

## 双圈图的邻点强可区别全染色

周莉<sup>1</sup>, 文飞<sup>1</sup>, 李泽鹏<sup>2</sup>

(1. 兰州交通大学应用数学研究所, 甘肃 兰州 730070)

(2. 兰州大学信息科学与工程学院, 甘肃 兰州 730030)

**摘要:** 本文研究了双圈图的邻点强可区别全染色问题, 并利用结构分析法给出了双圈图的邻点强可区别全染色数的上界. 即, 当  $G$  是以  $\infty$ - 图为基图的双圈图时, 则  $\chi_{ast}(G) \leq \Delta(G) + 2$ ; 其他  $\chi_{ast}(G) \leq \Delta(G) + 3$ . 从而验证了张忠辅等提出的平面图图的邻点强可区别全染色猜想在双圈图上是成立的.

**关键词:** 双圈图; 邻点强可区别全染色; 邻点强可区别全染色数

MR(2010) 主题分类号: 05C15

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2023)06-0537-10

### 1 引言

本文所考虑的图均为简单无向图. 设  $G = (V, E)$  是一个简单连通图, 其中  $V(G)$  表示图  $G$  的顶点集,  $E(G)$  表示图  $G$  的边集. 对于  $\forall v \in V(G)$ , 用  $d(v)$  表示顶点  $v$  的度, 其中度为 1 的点称为悬挂点,  $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$  为图  $G$  的最大度, 简记为  $\Delta$ . 本文中使用但未定义的术语和符号见参考文献 [1].

图的染色问题是近年来图论研究的热点问题, 其具有重要的理论意义和广泛的实用背景. 2004 年, 张忠辅等在文 [2] 中提出了图的邻点可区别全染色的概念, 即图  $G$  的一个  $k$ -邻点可区别全染色是一个满足相邻点色集合不同的正常全染色  $f$  (即, 从  $V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  的映射), 其中任意一点的色集合为该点及关联边上的所染颜色构成的集合, 称  $\chi_{at}(G) = \min\{k | G \text{ 存在一个 } k\text{-邻点可区别全染色}\}$  为  $G$  的邻点可区别全染色数. 随后, 图的邻点可区别全染色引起了国内外学者的广泛关注, 见参考文献 [3–8, 11–13] 等. 2007 年, 张忠辅等在文 [9] 中提出了图的邻点强可区别全染色, 并给出了路、圈、完全二部图和树的邻点强可区别全染色数. 下面给出图的邻点强可区别全染色的概念:

**定义 1.1[9]** 令  $G = (V, E)$  是一个  $|V(G)| \geq 3$  的简单连通图,  $f$  是一个从  $E(G) \cup V(G)$  到  $\{1, 2, \dots, k\}$  的映射, 其中  $k$  是一个正整数. 若满足

(1) 对任意边  $uv \in E(G)$ ,  $f(u) \neq f(v)$ ,  $f(u) \neq f(uv)$ ,  $f(v) \neq f(uv)$ ;

(2) 对任意相邻边  $uv, uw \in E(G) (v \neq w)$ ,  $f(uv) \neq f(uw)$ ;

\*收稿日期: 2023-01-17 接收日期: 2023-06-13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11961041, 12261055); 甘肃省自然科学基金资助项目 (21JR11RA065).

作者简介: 周莉 (1997–), 女, 主要研究方向: 图论及其应用, E-mail: zhouli20211017@163.com;

通讯作者: 文飞 (1984–): 男, 教授, 主要研究方向: 图染色、图谱理论, E-mail: wenfei@lzjtu.edu.cn.

(3) 对任意边  $uv \in E(G)$ ,  $C_f\langle u \rangle \neq C_f\langle v \rangle$ .

其中  $C_f\langle u \rangle = \{f(u)\} \cup \{f(uv), f(v) | uv \in E(G)\}$ . 则  $f$  被称为  $G$  的一个邻点强可区别全染色, 简记为  $G$  的  $k$ -AVSDTC, 图  $G$  满足邻点强可区别全染色的最小颜色数  $k$  称为邻点强可区别全染色数, 简记  $\chi_{ast}(G)$ . 显然

$$\chi_{ast}(G) = \min\{k | G \text{ 存在一个 } k\text{-AVSDTC}\}.$$

基于一些特殊图类如路、圈、完全二部图和树的邻点强可区别全染色研究, 张忠辅等 [9] 猜想:

**猜想 1.2** [9] 对于阶数不小于 3 的平面图  $G$ , 则有  $\chi_{ast}(G) \leq \Delta(G) + 3$ .

一个简单连通图  $G$  满足  $k = |E(G)| - |V(G)| + 1$  时被称为  $k$ -圈图. 特别地, 当  $k = 1$  时称为单圈图, 记作  $U$ ; 当  $k = 2$  时称为双圈图, 将不包含悬挂点的双圈图称为双圈基图. 根据双圈图的结构, 可将其分为三类:  $\theta$ -图,  $\infty$ -图和哑铃图, 其分别对应于图 1 中的  $B_1(r, s, t)$  ( $r, s, t$  中至少有两个大于等于 1),  $B_2(r, t)$  ( $r \geq 2, t \geq 2$ ) 和  $B_3(r, s, t)$  ( $r \geq 2, t \geq 2$ ), 见文献 [10]. 其中要特别说明的是: 在  $B_1(r, s, t)$  中, 如果  $r, s, t$  中任意一个数为 0 时, 意味着点  $x$  与点  $y$  相邻; 在  $B_3(r, s, t)$  中, 如果  $s = 0$  时, 意味着点  $x$  与点  $y$  相邻.

