

一种基于欧拉方程通量分裂的五阶有限差分共权多分辨率 WENO 格式

张学莹, 吴杨炯
(河海大学数学学院, 江苏 南京 211100)

摘要: 本文研究了欧拉方程的高精度数值解法, 在多分辨率 WENO 数值格式中引入了共权思想, 获得了一种新的五阶有限差分共权多分辨率 WENO 格式. 数值实验表明, 该方法在解的光滑区域能获得一致的高精度, 在强间断附近能保持数值解基本无振荡的性质, 从而验证算法的有效性.

关键词: 欧拉方程; 多分辨率 WENO 格式; 共权

MR(2010) 主题分类号: 65M06; 76M20

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2024)01-0073-11

1 引言

众所周知, 双曲守恒律方程在众多领域中发挥着重要的作用. 而在过去的几十年里, 求解双曲守恒律方程的高阶方法的研究吸引了大量学者, 其主要挑战来自于处理激波和激波湍流的数值方法之间的矛盾特性, 这导致即使初始条件足够光滑, 解也可能发展为不连续解. 而在这些高阶数值方法中, WENO 方法 [1,2,3,4,5] 引起了广泛的关注. 近年来, 王镇明、朱君等人 [6] 提出了一种五阶多分辨率 WENO 空间重构方法, 该方案的重构模板分别含由一个点, 三个点和五个点组成的中心模板, 而不是采用三个等大小的三点中心或偏离模板. 该方法构造简单, 易于得到高精度数值格式和推广到高维问题. 另外, WENO 方案采用自适应模板的思想, 对候选模板分配非线性权并进行凸组合, 其中非线性权重取决于局部模版的光滑程度. 与通常的分量加权方法不同, 申义庆等人开发了一种共权 WENO 格式 [7]. 共权是指在一个全局模板上, 一维空间中欧拉方程的通量向量通常共享一组权重. 该方法计算效率较高, 具有良好的鲁棒性和较低的数值耗散性, 并有助于抑制相位误差. 本文基于多分辨率 WENO 有限差分格式和共权思想提出了一种共权多分辨率 WENO 有限差分格式, 用于求解一维和二维欧拉方程.

2 欧拉方程的通量分裂方法

考虑以下一维欧拉方程:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

*收稿日期: 2023-06-02 接收日期: 2023-08-22

基金项目: 河海大学 2023 年新工科、新农科、新文科研究与改革实践项目资助 (B2301914); 河海大学 2023 年研究生“课程思政”示范课程建设项目资助 (421203160).

作者简介: 张学莹 (1973-), 男, 山东郯城, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程数值解.

其中守恒变量 \mathbf{U} , 无粘性通量 \mathbf{F} 的表达式如下:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ Eu + pu \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

并且满足状态方程

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{\rho}{2} u^2 \right), \quad (2.3)$$

其中 ρ , u , E 和 p 依次是密度, 速度, 总能量和压强, 而 γ 是比热容.

通过欧拉方程的双曲性质, 我们可得

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{U}, \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}, \mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}, \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \text{diag}(u, u - c, u + c)$ 是雅可比矩阵 \mathbf{A} 的特征值的对角矩阵, \mathbf{R} 和 $\mathbf{L} = \mathbf{R}^{-1}$ 分别是该矩阵的右和左特征向量构成的矩阵, $c = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$ 代表声速.

通量 \mathbf{F} 可以被分裂为正部和负部:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^- = \mathbf{A}^+\mathbf{U} + \mathbf{A}^-\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^+\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^-\mathbf{L}\mathbf{U}, \quad (2.5)$$

其中 $\mathbf{\Lambda}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+)$, $\mathbf{\Lambda}^- = \text{diag}(\lambda_1^-, \lambda_2^-, \lambda_3^-)$ 分别是正部和负部的特征矩阵, $\lambda_j^+ \geq 0$, $\lambda_j^- \leq 0$, $j = 1, 2, 3$. 并且分裂通量 \mathbf{F}^\pm 的广义公式可以写成如下形式:

$$\mathbf{F}^\pm = \begin{bmatrix} f_1^\pm \\ f_2^\pm \\ f_3^\pm \end{bmatrix} = \frac{\rho}{2\gamma} \begin{bmatrix} 2(\gamma - 1)\lambda_1^\pm + \lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm \\ 2(\gamma - 1)\lambda_1^\pm u + \lambda_2^\pm(u - c) + \lambda_3^\pm(u + c) \\ (\gamma - 1)\lambda_1^\pm u^2 + \frac{\lambda_2^\pm}{2}(u - c)^2 + \frac{\lambda_3^\pm}{2}(u + c)^2 + \frac{(3 - \gamma)(\lambda_2^\pm + \lambda_3^\pm)c^2}{2(\gamma - 1)} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

