 连通分支中选取 $a-1$ 个顶点构成的顶点子集记为 S'.

若 $|V(H)| = 0$, 则由 (4.1) 可知 $|S| \leq \frac{a(|T_0|+l)-1}{b}$. 由 $|T| \neq 0$ 得到 $|T_0| + l \geq 1$. 若 $|T_0| + l = 1$, 则 $|S| \leq \frac{a-1}{b}$ 进而有 $S = \emptyset$. 由 $d_{G-S}(x) + |S| \geq d_G(x) \geq \delta(G) \geq a$ 可得 $d_{G-S}(x) \geq a - |S| = a$, 这与任意 $x \in T$ 满足 $d_{G-S}(x) \leq a-1$ 矛盾. 进而 $i(G - S \cup S') = |T_0| + l \geq 2$ 且

$$\begin{aligned} I(G) &\leq \frac{|S \cup S'|}{i(G-S-S')} \leq \frac{\lfloor \frac{a(|T_0|+l)-1}{b} + l(a-1) \rfloor}{|T_0|+l} \\ &\leq \frac{\lfloor (a-1+\frac{a}{b})(|T_0|+l) - \frac{1}{b} \rfloor}{|T_0|+l} = a - 1 + \frac{\lfloor \frac{a(|T_0|+l)-1}{b} \rfloor}{|T_0|+l}. \end{aligned}$$

设 $a(|T_0|+l) - 1 = mb + c$, 其中 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 且 $c \in \{0, \cdots, b-1\}$. 则 $\frac{1}{b} \leq \frac{c+1}{b} \leq 1$,

$$a - 1 + \max\{\frac{\lfloor \frac{a(|T_0|+l)-1}{b} \rfloor}{|T_0|+l}\} = a - 1 + \max\{\frac{\frac{a(|T_0|+l)-1}{b} - \frac{c}{b}}{|T_0|+l}\} = a - 1 + \frac{a}{b} + \max\{-\frac{\frac{c+1}{b}}{|T_0|+l}\}.$$

这说明 $a - 1 + \frac{\lfloor \frac{a(|T_0|+l)-1}{b} \rfloor}{|T_0|+l}$ 随着 $|T_0| + l$ 的增大而增大, 当 $|T_0| + l$ 逼近于无穷时达到最大, 进而有 $I(G) < a - 1 + \frac{a}{b}$, 矛盾.

由此有 $|V(H)| > 0$. 设 $H = H_1 \cup H_2$ 其中 H_1 是 H 中的连通分支的并集, 其中对任意 $v \in V(H_1)$ 满足 $d_{G-S}(v) = a-1$. 且 $H_2 = H - H_1$. 根据引理 3.4, H_1 存在最大独立集 I_1 和覆盖集 $C_1 = V(H_1) - I_1$ 满足

$$|V(H_1)| \leq \sum_{i=1}^{a}(a-i+1)|I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2} \leq (a - \frac{1}{2})|I_1|, \tag{4.2}$$

和

$$|C_1| \le \sum_{i=1}^{a}(a-i)|I^{(i)}| - \frac{|I^{(1)}|}{2}, \tag{4.3}$$

其中 $I^{(i)} = \{v \in I_1, d_{H_1}(v) = a-i\}(1 \le i \le a)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{a}|I^{(i)}| = |I_1|$. 根据 H 和 H_2 的定义, 可知 H_2 的每个连通分支都至少存在一个 $G-S$ 中度至多为 $a-2$ 的顶点. 显然, 若 $H_2 \ne \emptyset$, 则 $a \ge 3$, 且 I_2 可以通过下面的程序选出: 选择顶点 $v \in V(H_2)$ 使得它在 $G-S$ 中有最小的度 (每次迭代按照原 $G-S$ 的度进行计算). 若当前所有顶点在原来 $G-S$ 中的度均为 $a-1$, 则选择在当前子图中度最小的. 更新 $V(H_2) \leftarrow V(H_2) \setminus (\{v\} \cup N_{H_2}(v))$ 并重复这一过程直到 $V(H_2) = \emptyset$.