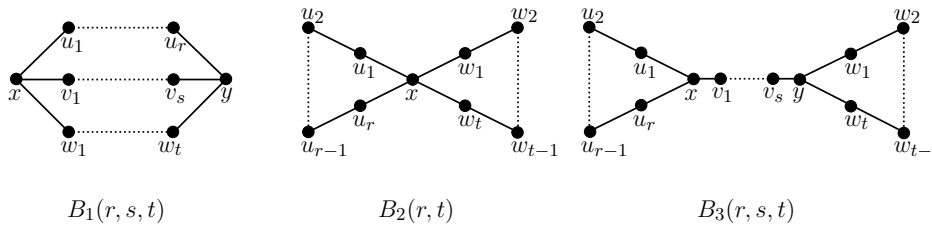


图 1 双圈基图

本文主要考虑了双圈图的邻点强可区别全染色, 并得到了如下结论:

**定理 1.3** 设图  $G$  是一个双圈图. 若  $G$  以  $\infty$ -图为基图的双圈图, 则  $\chi_{ast}(G) \leq \Delta(G) + 2$ ; 其他  $\chi_{ast}(G) \leq \Delta(G) + 3$ .

通过上述结论, 进一步验证了猜想 1.2 在双圈图上是成立的.

## 2 预备知识

**引理 2.1**[9] 对于顶点数  $|V(G)| \geq 3$  的图  $G$ , 有  $\chi_{ast}(G) \geq \Delta + 1$ . 特别地, 如果  $G$  含有两个相邻的最大度顶点, 则  $\chi_{ast}(G) \geq \Delta + 2$ .

**引理 2.2**[9] 令  $C_n$  是阶数为  $n$  的圈, 则

$$\chi_{ast}(C_n) = \begin{cases} 4, & n \neq 4, 10 \text{ 且 } n \text{ 是偶数;} \\ 5, & \text{其他.} \end{cases}$$

由引理 2.2 知,  $\chi_{ast}(C_n) \leq \Delta(C_n) + 3$ , 故猜想 1.2 成立.

**引理 2.3** 对于任意图  $G$ , 设  $x$  是图  $G$  中的一个顶点, 并且记  $d(x) = d$ , 令点  $y$  是点  $x$  的邻点. 假设  $f$  是图  $G$  的一个正常全染色. 如果  $d(y) \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$  或者  $d(y) \geq 2d + 1$ , 则有  $C_f\langle x \rangle \neq C_f\langle y \rangle$ .

证 显然, 对任意  $x \in V(G)$  都有  $d + 1 \leq |C_f(x)| \leq 2d + 1$ . 若  $d(y) \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ , 则有  $|C_f(y)| \leq 2d(y) + 1 \leq d < d + 1 \leq |C_f(x)|$ ; 若  $d(y) \geq 2d + 1$ , 类似可证  $|C_f(y)| > |C_f(x)|$ . 因此,  $C_f(x) \neq C_f(y)$ , 结论成立.

在图  $G$  的正常全染色  $f$  下, 若悬挂点  $x$  的邻点为  $y$ , 且  $d(y) \geq 3$ , 则由引理 2.3 可知,  $x$  与它的邻点  $y$  的色集合是强可区分的. 因而有如下推论:

推论 2.4 设  $x$  是图  $G$  的一个悬挂点,  $y$  是  $x$  的邻点, 若  $d(y) \geq 3$ , 则  $C_f(x) \neq C_f(y)$ .

### 3 定理 1.3 的证明

证 设图  $G$  是  $\Delta(G) \geq 3$  的双圈图,  $H$  是以  $\infty$ - 图为基图的双圈图. 记色集合为  $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G) + 2\}$ . 首先, 根据图  $G$  是否同构于  $H$  分为以下两种情形:

情形 1  $G \cong H$ .

当  $G \cong H$  时, 由  $B_2(r, t)$  知  $\Delta(G) \geq 4$ , 则  $\Delta(G) + 2 \geq 6$ . 根据  $G$  是否有悬挂点分为两种子情形:

情形 1.1 图  $G$  没有悬挂点.

利用拆分和粘合的方法分析其结构, 如图 2 所示.

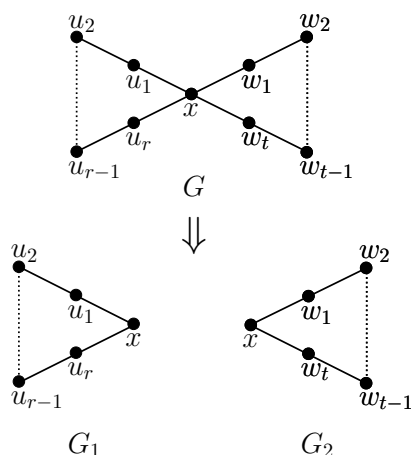


图 2 图  $G$  的拆分

将图  $G$  拆分为图  $G_1$  和图  $G_2$ , 显然图  $G_1$  和图  $G_2$  都是圈. 由引理 2.2 知, 图  $G_1$  和图  $G_2$  均是 5 色可染的, 假设所用的 5 种色为  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 不失一般性, 用颜色 1 染图  $G_1$  和图  $G_2$  中的点  $x$ , 用颜色 2 染图  $G_1$  中的边  $u_1x$ , 用颜色 3 染图  $G_1$  中的边  $u_r x$ , 用颜色 4 染图  $G_2$  中的边  $xw_1$ , 用颜色 5 染图  $G_2$  中的边  $xw_t$ , 为了保证以上染色能做到, 可以在图  $G_1$  和图  $G_2$  中进行颜色轮换, 使得上述染色成立. 现将图  $G_1$  和图  $G_2$  粘合变成图  $G$ . 此时, 会得到  $C_f(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 考虑最坏的情况, 即  $C_f(u_1) = C_f(u_r) = C_f(w_1) = C_f(w_t) = C_f(x) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 则用颜色  $g \in \{C \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$  中的任一种颜色重染点  $w_1$ . 于是,  $C_f(x) = \{1, 2, 3, 4, 5, g\}$ , 即  $|C_f(x)| = 6$ , 而  $|C_f(u_1)| = |C_f(u_r)| = |C_f(w_1)| = |C_f(w_t)| = 5$ , 所以粘合后的点  $x$  与其邻点均是可区别的, 故该情形得证.