分裂方程 (2.5) 的方法有很多, 例如 Steger-Warming(SW)[8] 通量分裂方法使用以下公式即可得到 \mathbf{F}^+ 及 \mathbf{F}^- :

$$\lambda_j^\pm = \frac{\lambda_j \pm |\lambda_j|}{2}. \quad (2.7)$$

而本文选择使用全局 Lax-Friedrichs (GLF) 分裂方法 [9]:

$$\lambda_j^\pm = \frac{(\lambda_j \pm \alpha)}{2}, \quad (2.8)$$

其中 $\alpha = \max\{\lambda_j\}$ 是整个计算域上最大的特征值. 尽管采用 GLF 分裂的耗散更大些, 但得到的解的光滑性会更好.

注 对于二维情形, 通量分裂情况可参考 [10], 这里不再赘述.

3 多分辨率 WENO 有限差分格式

在本节中, 为了便于表达, 我们考虑将 (2.1) 缩写成以下一维标量形式下的双曲守恒方程:

$$u_t + f_x(u) = 0, \quad (3.1)$$

为简单起见, 本文采用均匀网格, 网格单元 $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$, 均匀单元长度表示为 $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$, 单元中心定义为 $x_i = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} + x_{i-\frac{1}{2}}}{2}$. 在此均匀网格上, (3.1) 的半离散格式为:

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} (\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \widehat{f}_{i-\frac{1}{2}}), \quad (3.2)$$

其中, u_i 是一个对点值 $u(x_i, t)$ 的数值近似, 而 $\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}}$ 是一个数值通量. 自然地, 如果考虑了数值通量 $\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}}$ 的五阶近似, 那么 $\frac{1}{h} (\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \widehat{f}_{i-\frac{1}{2}})$ 是在 $x = x_i$ 处对 $f_x(u)$ 的五阶近似. 与经典的 WENO5-JS 方案相比, 王镇明、朱君等人提出了一种新的有限差分多分辨率 WENO 方法 [6], 该方法的特点是利用一系列不等大小的分层中心空间模板设计高阶精度.

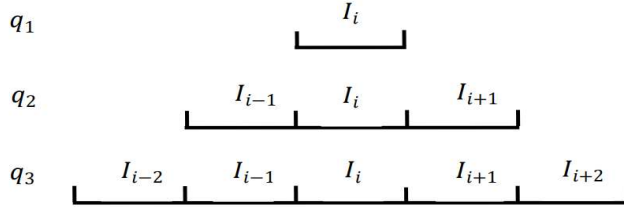


图 1 多分辨率 WENO 格式的原理图

考虑数值通量 $f_{i+\frac{1}{2}}^+$ 在图 1 中的三种模板 ($T_1 = \{I_i\}$, $T_2 = \{I_{i-1}, I_i, I_{i+1}\}$, $T_3 = \{I_{i-2}, I_{i-1}, I_i, I_{i+1}, I_{i+2}\}$) 下的重构多项式, 我们可得一个零次多项式 $q_1(x)$, 一个二次多项式 $q_2(x)$ 和一个四次多项式 $q_3(x)$ 满足对应点信息依次如下:

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \Delta x/2}^{x_j + \Delta x/2} q_1(x) dx = f^+(x_j), j = i, \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \Delta x/2}^{x_j + \Delta x/2} q_2(x) dx = f^+(x_j), j = i - 1, i, i + 1, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j - \Delta x/2}^{x_j + \Delta x/2} q_3(x) dx = f^+(x_j), j = i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2. \quad (3.5)$$

上述多项式的具体表达如下:

$$q_1(x) = f^+(x_i), \quad (3.6)$$

$$q_2(x) = a_0 + a_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) + a_2 \left[\left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^2 - \frac{1}{12} \right], \quad (3.7)$$

$$q_3(x) = b_0 + b_1 \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) + b_2 \left[\left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^2 - \frac{1}{12} \right] + b_3 \left[\left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^3 - \frac{3}{20} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right) \right] + b_4 \left[\left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^4 - \frac{3}{14} \left(\frac{x - x_i}{\Delta x} \right)^2 + \frac{3}{560} \right], \quad (3.8)$$