设 $W = V(G)-S-T$ 且 $U = S \cup S' \cup C_1 \cup (N_G(I_1) \cap W)) \cup N_{G-S}(I_2) = S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1) \cup N_{G-S}(I_2)$. 下面分两种情况讨论.

情况 1. $|T_0| + l \ge 1$.

下面两个断言说明 H_1 或 H_2 都不能单独存在.

断言 4.1 若 $|T_0| + l \ge 1$, 则 $|I_2| \ne 0$.

证 假设 $|I_2| = 0$. 由 $|V(H)| > 0$ 可知 $|I_1| \ne 0$.

将 I_1 划分为如下两个子集.

I_{11}: $v \in I_{11}$ 若存在 $v' \in I_1 \setminus \{v\}$ 使得 $N_{G-S}(v) \cap N_{G-S}(v') \ne \emptyset$;

I_{12}: $v \in I_{12}$ 若 $N_{G-S}(v)$ 和 $N_{G-S}(I_1 \setminus \{v\})$ 之间不存在交集.

可得

$$b|S| \le |V(H_1)| + a|T_0| + la - 1 \le (a - \frac{1}{2})|I_{11}| + (a-1)|I_{12}| + a(|T_0| + l) - 1,$$

$$|S| \le (\frac{a}{b} - \frac{1}{2b})|I_{11}| + \frac{a-1}{b}|I_{12}| - \frac{1}{b} + \frac{a(|T_0|+l)}{b},$$

$$\begin{aligned}
& |S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1)| \\
\le\ & (\frac{a}{b} - \frac{1}{2b})|I_{11}| + \frac{a-1}{b}|I_{12}| - \frac{1}{b} + \frac{a(|T_0|+l)}{b} + l(a-1) + (a-1-\frac{1}{2})|I_{11}| + (a-1)|I_{12}| \\
=\ & (a-1+\frac{a}{b} - \frac{b+1}{2b})|I_{11}| + (a-1+\frac{a}{b}-\frac{1}{b})|I_{12}| + \frac{a}{b}|T_0| + (a-1+\frac{a}{b})l - \frac{1}{b} \\
\le\ & (a-1+\frac{a}{b})(|T_0|+l) + (a-1+\frac{a}{b}-\frac{1}{b})|I_1| - \frac{1}{b} \\
\le\ & (a-1+\frac{a}{b})(|I_1|+|T_0|+l) - \frac{2}{b}
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
I(G) &\le \frac{|S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1)|}{i(G - S \cup S' \cup N_{G-S}(I_1))} \\
&\le \frac{\lfloor (a-1+\frac{a}{b})(|I_1|+l+|T_0|) - \frac{2}{b} \rfloor}{|I_1|+l+|T_0|} \\
&= a-1+\frac{\lfloor \frac{a(|I_1|+l+|T_0|)-2}{b} \rfloor}{|I_1|+l+|T_0|} \\
&< a-1+\frac{a}{b},
\end{aligned}$$

这与 $I(G)\ge a-1+\frac{a}{b}$ 矛盾.

断言 4.2 若 $|T_0|+l\ge 1$, 则 $|I_1|\ne 0$.

证 假设 $|I_1|=0$. 根据 $|V(H)|>0$ 有 $|I_2|\ne 0$, 进而 $a\ge 3$.

设 $I_2=\{v_1,v_2,\cdots,v_{|I_2|}\}$ 满足 $d_{G-S}(v_1)\le a-2$ 和 $d_{G-S}(v_1)\le d_{G-S}(v_2)\le\cdots\le d_{G-S}(v_{|I_2|})$. 则 $|T|=|V(H_2)|+|T_0|+al$,

$$b|S|\le a|T|-d_{G-S}(T)-1\le a|T_0|+al+\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))-1$$

且

$$|S|\le\frac{a(|T_0|+l)}{b}+\frac{\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))}{b}-\frac{1}{b}.$$