情形 1.2 图  $G$  至少有一个悬挂点.

根据悬挂点的邻点是否在基图上又可以分为以下两种情形:

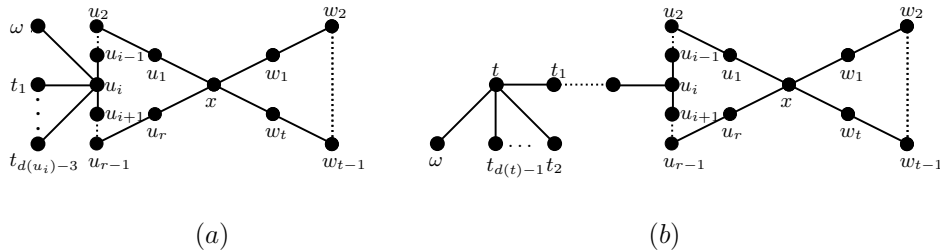


图 3 图  $G$  至少有一个悬挂点

**情形 1.2.1** 悬挂点的邻点都在基图上.

不失一般性, 设任意一个悬挂点  $\omega$  的邻点为  $u_i$ , 显然  $d(u_i) \geq 3$ , 记点  $u_i$  除点  $\omega$  之外的其余邻点为  $u_{i-1}, u_{i+1}, t_1, \dots, t_{d(u_i)-3}$ , 其中  $2 \leq d(u_j) \leq \Delta, j = i - 1, i + 1. d(t_i) = 1, i = 1, 2, \dots, d(u_i) - 3$ . 见图 3(a). 利用第二数学归纳法来证明该情形. 首先删去一个悬挂点  $\omega$ . 令  $G' = G - \omega$ , 由归纳假设,  $\chi_{ast}(G') \leq \Delta(G') + 2$ , 其中  $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ . 令  $f'$  是  $G'$  的  $(\Delta(G') + 2) - AVSDTC$ . 现在将  $f'$  拓展为  $G$  的一个  $(\Delta(G) + 2) - AVSDTC f$ . 令  $f'(u_i) = 1, f'(u_i t_j) = j + 1, j = 1, 2, \dots, d(u_i) - 3, f'(u_i u_{i+1}) = d(u_i) - 1, f'(u_i u_{i-1}) = d(u_i)$ , 则  $|C_{f'}\langle u_i \rangle| \geq d(u_i)$ . 由推论 2.4 知,  $C_f\langle u_i \rangle \neq C_f\langle t_j \rangle, j = 1, 2, \dots, d(u_i) - 3$ .

如果  $|C_{f'}\langle u_i \rangle| \geq d(u_i) + 1$ , 则用  $C_{f'}\langle u_i \rangle \setminus \{1, 2, \dots, d(u_i)\}$  中的任一种颜色染给边  $u_i \omega$ , 点  $\omega$  染颜色 2. 此时,  $C_{f'}\langle u_i \rangle = C_f\langle u_i \rangle$ . 因此, 得到  $C_f\langle u_i \rangle \neq C_f\langle u_{i-1} \rangle$  且  $C_f\langle u_i \rangle \neq C_f\langle u_{i+1} \rangle$ .

如果  $|C_{f'}\langle u_i \rangle| = d(u_i)$ , 则  $C_{f'}\langle u_i \rangle = \{1, 2, \dots, d(u_i)\}$ . 首先  $f$  是一个正常的全染色, 所以  $f(u_i \omega) \neq f(u_i), f(u_i \omega) \neq f(u_i t_j), j = 1, 2, \dots, d(u_i) - 3, f(u_i \omega) \neq f(u_i u_{i-1})$  且  $f(u_i \omega) \neq f(u_i u_{i+1})$ . 故  $u_i \omega$  有  $d(u_i)$  种禁用色; 同理点  $u_1$  有 2 种禁用色. 因此, 边  $u_i \omega$  和点  $\omega$  有  $(C - d(u_i)) \times (C - 2) \geq 2\Delta$  种可用色组合.

首先考虑点  $u_i$  与点  $u_{i-1}$  的色集合的可区分性. 显然当  $|C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| - |C_{f'}\langle u_i \rangle| \geq 3$  或  $|C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| - |C_{f'}\langle u_i \rangle| \leq 0$  时,  $C_f\langle u_i \rangle \neq C_f\langle u_{i-1} \rangle$ .

- (1) 如果  $|C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| - |C_{f'}\langle u_i \rangle| = 2$ , 不失一般性, 假设  $C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle = \{1, 2, \dots, d(u_i), x, y\}$ . 则当边  $u_i \omega$  和点  $\omega$  是  $(x, y)$  或  $(y, x)$  时会导致  $C_f\langle u_i \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 因此, 边  $u_i \omega$  和点  $\omega$  存在至多 2 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_i \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ ;
- (2) 如果  $|C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| - |C_{f'}\langle u_i \rangle| = 1$ , 不失一般性, 假设  $C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle = \{1, 2, \dots, d(u_i), x\}$ . 则当边  $u_i \omega$  和点  $\omega$  是  $(x, j), j = 2, 3, \dots, d(u_i)$  中的一种时, 会导致  $C_f\langle u_i \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 因此, 至多有  $d(u_i) - 1$  种禁用色组合使得点  $u_i$  与点  $u_{i-1}$  的色集合不可区分.