其中 $a_n (n = 0, \dots, 2)$ 和 $b_n (n = 0, \dots, 4)$ 分别是 $q_2(x)$ 和 $q_3(x)$ 的系数:

$$a_0 = f^+(x_i), a_1 = \frac{f^+(x_{i+1}) - f^+(x_{i-1})}{2}, a_2 = \frac{f^+(x_{i+1}) - 2f^+(x_i) + f^+(x_{i-1}))}{2},$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= f^+(x_i), b_1 = \frac{11f^+(x_{i-2}) - 82f^+(x_{i-1}) + 82f^+(x_{i+1}) - 11f^+(x_{i+2})}{120}, \\
b_2 &= \frac{-3f^+(x_{i-2}) + 40f^+(x_{i-1}) - 74f^+(x_i) + 40f^+(x_{i+1}) - 3f^+(x_{i+2})}{56}, \\
b_3 &= \frac{-f^+(x_{i-2}) + 2f^+(x_{i-1}) - 2f^+(x_{i+1}) + f^+(x_{i+2})}{12}, \\
b_4 &= \frac{f^+(x_{i-2}) - 4f^+(x_{i-1}) + 6f^+(x_i) - 4f^+(x_{i+1}) + f^+(x_{i+2})}{24}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

基于上述不同精度的多项式 q_n , 将它们重写成另一种等价的形式 Q_n , 以便以不同的精度顺序继续嵌套多分辨率 WENO 方案:

$$Q_1(x) = q_1(x),$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{\gamma_{2,2}}q_2(x) - \frac{\gamma_{1,2}}{\gamma_{2,2}}Q_1(x), \tag{3.10}$$

$$Q_3(x) = \frac{1}{\gamma_{3,3}}q_3(x) - \frac{\gamma_{2,3}}{\gamma_{3,3}}Q_2(x) - \frac{\gamma_{1,3}}{\gamma_{3,3}}Q_1(x).$$

需要强调的是, 任意 Q_n 中的线性权值之和必须为 1 (例如 $\gamma_{1,2} + \gamma_{2,2} = 1$). 为了平衡不连续区域上的尖锐、本质无振荡的激波跃迁和平滑区域上的精度, 取 $\gamma_{1,2} = \frac{1}{11}, \gamma_{2,2} = \frac{10}{11}; \gamma_{1,3} = \frac{1}{111}, \gamma_{2,3} = \frac{10}{111}, \gamma_{3,3} = \frac{100}{111}$.

接下来需要计算 Q_n 的光滑因子 $\beta_n, n = 1, 2, 3$. 其中 β_2 和 β_3 按如下公式计算 [5]:

$$\beta_n = \sum_{\alpha=1}^{k_n} \int_{I_i} (\Delta x)^{2\alpha-1} \left(\frac{d^\alpha Q_n(x)}{dx^\alpha} \right)^2 dx, n = 2, 3, \tag{3.11}$$

其中 k_n 是多项式 $Q_n(x)$ 的次数. 具体表达如下:

$$\beta_2 = \frac{1}{\gamma_{2,2}^2} \left(a_1^2 + \frac{13}{3} a_2^2 \right), \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\beta_3 &= \frac{1}{7350} \left[\frac{1}{\gamma_{3,3}} (7350b_1^2 + 31850b_2^2 + 287091b_3^2 + 4594740b_4^2 + 1470b_1b_3 + 17220b_2b_4) \right. \\
&\quad \left. - \frac{70\gamma_{2,3}}{\gamma_{2,2}\gamma_{3,3}^2} (210a_1b_1 + 21a_1b_3 + 910a_2b_2 + 246a_2b_4) + \frac{2450\gamma_{2,3}^2}{\gamma_{2,2}^2\gamma_{3,3}^3} (3a_1^2 + 13a_2^2) \right].
\end{aligned} \tag{3.13}$$

余下的光滑因子 β_1 的具体表达参考 [11]:

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma} [\sigma_0 (f^+(x_i) - f^+(x_{i-1})) + \sigma_1 (f^+(x_{i+1}) - f^+(x_i))], \sigma = \sigma_0 + \sigma_1, \tag{3.14}$$

其中

$$\zeta_0 = (f^+(x_i) - f^+(x_{i-1}))^2, \zeta_1 = (f^+(x_{i+1}) - f^+(x_i))^2, \tag{3.15}$$

$$\gamma_{0,1} = \begin{cases} \frac{1}{11}, \zeta_0 \geq \zeta_1, \\ \frac{10}{11}, \zeta_0 < \zeta_1, \end{cases} \gamma_{1,1} = 1 - \gamma_{0,1}, \tag{3.16}$$

$$\sigma_0 = \gamma_{0,1} \left(1 + \frac{(\zeta_1 - \zeta_0)^2}{\zeta_0 + \varepsilon} \right), \sigma_1 = \gamma_{1,1} \left(1 + \frac{(\zeta_1 - \zeta_0)^2}{\zeta_1 + \varepsilon} \right), \varepsilon = 10^{-6}. \quad (3.17)$$

得到光滑因子后非线性权重的计算过程如下:

$$\omega_n = \frac{\widehat{\omega}_n}{\sum_{l=1}^3 \widehat{\omega}_l}, \widehat{\omega}_n = \gamma_{n,3} \left(1 + \frac{\tau}{\varepsilon + \beta_n} \right), n = 1, 2, 3. \quad \tau = \left(\frac{|\beta_3 - \beta_1| + |\beta_3 - \beta_2|}{2} \right)^2. \quad (3.18)$$

最后我们得到了 $\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}}$ 最终的五阶重构:

$$\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}}^+ = \omega_1 Q_1 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + \omega_2 Q_2 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + \omega_3 Q_3 \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right). \quad (3.19)$$

值得一提的是, $\widehat{f}_{i+\frac{1}{2}}^-$ 的重构相对于 $x_{i+1/2}$ 在空间上是镜像对称的.