可得 $i(G-U)\ge 2$ 其中 $U=S\cup S'\cup N_{G-S}(I_2)$,

$$\begin{aligned}
|U| &\le |S|+|S'|+|N_{G-S}(I_2)|\\
&\le \frac{a(|T_0|+l)}{b}+\frac{\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))}{b}-\frac{1}{b}+l(a-1)+\sum_{i=1}^{|I_2|}d_{G-S}(v_i)\\
&= \frac{a|T_0|}{b}+l(a-1+\frac{a}{b})+\sum_{i=1}^{|I_2|}(-\frac{d^2_{G-S}(v_i)}{b}+\frac{a+b-1}{b}d_{G-S}(v_i)+\frac{a}{b})-\frac{1}{b}\\
&\le \frac{a|T_0|}{b}+l(a-1+\frac{a}{b})+(-\frac{(a-2)^2}{b}+\frac{a+b-1}{b}(a-2)+\frac{a}{b})\\
&\quad +(|I_2|-1)(-\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{a+b-1}{b}(a-1)+\frac{a}{b})-\frac{1}{b}\\
&= \frac{a|T_0|}{b}+l(a-1+\frac{a}{b})+(a-1+\frac{a}{b})|I_2|-1+\frac{a-3}{b}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
I(G) &\le \frac{|U|}{i(G-U)}\le\frac{\lfloor\frac{a|T_0|}{b}+l(a-1+\frac{a}{b})+(a-1+\frac{a}{b})|I_2|-1+\frac{a-3}{b}\rfloor}{|I_2|+|T_0|+l}\\
&\le \frac{\lfloor(a-1+\frac{a}{b})(|T_0|+l+|I_2|)-1+\frac{a-3}{b}\rfloor}{|I_2|+|T_0|+l}\\
&= a-1+\frac{\lfloor\frac{a(|T_0|+l+|I_2|)+a-3}{b}\rfloor-1}{|I_2|+|T_0|+l}\\
&< a-1+\frac{a}{b},
\end{aligned}$$

矛盾.

根据断言 4.1 和断言 4.2, 得 $|I_1|>0$, $|I_2|>0$ 且 $a\ge 3$.

记 $v_1,v_2,\cdots,v_{|I_2|}$ 是按照断言 4.2 定义的 I_2 的顶点序列. 则 $|T|=|V(H_1)|+|V(H_2)|+|T_0|+al$,

$$\begin{aligned}
b|S| &\le a|T|-d_{G-S}(T)-1\\
&\le a(|T_0|+l)+(a-\frac{1}{2})|I_{11}|+(a-1)|I_{12}|+\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))-1
\end{aligned}$$

且

$$
\begin{aligned}
|S| &\le \frac{a(|T_0|+l)+(a-\frac{1}{2})|I_{11}|+(a-1)|I_{12}|+\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))-1}{b}\\
&= \frac{a}{b}(|T_0|+l)+(\frac{a}{b}-\frac{1}{2b})|I_{11}|+\frac{a-1}{b}|I_{12}|+\frac{\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))}{b}-\frac{1}{b}.
\end{aligned}
$$

可得 $i(G-U)\ge 3$ 其中 $U=S\cup S'\cup C_1\cup(N_G(I_1)\cap W)\cup N_{G-S}(I_2)$ 且

$$
\begin{aligned}
|U| &\le |S|+|S'|+|C_1|+|N_G(I_1)\cap W|+|N_{G-S}(I_2)|\\
&\le \frac{a}{b}(|T_0|+l)+(\frac{a}{b}-\frac{1}{2b})|I_{11}|+\frac{a-1}{b}|I_{12}|+\frac{\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))}{b}\\
&\quad -\frac{1}{b}+l(a-1)+(a-\frac{1}{2}-1)|I_{11}|+(a-1)|I_{12}|+\sum_{i=1}^{|I_2|}d_{G-S}(v_i)\\
&\le \frac{a}{b}|T_0|+l(a-1+\frac{a}{b})+(a-1+\frac{a}{b}-\frac{1}{b})|I_1|+(a-1+\frac{a}{b})|I_2|-1+\frac{a-3}{b}\\
&\le (|T_0|+l)(a-1+\frac{a}{b})+(a-1+\frac{a}{b})|I_1|+(a-1+\frac{a}{b})|I_2|-1+\frac{a-4}{b}.
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
I(G) &\le \frac{|U|}{i(G-U)}\le\frac{\lfloor(a-1+\frac{a}{b})(|T_0|+l+|I_1|+|I_2|)-1+\frac{a-4}{b}\rfloor}{|I_1|+|I_2|+|T_0|+l}\\
&= a-1+\frac{\lfloor\frac{a(|I_1|+|I_2|+|T_0|+l)+a-4}{b}\rfloor-1}{|I_1|+|I_2|+|T_0|+l}\\
&< a-1+\frac{a}{b},
\end{aligned}
$$