根据 (1) 和 (2), 至多有  $\max\{2, d(u_i) - 1\} = d(u_i) - 1$  种禁用色组合使得  $C_f\langle u_i \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 同理, 至多有  $d(u_i) - 1$  种禁用色组合使得  $C_f\langle u_i \rangle = C_f\langle u_{i+1} \rangle$ . 于是, 边  $u_i \omega$  和点  $\omega$  至少有  $2\Delta - 2(d(u_i) - 1) \geq 2$  种可用色组合. 对于  $G$  的其他元素, 保持  $f = f'$  (在后面的证明中不在赘述). 因此,  $G$  有一个  $(\Delta(G) + 2) - AVSDTC f$ .

**情形 1.2.2** 至少有一个悬挂点的邻点不在基图上.

选择一个距离基图最远的悬挂点, 记作点  $\omega$ , 点  $\omega$  的邻点记为  $t$ , 则  $2 \leq d(t) \leq \Delta$ . 将  $t$  的除去点  $\omega$  的邻点记为  $t_i, i = 1, 2, \dots, d(t) - 1$ , 其中  $2 \leq t_1 \leq \Delta, t_j = 1, j = 2, 3, \dots, d(t) - 1$ , 见图 3(b). 显然可得  $|C_f(t)| \geq 3, |C_f(t_1)| \geq 3$ . 令  $G' = G - \omega$ , 由归纳假设,  $\chi_{ast}(G') \leq \Delta(G') + 2$ , 其中  $\Delta(G') \leq \Delta(G)$ . 令  $f'$  是  $G'$  的  $(\Delta(G') + 2) - AVSDTC$ . 下面按照点  $t$  的度分为两种情形:

- (1) 当  $d(t) = 2$ . 若  $3 \leq |C_f(t_1)| \leq 5$ , 则令  $f(t\omega) \subset C \setminus C_f(t_1), f(\omega) = 2$ ; 若  $|C_f(t_1)| \geq 6$ , 则令  $f(t\omega) \subset C_f(t_1) \setminus \{f'(t), f'(t\omega), f'(\omega)\}, f(\omega) = 2$ .
- (2) 当  $d(t) \geq 3$ . 由推论 2.4 知,  $C_f(t) \neq C_f(t_j), j = 2, 3, \dots, d(t) - 1$ . 考虑到边  $t\omega$  有  $d(t)$  种禁用色, 点  $\omega$  有 2 种禁用色, 故边  $t\omega$  和点  $\omega$  共有  $(C - d(t))(C - 2) \geq 2\Delta$  种可用组合. 证明过程类似情形 1.2.1 中的 (1) 和 (2). 故至多有  $\max\{2, d(t) - 1\} = d(t) - 1$  种禁用色组合使得  $C_f(u_i) = C_f(u_{i-1})$ . 同理, 至多有  $d(t) - 1$  种禁用色组合使得  $C_f(t) = C_f(t_1)$ . 于是, 边  $t\omega$  和点  $\omega$  至少有  $2\Delta - 2(d(t) - 1) \geq 2$  种可用色组合.

这与  $G$  的选取矛盾. 因此,  $G$  存在一个  $(\Delta(G) + 2) - AVSDTC f$ .

**情形 2**  $G \not\cong H$ .

当  $G \not\cong H$  时,  $\Delta(G) \geq 3$ , 从而  $\Delta(G) + 3 \geq 6$ . 根据图  $G$  是否有悬挂点分为两种子情形:

**情形 2.1** 图  $G$  没有悬挂点.

当图  $G$  没有悬挂点时, 又可以将图  $G$  分为以下两种情形:

**情形 2.1.1** 图  $G$  同构于以  $\theta$ - 图为基图的双圈图.

- (1) 当  $B_1(r, s, t)$  中的  $r, s, t \leq 2$  时, 染色方案如图 4 所示.

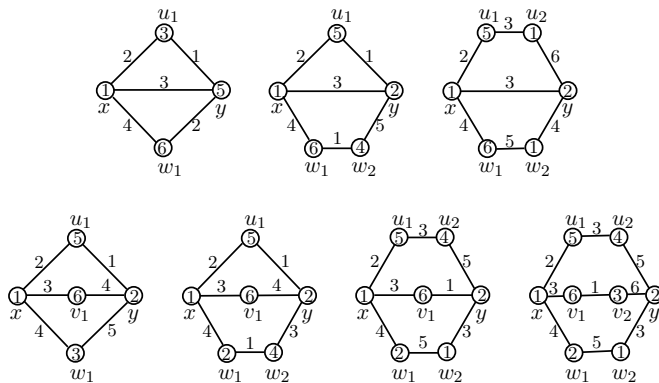


图 4  $r, s, t \leq 2$  时的 7 种  $\theta$ - 型双圈图

- (2) 当  $r, s, t$  中至少有一个大于等于 3 时, 利用数学归纳法来证明该情形. 不失一般性, 设  $r \geq 3$ , 如图 5 所示. 令  $G' = G - u_i, 2 \leq i \leq r - 1$ , 需要说明的是: 如果  $i = 2$ , 则点  $u_{i-2}$  与点  $x$  重合; 如果  $i = r - 1$ , 则点  $u_{i+2}$  与点  $y$  重合. 由归纳假设知  $G'$  有一个  $(\Delta(G') + 2) - AVSDTC f'$ , 其色集合记为  $C = \{1, 2, \dots, \Delta(G') + 2\}$ . 下面染边  $u_{i-1}u_i, u_iu_{i+1}$  和点  $u_i$ , 将  $f'$  拓展为  $G$  的一个  $AVSDTC f$ . 根据点  $u_{i-1}$  和点  $u_{i+1}$  在  $G'$  中的颜色是否相同, 考虑以下两种情形:

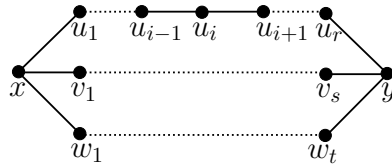


图 5  $\theta$ -图中  $r \geq 3$  的情形

(2.1)  $f'(u_{i-1}) = f'(u_{i+1})$ .