4 共权多分辨率 WENO 格式

申义庆等人 [7] 发现密度、压力和分裂后的能量方程的乘积可以作为变量来计算共同权重: (1) 在激波和接触间断处, 密度发生跳跃; (2) 分裂的能量通量包含速度的三次幂项 (例如 u^3) 时能够具有迎风特性; (3) 压力总是在激波处跳跃, 它可以帮助提高高速流动的稳定性, 其中动能比内能大得多.

与通常的通量分量加权方法不同, 共权是指在一个模板上, 一维空间中欧拉方程的分裂通量向量通常共享一组权重. 而对于二维欧拉方程而言, 需要将 x 方向与 y 方向分开考虑, 相同方向上的分裂通量向量共享一组权重. 共权 WENO 方案有两个显著的优点: 其一是只需要计算一组权值, 具有较高的计算效率; 其二是共权 WENO 方案对双曲方程组中数值通量的每个分量都保持相同的贡献.

因此, 本文基于上述思想结合多分辨率 WENO 格式提出了一个针对于欧拉方程的共权多分辨率 WENO 方案, 为简单起见, 以下算法仅给出 (2.6) 中通量分量的正部情形, 具体如下:

1. 由分裂通量 (2.6) 计算得到新的特殊计算变量 Γ_i^+ , 其中 f_E 是与总能量相关的分量, 在一维情形下取 $f_E = f_3$:

$$\Gamma_i^+ = \rho(x_i) p(x_i) f_E^+(x_i). \quad (4.1)$$

2. 计算系数 $a_n^E (n = 0, \dots, 2)$ 和 $b_n^E (n = 0, \dots, 4)$:

$$\begin{aligned} a_0^E &= \Gamma_i^+, a_1^E = \frac{\Gamma_{i+1}^+ - \Gamma_{i-1}^+}{2}, a_2^E = \frac{\Gamma_{i+1}^+ - 2\Gamma_i^+ + \Gamma_{i-1}^+}{2}, \\ b_0^E &= \Gamma_i^+, b_1^E = \frac{11\Gamma_{i-2}^+ - 82\Gamma_{i-1}^+ + 82\Gamma_{i+1}^+ - 11\Gamma_{i+2}^+}{120}, \\ b_2^E &= \frac{-3\Gamma_{i-2}^+ + 40\Gamma_{i-1}^+ - 74\Gamma_i^+ + 40\Gamma_{i+1}^+ - 3\Gamma_{i+2}^+}{56}, \\ b_3^E &= \frac{-\Gamma_{i-2}^+ + 2\Gamma_{i-1}^+ - 2\Gamma_{i+1}^+ + \Gamma_{i+2}^+}{12}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$b_4^E = \frac{\Gamma_{i-2}^+ - 4\Gamma_{i-1}^+ + 6\Gamma_i^+ - 4\Gamma_{i+1}^+ + \Gamma_{i+2}^+}{24}.$$

3. 计算新光滑因子.

3.1 采用 (4.2) 中新系数并参照方程 (3.12-3.13) 计算 β_2^E 和 β_3^E .

3.2 首先由 (3.16) 和 (3.17) 式计算得到 σ_0, σ_1 , 其中 ζ_0, ζ_1 的计算更改如下:

$$\zeta_0 = (\Gamma_i^+ - \Gamma_{i-1}^+)^2, \zeta_1 = (\Gamma_{i+1}^+ - \Gamma_i^+)^2. \quad (4.3)$$

然后再计算 β_1^E :

$$\beta_1^E = \frac{1}{\sigma} [\sigma_0 (\Gamma_i^+ - \Gamma_{i-1}^+) + \sigma_1 (\Gamma_{i+1}^+ - \Gamma_i^+)], \sigma = \sigma_0 + \sigma_1. \quad (4.4)$$

4. 参照 (3.18) 计算新权重 $\omega_n^E, n = 1, 2, 3$.

5. 计算新重构 $\hat{f}_l^+(x_{i+\frac{1}{2}}), l = 1, 2, 3$.