与 $I(G)$ 的假设矛盾.

情况 2. $|T_0|+l=0$**.**

与情况 1 类似, 下面两个断言是确认 H_1 或 H_2 不能独立存在.

断言 4.3 若 $|T_0|+l=0$, 则 $|I_2|\ne 0$.

证 若 $|I_2|=0$. 则可得 $|I_1|\ne 0$, $|T|=|V(H_1)|$ 和 $b|S|\le a|T|-d_{G-S}(T)-1=|T|-1$.

若 $|I_1|=1$, 则 $|T|\le a-1$ 且 $|S|\le\frac{|T|-1}{b}\le\frac{a-2}{b}$. 因此 $|S|=0$ 且 $a\le\delta(G)\le|S|+(a-1)=a-1$, 矛盾. 从而有 $|I_1|\ge 2$.

进而 $i(G-U)\ge|I_1|\ge 2$ 其中 $U=S\cup C_1\cup(N_G(I_1)\cap W)$. 类似断言 4.1 的推导, 我们有

$$
|U|\le|S|+|C_1|+\sum_{i=1}^{k}(i-1)|I^{(i)}|\le(a-1+\frac{a-1}{b})|I_1|-\frac{1}{b}\le(a-1+\frac{a}{b})|I_1|-\frac{3}{b}.
$$

从而

$$
I(G)\le\frac{|U|}{i(G-U)}\le\frac{\lfloor(a-1+\frac{a}{b})|I_1|-\frac{3}{b}\rfloor}{|I_1|}<a-1+\frac{a}{b},
$$

矛盾.

断言 4.4 若 $|T_0|+l=0$, 则 $|I_1|\ne 0$.

证 假设 $|I_1|=0$. 则根据 $|V(H)|>0$ 有 $|I_2|\neq 0$, 进而 $a\geq 3$.

若 $|I_2|=1$, 则设 $d_{min}=\min\{d_{G-S}(v)|v\in H_2\}$, $z\in V(H_2)$ 满足 $d_{G-S}(z)=d_{min}$, 进而有 $d_{min}\in\{1,\cdots,a-2\}$. 可得

$$b|S|\leq a|T|-d_{G-S}(T)-1\leq |T|(a-d_{min})-1,$$

$$|S|\leq\frac{|T|(a-d_{min})-1}{b}\leq\frac{(a-1)(a-d_{min})-1}{b}$$

且

$$\begin{aligned} & a\leq\delta(G)\leq d_{min}+|S|\leq d_{min}+\frac{(a-1)(a-d_{min})-1}{b}\\ = & \frac{a^2}{b}-\frac{a}{b}+\frac{(b-a+1)d_{min}}{b}-\frac{1}{b}\\ \leq & \frac{a^2}{b}-\frac{a}{b}+\frac{(b-a+1)(a-2)}{b}-\frac{1}{b}\\ = & a-2+\frac{2a-3}{b},\end{aligned}$$

矛盾.