不失一般性, 假设  $f'(u_{i-1}) = f'(u_{i+1}) = 1$ ,  $f'(u_{i-2}u_{i-1}) = a$  和  $f'(u_{i+1}u_{i+2}) = b$ . 由定义 1.1 知  $f$  首先是  $G$  的一个正常的全染色. 因此, 边  $u_{i-1}u_i$  有 2 种禁用色, 即  $f(u_{i-1}u_i) \neq f(u_{i-2}u_{i-1})$  且  $f(u_{i-1}u_i) \neq f(u_{i-1})$ , 其中  $f(u_{i-2}u_{i-1}) = f'(u_{i-2}u_{i-1})$  且  $f(u_{i-1}) = f'(u_{i-1})$ ; 边  $u_iu_{i+1}$  有 3 种禁用色, 即  $f(u_iu_{i+1}) \neq f(u_{i-1}u_i)$ ,  $f(u_iu_{i+1}) \neq f(u_{i+1})$  且  $f(u_iu_{i+1}) \neq f(u_{i+1}u_{i+2})$ , 其中  $f(u_{i+1}) = f'(u_{i+1})$ ,  $f(u_{i+1}u_{i+2}) = f'(u_{i+1}u_{i+2})$ ; 点  $u_i$  有 3 种禁用色, 即  $f(u_i) \neq f(u_{i-1})$ ,  $f(u_i) \neq f(u_{i-1}u_i)$  且  $f(u_i) \neq f(u_iu_{i+1})$ . 因此, 边  $u_{i-1}u_i$ , 边  $u_iu_{i+1}$  和点  $u_i$  至少有  $(6-2) \times (6-3) \times (6-3) = 36$  种可用色组合. 下面考虑会使点  $u_{i-2}$  和点  $u_{i-1}$  的色集合相同的禁用色组合数. 显然, 当  $|C_{f'}\langle u_{i-2} \rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| \geq 3$  或  $|C_{f'}\langle u_{i-2} \rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| \leq 0$  时,  $C_f\langle u_{i-2} \rangle \neq C_f\langle u_{i-1} \rangle$ .

- a) 如果  $|C_{f'}\langle u_{i-2} \rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| = 2$ , 则边  $u_{i-1}u_i$  和点  $u_i$  至多存在 2 种禁用色组合, 即  $\{f(u_{i-1}u_i), f(u_i)\} \subset C_{f'}\langle u_{i-2} \rangle \setminus C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle$  使得  $C_f\langle u_{i-2} \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 注意到边  $u_iu_{i+1}$  有 3 种可用色, 因此至多有  $2 \times 3 = 6$  种禁用色组合使得点  $u_{i-2}$  与点  $u_{i-1}$  的色集合不可区分;
- b) 如果  $|C_{f'}\langle u_{i-2} \rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle| = 1$ , 则边  $u_{i-1}u_i$  和点  $u_i$  至多存在 3 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i-2} \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 尽可能使禁用色组合的数量最大化, 假设  $f'(u_{i-2}) = c$ ,  $C_{f'}\langle u_{i-1} \rangle = \{1, a, c\}$  且  $C_{f'}\langle u_{i-2} \rangle = \{1, a, c, d\}$ , 其中  $1, a, c$  和  $d$  彼此互不相同. 当边  $u_{i-1}u_i$  和点  $u_i$  上的颜色是  $(c, d)$ ,  $(d, c)$  和  $(d, a)$  这三种组合中的一种时, 会导致  $C_f\langle u_{i-2} \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 注意到边  $u_iu_{i+1}$  有 3 种可用色. 因此, 至多有  $3 \times 3 = 9$  种禁用色组合使得点  $u_{i-2}$  和点  $u_{i-1}$  的色集合不可区分.

由 a) 和 b) 得知, 至多有  $\max\{6, 9\} = 9$  种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i-2} \rangle = C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 计算结果受染色先后顺序影响, 所以边  $u_iu_{i+1}$  和点  $u_i$  至多有 3 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i+2} \rangle = C_f\langle u_{i+1} \rangle$ . 注意到边  $u_{i-1}u_i$  有 4 种可用色. 因此, 至多有  $3 \times 4 = 12$  种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i+2} \rangle = C_f\langle u_{i+1} \rangle$ .

下面考虑会导致点  $u_{i-1}$  和点  $u_i$  的色集合相同的禁用色组合数. 假设边  $u_{i-1}u_i$  和点  $u_i$  已在  $f$  下被着色, 则  $3 \leq |C_f\langle u_{i-1} \rangle| \leq 5$ .