首先参照 (3.6-3.10) 计算 $Q_{l,n}, l = 1, 2, 3$:

$$Q_{l,n} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right), n = 1, 2, 3, \quad (4.5)$$

然后计算 $\hat{f}_l^+(x_{i+\frac{1}{2}}), l = 1, 2, 3$:

$$\hat{f}_l^+(x_{i+\frac{1}{2}}) = \omega_1^E Q_{l,1} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + \omega_2^E Q_{l,2} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right) + \omega_3^E Q_{l,3} \left(x_{i+\frac{1}{2}} \right). \quad (4.6)$$

5 数值算例

在本节中应用一些经典的无粘数值算例, 通过与原五阶有限差分多分辨率 WENO 格式的比较, 验证了所提出的针对欧拉方程的新的五阶有限差分共权多分辨率 WENO 格式的性能. 为了让结果更加有说服力, 本文对一维算例采用均方根误差 (RMSE) 和平均绝对误差 (MAE) 来衡量不同算法的效果:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}, MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|, \quad (5.1)$$

其中 y_i 为数值解, \hat{y}_i 为参考解. 而对于二维算例则是给出了另外两种五阶方法 (WENO5-JS[5] 和 WENO5-Z[12]) 的收敛解来进行对比. 另外, 本文在时间上采用三阶龙格-库塔方法来求解欧拉方程:

$$\begin{cases} U^{(1)} = U^n + \Delta t L(U^n), \\ U^{(2)} = \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(U^{(1)}), \\ U^{n+1} = \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(U^{(2)}), \end{cases} \quad (5.2)$$

其中, L 代表空间算子, U^n 是 t^n 时刻的解. 对于一维问题而言, 时间步长采用:

$$\Delta t = \frac{\delta \Delta x}{\max_i (|u_i| + c_i)}, \quad (5.3)$$

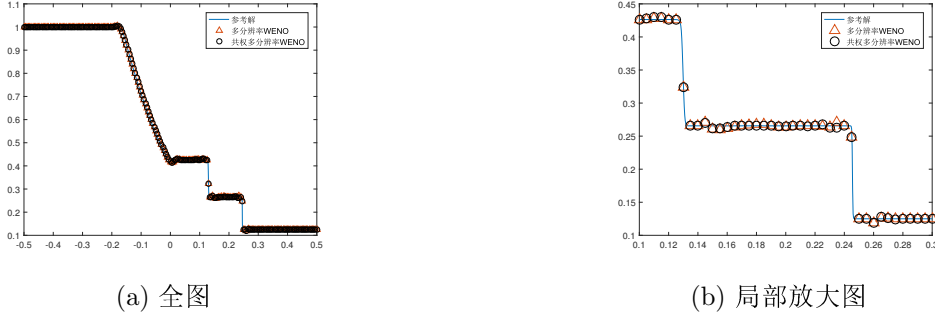


图 2 sod 激波管问题, 网格点: 200

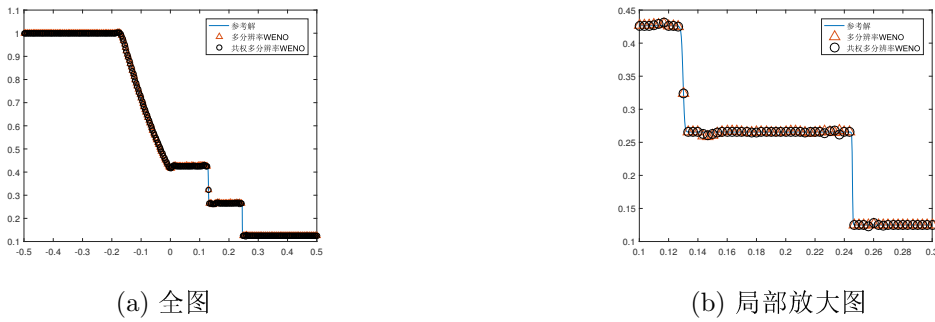


图 3 sod 激波管问题, 网格点: 300

二维算例则是采用:

$$\Delta t = \delta \frac{\Delta t_x \Delta t_y}{\Delta t_x + \Delta t_y}, \Delta t_x = \frac{\Delta x}{\max_{i,j} (|u_{i,j}| + c_{i,j})}, \Delta t_y = \frac{\Delta y}{\max_{i,j} (|v_{i,j}| + c_{i,j})}, \quad (5.4)$$

CFL 数使用 $\delta = 0.5$. γ 本文选为常数 1.4.