从而可得 $|I_2|\geq 2$. 设 $v_1,v_2,\cdots,v_{|I_2|}$ 是断言 4.2 中定义的 I_2 顶点序列, 从而 $d_{G-S}(v_1)\leq a-2$ 且 $d_{G-S}(v_1)\leq d_{G-S}(v_2)\leq\cdots\leq d_{G-S}(v_{|I_2|})$. 从而有 $|T|=|V(H_2)|$,

$$\begin{aligned} b|S| &\leq a|T|-d_{G-S}(T)-1\\ &\leq \sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))-1\end{aligned}$$

和

$$|S|\leq\frac{\sum_{i=1}^{|I_2|}(d_{G-S}(v_i)+1)(a-d_{G-S}(v_i))}{b}-\frac{1}{b}.$$

根据 $i(G-U)\geq|I_2|\geq 2$ 其中 $U=S\cup N_{G-S}(I_2)$, 以及断言 4.2 中的讨论, 得到

$$|U|\leq|S|+|N_{G-S}(I_2)|\leq(a-1+\frac{a}{b})|I_2|-1+\frac{a-3}{b}.$$

从而有

$$I(G)\leq\frac{|U|}{i(G-U)}\leq\frac{\lfloor(a-1+\frac{a}{b})|I_2|-1+\frac{a-3}{b}\rfloor}{|I_2|}<a-1+\frac{a}{b},$$

矛盾.

从断言 4.3 和断言 4.4, 可知 $|I_1|\geq 1$, $|I_2|\geq 1$ 且 $a\geq 3$. 可得 $i(G-U)\geq 2$ 其中 $U=S\cup C_1\cup(N_G(I_1)\cap W)\cup N_{G-S}(I_2)$ 且

$$\begin{aligned} |U| &\leq |S|+|C_1|+|N_G(I_1)\cap W|+|N_{G-S}(I_2)|\\ &\leq (a-1+\frac{a-1}{b})|I_1|+(a-1+\frac{a}{b})|I_2|-1+\frac{a-3}{b}\\ &\leq (a-1+\frac{a}{b})(|I_1|+|I_2|)-1+\frac{a-4}{b}.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} I(G) &\le \frac{|U|}{i(G-U)} \le \frac{\lfloor (a-1+\frac{a}{b})(|I_1|+|I_2|)-1+\frac{a-4}{b}\rfloor}{|I_1|+|I_2|} \\ &= a-1+\frac{\lfloor \frac{a(|I_1|+|I_2|)+a-4}{b}\rfloor -1}{|I_1|+|I_2|} \\ &< a-1+\frac{a}{b}, \end{aligned}$$

矛盾.

综上所述, 结论成立.

参 考 文 献

[1] Bondy J A, Mutry U S R. Graph theory[M]. Berlin: Springer, 2008.

[2] 杨景波, 马英红, 刘桂真. 图的分数 (g,f)- 因子 [J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2001, 16(4): 385–390.

[3] 马英红, 刘桂真. 图的分数因子与孤立韧度 [J]. 应用数学, 2006, 19(1): 188–194.

[4] 潘瑞霞, 兰梅, 刘桂真. 图存在分数 $[a,b]$- 因子的一个孤立韧度条件 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2008, 43(5): 93–96.

[5] Gao W, Wang W F, Chen Y J. Tight isolated toughness bound for fractional (k,n)-critical graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2022, 322: 194–202.

[6] Liu G Z, Zhang L J. Fractional (g,f)-factors of graph[J]. Acta Mathematica Scientia, 2001, 21B(4): 541–545.

[7] Liu G Z, Zhang L J. Toughness and the existence of fractional k-factors of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308: 1741–1748.

SHARP ISOLATED TOUGHNESS CONDITION FOR FRACTIONAL $[a,b]$-FACTOR

GAO Wei[1], WANG Wei-fan[2], CHEN Yao-jun[3]

(*1.School of Information Science and Technology, Yunnan Normal University, Kunming 650500, China*)

(*2.Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China*)

(*3.Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, China*)

Abstract: In this paper, we study the relationship between the fractional $[a,b]$-factor and the isolated toughness. By means of the graph decomposition approach, an isolated toughness condition for a graph admits fractional $[a,b]$-factor is determined. The sharpness of given bound is explained by a counterexample. This result improves the original isolated toughness bound for fractional $[a,b]$-factors.

Keywords: graph; fractional factor; fractional $[a,b]$-factor; isolated toughness

2010 MR Subject Classification: 05C70