- i) 如果  $|C_f\langle u_{i-1} \rangle| = 3$ , 不失一般性, 假设  $C_f\langle u_{i-1} \rangle = \{1, a, c\}$ , 则有  $f'(u_{i-2}) = f(u_{i-2}) = f(u_{i-1}u_i) = c$  和  $f(u_i) = a$ . 因为  $f(u_{i+1}) = 1$ , 所以  $f(u_iu_{i+1}) \neq 1$ . 注意到  $f(u_iu_{i+1}) \neq a$  和  $f(u_iu_{i+1}) \neq c$ , 所以  $f(u_iu_{i+1}) \notin C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 因此,  $C_f\langle u_{i-1} \rangle \neq C_f\langle u_i \rangle$ ;

- ii) 如果  $|C_f\langle u_{i-1}\rangle| = 4$ , 则边  $u_{i-1}u_i$ , 点  $u_i$  和边  $u_iu_{i+1}$  至多存在 4 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i-1}\rangle = C_f\langle u_i\rangle$ . 为了讨论最坏的情况, 即保证禁用组合数最多, 假设  $C_f\langle u_{i-1}\rangle = \{1, a, c, d\}$ . 当边  $u_{i-1}u_i$ , 点  $u_i$  和边  $u_iu_{i+1}$  上的颜色是依次是  $(c, a, d)$ ,  $(c, d, a)$ ,  $(d, a, c)$  和  $(d, c, a)$  中的一种时, 会导致  $C_f\langle u_{i-1}\rangle = C_f\langle u_i\rangle$ . 因此, 至多有 4 种禁用色组合使得点  $u_{i-1}$  和点  $u_i$  的色集合不可区分;
- iii) 如果  $|C_f\langle u_{i-1}\rangle| = 5$ , 则  $C_f\langle u_{i-1}\rangle \neq C_f\langle u_i\rangle$ . 是因为  $f(u_{i-1}) = f(u_{i+1}) = 1$ , 显然有  $|C_f\langle u_i\rangle| = 4$ .

根据 i), ii) 和 iii), 至多有 4 种禁用色组合会导致  $C_f\langle u_{i-1}\rangle = C_f\langle u_i\rangle$ . 同理, 至多有 4 种禁用色组合会导致  $C_f\langle u_{i+1}\rangle = C_f\langle u_i\rangle$ . 于是, 边  $u_{i-1}u_i$ , 边  $u_iu_{i+1}$  和点  $u_i$  至少有  $36 - 9 - 12 - 4 \times 2 = 7$  种可用色组合. 因此, 可以将  $f'$  扩展为  $G$  的一个  $(\Delta(G) + 2) - AVSDTC f$ .

(2.2)  $f'(u_{i-1}) \neq f'(u_{i+1})$ .

不失一般性, 假设  $f'(u_{i-1}) = 1$ ,  $f'(u_{i+1}) = 2$ ,  $f'(u_{i-2}u_{i-1}) = a$  和  $f'(u_{i+1}u_{i+2}) = b$ . 为了使禁用色组合的数量尽可能多, 设  $a, b \neq 1, 2$ . 由定义 1.1 知  $f$  首先应该是  $G$  的一个正常全染色. 因此, 点  $u_i$  有 2 种禁用色, 即  $f(u_i) \neq f(u_{i-1})$ ,  $f(u_i) \neq f(u_{i+1})$ ; 边  $u_{i-1}u_i$  有 3 种禁用色; 边  $u_iu_{i+1}$  有 4 种禁用色. 所以, 点  $u_i$ , 边  $u_{i-1}u_i$  和  $u_iu_{i+1}$  至少有  $(6 - 2) \times (6 - 3) \times (6 - 4) = 24$  种可用色组合.

首先, 考虑使得点  $u_{i-2}$  与点  $u_{i-1}$  的色集合相同的禁用色组合数. 显然, 当  $|C_{f'}\langle u_{i-2}\rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1}\rangle| \geq 3$  或  $|C_{f'}\langle u_{i-2}\rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1}\rangle| \leq 0$  时,  $C_f\langle u_{i-2}\rangle \neq C_f\langle u_{i-1}\rangle$ .

- a) 如果  $|C_{f'}\langle u_{i-2}\rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1}\rangle| = 2$ , 则至多存在 2 种禁用色组合  $\{f(u_{i-1}u_i), f(u_i)\} \subset C_{f'}\langle u_{i-2}\rangle \setminus C_{f'}\langle u_{i-1}\rangle$  使得  $C_f\langle u_{i-2}\rangle = C_f\langle u_{i-1}\rangle$ . 又由于边  $u_iu_{i+1}$  有 2 种可用色, 故至多有  $2 \times 2 = 4$  种禁用色组合使得点  $u_{i-2}$  和点  $u_{i-1}$  的色集合不可区分;
- b) 如果  $|C_{f'}\langle u_{i-2}\rangle| - |C_{f'}\langle u_{i-1}\rangle| = 1$ , 则至多有 3 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i-2}\rangle = C_f\langle u_{i-1}\rangle$ . 不失一般性, 设  $f'(u_{i-2}) = c$ ,  $C_{f'}\langle u_{i-1}\rangle = \{1, a, c\}$  且  $C_{f'}\langle u_{i-2}\rangle = \{1, a, c, d\}$ . 当边  $u_{i-1}u_i$  和点  $u_i$  为  $(c, d)$ ,  $(d, c)$  和  $(d, a)$  中的一种组合时, 会导致  $C_f\langle u_{i-2}\rangle = C_f\langle u_{i-1}\rangle$ . 又由于  $u_iu_{i+1}$  有 2 种可用色. 于是, 至多有  $3 \times 2 = 6$  种禁用色组合使得点  $u_{i-2}$  和点  $u_{i-1}$  的色集合不可区分.