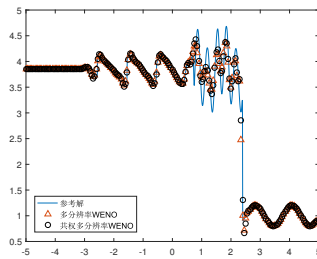
例 1 一维 sod 激波管问题, 该问题的初值条件如下:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & -0.5 \leq x \leq 0, \\ (0.125, 0, 0.1) & 0 < x \leq 0.5. \end{cases} \quad (5.5)$$

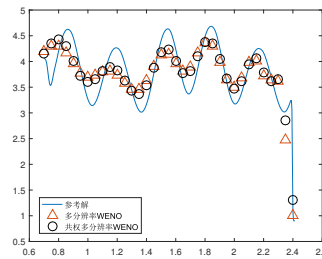
这个问题被模拟到 $t = 1.4$, 分别有 200 个和 300 个网格点两种情形在图 2 和图 3 中被展示, 给出了参考解与多分辨率 WENO 格式和共权多分辨率 WENO 格式计算得到的密度分布. 其中参考解是基于 3000 个网格点由 WENO5-JS 格式计算的收敛解. 图 2 和图 3 之间的对比描述了随着网格点数的增加, 数值结果的收敛情况变好. 表 1 给出了两种格式的均方根误差和平均绝对误差比较, 虽然所提出的新格式不能避免接触不连续点附近的数值振荡, 但它作为传统的分量加权方法可用于求解欧拉方程.

表 1 例 1 中的均方根误差 (RMSE) 值和平均绝对误差 (MAE) 值

网格点	多分辨率 WENO		共权多分辨率 WENO	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
50	0.02410001999	0.01375961765	0.02096501074	0.01116281471
100	0.01504258692	0.00710205050	0.00957652716	0.00492781040
200	0.00827211670	0.00335918657	0.00485229845	0.00234207015
300	0.00714363364	0.00239335880	0.00296160052	0.00136724784
500	0.00591441244	0.00144481457	0.00184744171	0.00081999830

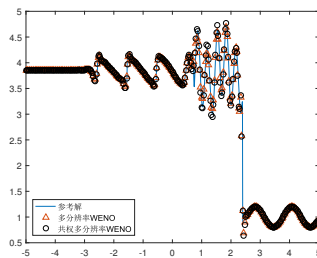


(a) 全图

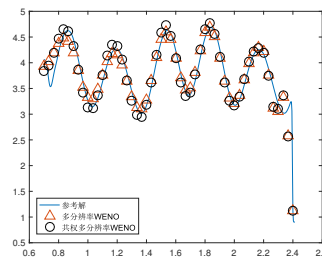


(b) 局部放大图

图 4 Shu-Osher 问题, 网格点: 200



(a) 全图



(b) 局部放大图

图 5 Shu-Osher 问题, 网格点: 300

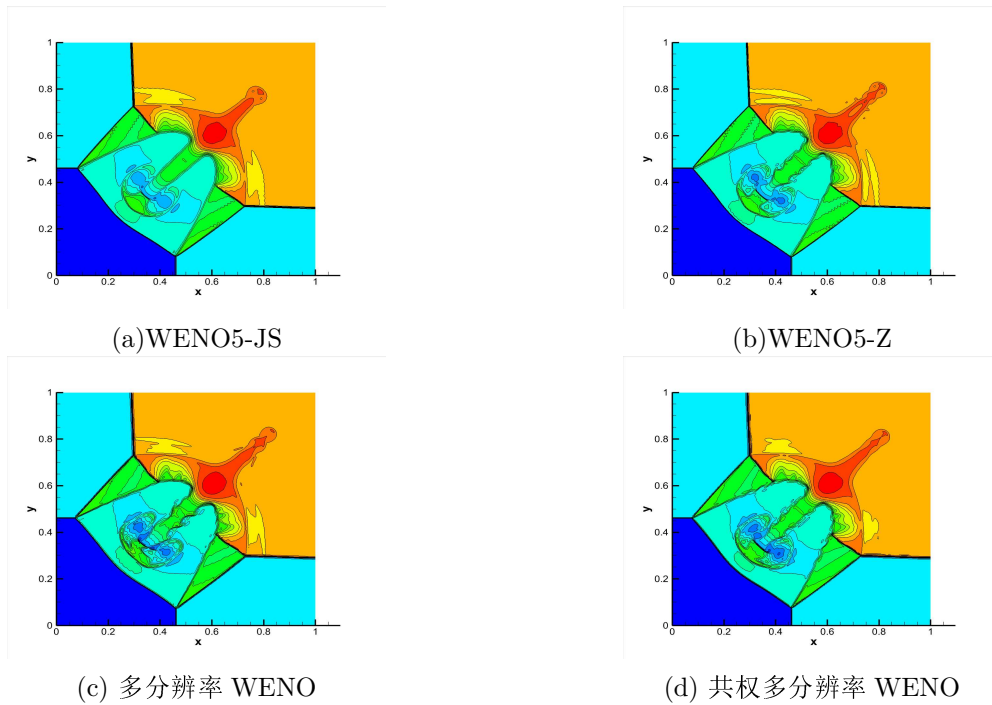
例 2 一维 Shu-Osher 问题, 该问题的初值条件如下:

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (3.857143, 2.629369, 10.333333) & -5 \leq x < -4, \\ (1 + 0.2 \sin(5x), 0, 1) & -4 \leq x \leq 5. \end{cases} \quad (5.6)$$

在这个数值算例中我们给出 $t = 0.038$ 时刻分别在网格点数为 200 和 300 时的两种情形, 分别如图 4 和图 5 所示, 其中图 4(b) 和图 5(b) 是复杂数值结果处的局部放大图. 通过图 4(b) 和图 5(b) 之间密度分布的对比, 我们能够更加直观地对比得出共权多分辨率 WENO 格式的数值解更贴近参考解, 具有更小的数值耗散. 表 2 则是量化地指出了所提方法的优势. 值得一提的是, 本算例的参考解仍然是基于 3000 个网格点, 由 WENO5-JS 格式计算的收敛解.

表 2 例 2 中的均方根误差 (RMSE) 值和平均绝对误差 (MAE) 值

网格点	多分辨率 WENO		共权多分辨率 WENO	
	RMSE	MAE	RMSE	MAE
50	0.28961068080	0.17990099412	0.27652414831	0.11990244706
100	0.17657522665	0.08537721980	0.16733756117	0.06012751782
200	0.15107160637	0.06527818259	0.12748924543	0.04715019925
300	0.07744095152	0.03307076113	0.06288711075	0.02432283654
500	0.05552246301	0.01833755928	0.04188419677	0.01481195908

图 6 黎曼问题, 网格点 400×400

例 3 二维黎曼问题, 该问题的初值条件如下:

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (1.5, 0, 0, 1.5) & 0.8 \leq x \leq 1, 0.8 \leq y \leq 1, \\ (0.5323, 1.206, 0, 0.3) & 0 \leq x < 0.8, 0.8 \leq y \leq 1, \\ (0.138, 1.206, 1.206, 0.029) & 0 \leq x < 0.8, 0 \leq y < 0.8, \\ (0.5323, 0, 1.206, 0.3) & 0.8 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 0.8. \end{cases} \quad (5.7)$$

$t = 0.8$ 时两种方案采用 400×400 网格点求解的密度等值线分别如图 6(c) 和图 6(d) 所示. 并且在图 6(a) 和图 6(b) 中, 本文还给出了 WENO5-JS 格式和 WENO5-Z 格式的收敛解. 相比图 6(a) 和图 6(b) 中的数值结果, 我们可以明显地看到, 共权多分辨率 WENO 格式在同一网格级上的表现优于一般的多分辨率 WENO 格式, 前者捕捉到了更微妙、更复杂的结构.