根据 a) 和 b), 至多有  $\max\{4, 6\} = 6$  种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i-2}\rangle = C_f\langle u_{i-1}\rangle$ . 类似地, 点  $u_{i+2}$  和点  $u_{i+1}$  至多有 9 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i+2}\rangle = C_f\langle u_{i+1}\rangle$ . 下面考虑会使得点  $u_{i-1}$  和点  $u_i$  的色集合相同的禁用色组合数. 假设边  $u_{i-1}u_i$  和点  $u_i$  已在  $f$  下被着色, 则  $3 \leq |C_f\langle u_{i-1}\rangle| \leq 5$ .

- i) 如果  $|C_f\langle u_{i-1}\rangle| = 3$ , 则边  $u_{i-1}u_i$ , 点  $u_i$  和边  $u_iu_{i+1}$  至多有 1 种禁用色组合, 即  $(2, a, 1)$ . 因为  $f'(u_{i+1}) = 2$ , 所以  $2 \in C_f\langle u_i\rangle$ . 为了确保  $C_f\langle u_{i-1}\rangle = C_f\langle u_i\rangle$ , 则  $f(u_{i-1}u_i) = 2$ , 进一步得  $f(u_i) = f'(u_{i-2}u_{i-1}) = a$  且  $f(u_iu_{i+1}) = f'(u_{i-1}) = 1$ . 因此, 至多有 1 种禁用色组合使得点  $u_{i-1}$  和点  $u_i$  的色集合不可区分;
- ii) 如果  $|C_f\langle u_{i-1}\rangle| = 4$ , 则至多存在 3 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i-1}\rangle = C_f\langle u_i\rangle$ .

由  $f'(u_{i+1}) = 2$  得  $2 \in C_f\langle u_{i-1} \rangle$ . 不失一般性, 令  $C_f\langle u_{i-1} \rangle = \{1, 2, a, c\}$ . 当边  $u_{i-1}u_i$ , 点  $u_i$  和边  $u_iu_{i+1}$  为  $(c, a, 1)$ ,  $(2, c, a)$  和  $(2, a, c)$  中的组合之一时会导致  $C_f\langle u_{i-1} \rangle = C_f\langle u_i \rangle$ . 因此, 至多存在 3 种禁用色组合使得点  $u_{i-1}$  和点  $u_i$  的色集合不可区分;

iii) 如果  $|C_f\langle u_{i-1} \rangle| = 5$ , 不失有一般性, 假设  $C_f\langle u_{i-1} \rangle = \{1, 2, a, c, d\}$ . 当边  $u_{i-1}u_i$ , 点  $u_i$  和边  $u_iu_{i+1}$  为  $(c, d, a)$  和  $(d, c, a)$  中的一种时会导致  $C_f\langle u_{i-1} \rangle = C_f\langle u_i \rangle$ . 因此, 至多有 2 种禁用色组合使得点  $u_{i-1}$  和点  $u_i$  的色集合不可区分.

根据 i), ii) 和 iii), 至多有 3 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i-1} \rangle = C_f\langle u_i \rangle$ . 类似地, 至多有 3 种禁用色组合使得  $C_f\langle u_{i+1} \rangle = C_f\langle u_i \rangle$ . 于是, 边  $u_{i-1}u_i$ , 点  $u_i$  和边  $u_iu_{i+1}$  至少有  $24 - 6 - 9 - 3 \times 2 = 3$  种可用色组合. 因此, 可以将  $f'$  扩展为  $G$  的一个  $(\Delta(G) + 2) - AVSDTC f$ .

**情形 2.1.2** 图  $G$  同构于以哑铃图为基图的双圈图.

(1) 当  $B_3(r, s, t)$  中的  $s = 0$  时, 如图 6 所示, 将图  $G$  拆分为图  $G_1$  和图  $G_2$ , 显然图  $G_1$  和图  $G_2$  都是单圈图. 容易知道, 图  $G_1$  和图  $G_2$  均 5 色可染的, 假设所用的 5 种色为  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 不失一般性, 首先用颜色 1 染图  $G_1$  中的点  $x$  和图  $G_2$  中的点  $y$ , 其次用颜色 2 染图  $G_1$  和图  $G_2$  中的边  $xy$ , 接着用颜色 3 染图  $G_1$  中的  $y$  和图  $G_2$  中的点  $x$ , 最后将图  $G_2$  中颜色 1 和 3 进行轮换. 将图  $G_1$  和图  $G_2$  粘合变成图  $G$ . 此时, 用颜色  $g \in C \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$  中的任一种颜色重染边  $yw_1$ . 显然粘合后各点之间的色集合均可区别, 故该情形得证.

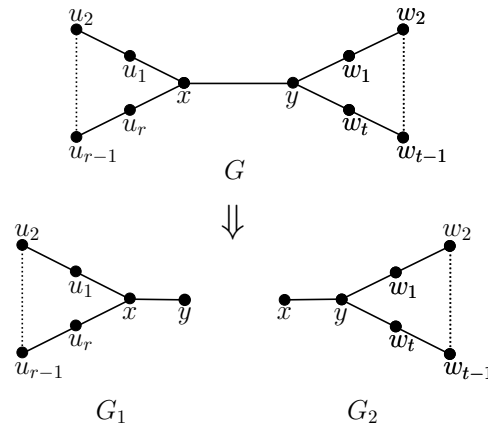


图 6 图  $G$  的拆分

(2) 当  $B_3(r, s, t)$  中的  $s \geq 1$  时, 如图 7 所示, 将图  $G$  拆分为图  $G_1$  和图  $G_2$ , 显然图  $G_1$  和图  $G_2$  都是单圈图. 容易推知, 图  $G_1$  和图  $G_2$  均是 5 色可染的, 不妨设所用的 5 种色为  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 不失一般性, 首先用颜色 1 染图  $G_1$  和图  $G_2$  中的点  $v_k$ , 其次用颜色 2 染图  $G_1$  中边  $v_{k-1}v_k$  和图  $G_2$  中的边  $v_kv_{k+1}$ , 接着用颜色 3 染图  $G_1$  中的点  $v_{k-1}$  和图  $G_2$  中的点  $v_{k+1}$ , 最后将图  $G_2$  中颜色 2 和 4 进行轮换, 颜色 3 和 5 进行轮换. 将图  $G_1$  和

图  $G_2$  粘合变成图  $G$ . 此时,  $C_f(v_k) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . 为了避免点  $v_k$  和其邻点的色集合重复, 于是用颜色  $g \in C \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\}$  中的任一种颜色重染点  $v_{k-1}$  和边  $v_kv_{k+1}$ . 此时各点之间均可区别, 该情形得证.