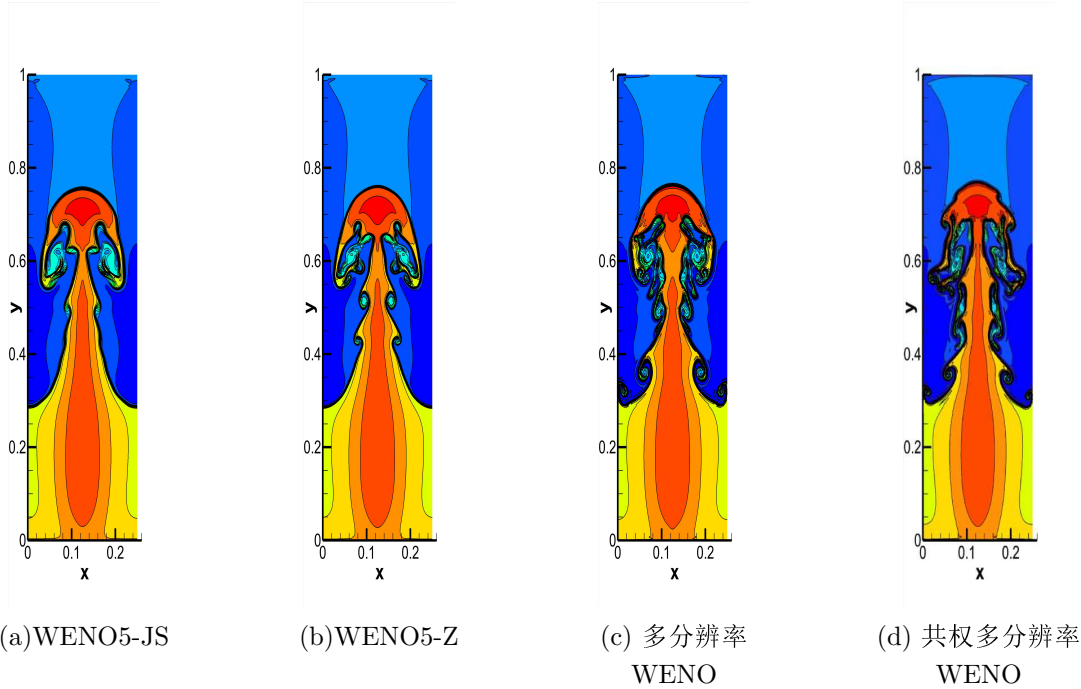


图 7 瑞利 - 泰勒不稳定问题, 网格点 240×960

例 4 作为一个检验高阶格式数值耗散的经典算例, 二维瑞利 - 泰勒不稳定问题描述了当加速度从重流体转向轻流体时, 不同密度的流体之间的界面不稳定性. 具体初值条件如下:

$$(\rho, u, v, p) = \begin{cases} (2, 0, -0.025\alpha \cos(8\pi x), 2y + 1) & 0 \leq y < 0.5, \\ (1, 0, -0.025\alpha \cos(8\pi x), y + \frac{3}{2}) & 0.5 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

其中 $\alpha = \sqrt{\frac{5p}{3\rho}}$, 计算域为 $(x, y) \in [0, 0.25] \times [0, 1]$. 左右边界采用反射边界条件, 在顶部边界, 流量值设置为 $(\rho, u, v, p) = (1, 0, 0, 2.5)$, 而底部边界条件为 $(\rho, u, v, p) = (2, 0, 0, 1)$. 网格采用 240×960 , 图 7(c) 和图 7(d) 分别给出了两种多分辨率格式在 $t = 1.95$ 时的数值模拟结果. 考虑图 7(a) 和图 7(b) 中的收敛解, 可知由于耗散较少, 相比于一般的多分辨率 WENO 格式, 共权多分辨率 WENO 格式产生了更复杂的不稳定结构.

6 总结

本文在多分辨率 WENO 格式的基础上引入共权思想对欧拉方程进行空间重构, 并给出了该格式求解欧拉方程的具体过程. 通过数值实验与原多分辨率 WENO 格式等进行对比, 得出了所提方法具有一定的鲁棒性和收敛精度.

参 考 文 献

- [1] Shu Chiwang. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws[M]. in Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equa-

- tions, Berlin Heidelberg: Springer, 1998: 325–432.
- [2] Shu Chiwang. High order WENO and DG methods for time-dependent convection-dominated PDEs: A brief survey of several recent developments[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, 316: 598–613.
- [3] Harten A, Engquist B, Osher S, Chakravarthy S R. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 71(2): 231–303.
- [4] Shu Chiwang, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 77(2): 439–471.
- [5] Jiang Guangshan, Shu Chiwang. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1996, 28: 126–202.
- [6] Wang Zhenming, Zhu Jun, Zhao Ning. A new fifth-order finite difference well-balanced multi-resolution WENO scheme for solving shallow water equations[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2020, 80: 1387–1404.
- [7] Shen Yiqing, Li Shiyao, Liu Shengping, Cui Kai, Zheng Guannan. A robust common-weights WENO scheme based on the flux vector splitting for Euler equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 119: 107–112.
- [8] Steger J L, Warming R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equations with application to finite-difference methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 40(2): 263–293.
- [9] Shu Chiwang, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1989, 83(1): 32–78.
- [10] Zhu Jun, Shu Chiwang. A new type of multi-resolution WENO schemes with increasingly higher order of accuracy[J]. *Journal of Computational Physics*, 2018, 375: 659–683.
- [11] Borges R, Carmona M, Costa B, Don W S. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 2008, 227(6): 3101–3211.

A FIFTH-ORDER FINITE DIFFERENCE COMMON-WEIGHTS MULTI-RESOLUTION WENO SCHEME BASED ON THE FLUX VECTOR SPLITTING FOR EULER EQUATIONS

ZHANG Xue-ying, WU Yang-jiong

(*School of Mathematics, Hohai University, Nanjing 210098, China*)

Abstract: This article studies the high-precision numerical solution of Euler equations and introduces the common-weights idea into the multi-resolution WENO numerical scheme, obtaining a new fifth-order finite difference common-weights multi-resolution WENO scheme. Numerical experiments have shown that this method can achieve consistent high accuracy in the smooth region of the solution and maintain the essentially oscillatory nature of the numerical solution near strong discontinuities, thus verifying the effectiveness of the algorithm.

Keywords: euler equations; multi-resolution WENO scheme; common-weights

2010 MR Subject Classification: 65M06;76M20