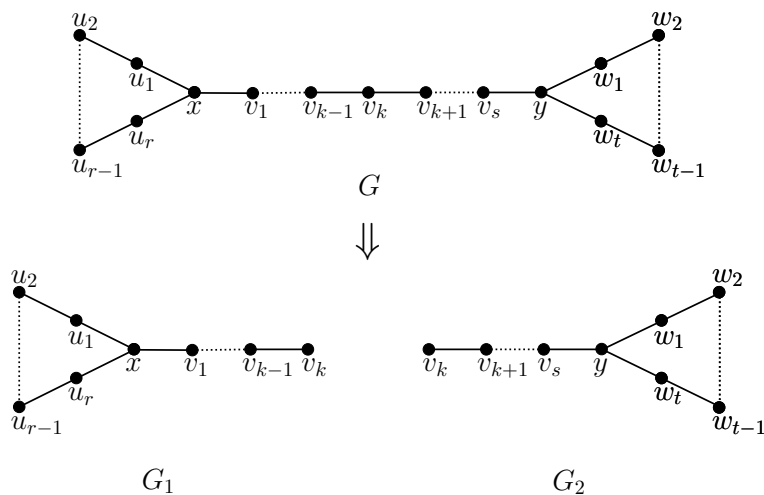


图 7 图  $G$  的拆分

**情形 2.2** 图  $G$  至少含有一个悬挂点.  
证明过程类似情形 1.2, 这里不再赘述.

### 参 考 文 献

- [1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: Macmillan Press, 1976.
- [2] 张忠辅, 陈祥恩, 李敬文等. 关于图的邻点可区别全染色 [J]. 中国科学 A 辑, 2004, 34(5): 574-583.
- [3] Wang Weifan, Huang Danjun. The adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2014, 27(2): 379-396.
- [4] Sun Lin, Cheng Xiaohan, Wu Jianliang. The adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs without adjacent 4-cycles[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2017, 33(2): 779-790.
- [5] Huang Danjun, Wang Weifan, Yan Chengchao. A note on the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2012, 312(24): 3544-3546.
- [6] Wang Haoyan. On the adjacent vertex-distinguishing total chromatic numbers of the graphs with  $\Delta(G) = 3$ [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2007, 14(1): 87-109.
- [7] 杨超, 姚兵, 王宏宇等. 小度数图的邻点可区别全染色 [J]. 数学杂志, 2014, 2: 295-302.
- [8] Chang Yulin, Hu Jie, Wang Guanghui. Adjacent vertex distinguishing total coloring of planar graphs with maximum degree 8[J]. Discrete Mathematics, 2020, 343(10): 112014.
- [9] Zhang Zhongfu, Cheng Hui, Yao Bing. On the adjacent-vertex-strongly-distinguishing total coloring of graphs[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2008, 51(3): 427-436.
- [10] 贾秀卿, 文飞, 李沐春, 李泽鹏. 双圈图的  $D(2)$ -点可区别边染色 [J]. 高校应用数学学报, 2023, 38(2): 236-252.

- [11] Zhang Zhongfu, Chen Xiang'en. On adjacent-vertex-distinguishing total coloring of graphs[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2005, 48(3): 289–299.
- [12] Huo Jingjing, Wang Weifan, Wang Yiqiao. A characterization for the neighbor-distinguishing total chromatic number of planar graphs with  $\Delta = 13$ [J]. Discrete Mathematics, 2018, 341(11): 3044–3056.
- [13] 陈祥恩, 张忠辅, 晏静之等. 关于几类特殊图的 Mycielski 图的邻点可区别全色数 [J]. 兰州大学学报: 自然科学版, 2005, 41(2): 117–122.

## ADJACENT VERTEX STRONGLY DISTINGUISHING TOTAL COLORING OF A BICYCLIC GRAPH

ZHOU Li<sup>1</sup>, WEN Fei<sup>1</sup>, LI Ze-peng<sup>2</sup>

(1. Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

(2. School of Information Science and Engineering, Lanzhou University, Lanzhou 730030, China)

**Abstract:** In this paper, we consider the problem of adjacent vertex strongly distinguishable total coloring of a bicyclic graph. By using the structural analysis, the upper bound of the adjacent vertex strongly distinguishable total chromatic number of a bicyclic graph is given, that is,  $\chi_{ast}(G) \leq \Delta(G) + 2$  if  $G$  is a bicyclic graph with  $\infty$ -graph as its base graph; and  $\chi_{ast}(G) \leq \Delta(G) + 3$  otherwise. By the way, it further shows that the conjecture of adjacent vertex strongly distinguishable total coloring of a planer graph posed by Zhongfu Zhang et al. holds on bicyclic graphs.

**Keywords:** bicyclic graph; adjacent vertex strongly distinguishing total-coloring; adjacent vertex strongly distinguishing total chromatic number

**2010 MR Subject Classification:** 05C15