

对流扩散特征值问题的自适应间断有限元方法

段丽梅, 陈兴龙, 韩家宇

(贵州师范大学 数学科学学院, 贵州 贵阳 550025)

摘要: 本文研究了对流扩散特征值问题的间断有限元方法. 对流扩散方程作为偏微分方程一个重要的分支, 源于环境科学、流体力学、空气动力学等诸多实际物理背景中, 由于对流扩散方程的解很难通过解析的方法得到, 所以探索对流扩散方程的数值方法具有重要的价值. 对流扩散特征值问题的数值方法是当前计算数学界的热点. 该研究的困难之处在于该问题的非对称性和对流项导致的边界层效应. 本文利用间断有限元方法研究对流扩散特征值问题, 获得了该方法的完整的后验误差估计结果, 并进行了自适应有限元计算. 数值实验结合理论分析表明我们的方法达到了最优收敛阶.

关键词: 对流扩散特征值; 间断有限元方法; 后验误差; 自适应计算

MR(2010) 主题分类号: 65N25; 65N30 中图分类号: O241.82

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2023)06-0515-14

1 引言

对流扩散特征值问题在流体力学、环境科学、能源开发和电子科学等多个领域的应用使它引起了科学界的广泛关注, 例如文献 [1, 2] 研究了对流扩散方程的格式及其解的估计. 利用有限元方法求解对流扩散特征值问题也引起了越来越多学者的研究兴趣. 例如讨论对流扩散特征值问题的后验误差估计、讨论对流扩散特征值问题的多水平校正方法, 讨论自适应算法等等. 因此, 有限元方法解决这一问题成为引起数学和物理领域关注的重要课题. 自适应有限元方法是科学计算的主流, 近年来, 这种方法已得到了深入研究, 并广泛地应用于许多问题上, 如文献 [3, 4] 讨论了后验误差估计和自适应算法. 使用后验误差估计和自适应有限元算法的想法是在 1978 年由 Babuska 和 Rheinbolt 首次在文献 [5] 提出的. Reed 和 Hill 首次针对文献 [6] 中的线性双曲问题引入并分析了间断有限元方法, 间断有限元方法的主要特点是测试函数沿网格中的面 (或边) 不连续, 具有局部质量守恒、易于与其他方法相结合、 hp 自适应、处理多边形网格等优点. 因此, 间断有限元方法被用于解决各种特征值问题, 如拉普拉斯特征值问题、经典的自伴随 Steklov 特征值问题、双调和特征值问题等. 本文首次使用间断有限元方法计算对流扩散特征值问题, 建立了一个后验误差估计, 并验证间断有限元方法特征函数后验误差估计的可靠性和有效性, 实现自适应计算. 结果表明, 该自适应算法能达到最优收敛阶数, 从误差曲线也可以看出, 在相同自由度下, 自适应算法得到的近似比均匀网格计算的近似更准确.

2 基础理论准备

*收稿日期: 2023-02-27 接收日期: 2023-03-31

基金项目: 国家自然科学基金青年项目 (12001130); 贵州省科技计划项目 (黔科合-ZK[2021]012).

作者简介: 段丽梅 (1997-), 女, 贵州织金, 研究生, 主要研究方向: 有限元. E-mail: 2172392909@qq.com

通讯作者: 韩家宇 (1987-), E-mail: hanjiayu@gznu.edu.cn

设 $\Omega \subset R^2$ 是一个 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界域, 设 \mathbf{n} 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, 考虑 Dirichlet 边界条件特征值问题: 求 $\lambda \in C$ 和 $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} -\Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu = \lambda u, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

令 $(u, v) = \int_{\Omega} u \bar{v} dx$, 并定义连续的双线性形式

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) + (\mathbf{b} \cdot \nabla u, v) + (cu, v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2)$$

假设 \mathbf{b} 和 c 是 Ω 上的有界函数, $\nabla \cdot \mathbf{b}$ 存在且满足 $-\frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{b} + c \geq 0$, in Ω . 在这些假设下, 存在与 u, v 无关的两个正常数 A 和 B , 使得双线性形式 $a(\cdot, \cdot)$ 满足

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq A \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \\ |a(v, v)| &\geq B \|v\|_{1, \Omega}^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (2.3)$$

(2.1) 的弱形式是求 $(\lambda, u) \in C \times H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, 使得下面等式成立

$$a(u, v) = \lambda(u, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.4)$$

设 $\mathcal{T}_h = \{\kappa\}$ 为 Ω 的形状规则网格, 单元 κ 中边的长度用 h_e 表示, 单元 κ 的直径用 h_κ 表示, 并且 $h = \max_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa$. $\Gamma_h = \Gamma_h^i \cup \Gamma_h^b$, 其中 Γ_h^i 表示内部边, Γ_h^b 表示边界 $\partial\Omega$ 上的边. 定义 v 在 e 上的均值和跳跃 $\{v\} = \frac{1}{2}(v^+ + v^-)$, $[[v]] = (v^+ - v^-)\mathbf{n}$, 其中 $e = \partial\kappa^+ \cap \partial\kappa^-$, $v^+ = v|_{\kappa^+}$, $v^- = v|_{\kappa^-}$, \mathbf{n} 是从 κ^+ 到 κ^- 的单位外法向量. 如果 $e \in \Gamma_h^b$, 定义 v 在 e 上的均值和跳跃 $\{v\} = v$, $[[v]] = v\mathbf{n}$. 定义

$$\begin{aligned} a_h(w_h, v_h) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\nabla w_h \cdot \overline{\nabla v_h} + (\mathbf{b} \cdot \nabla w_h) \bar{v}_h + cw_h \bar{v}_h) dx - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \{\nabla w_h\} \cdot [[\bar{v}_h]] ds \\ &\quad + \theta \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e [[w_h]] \cdot \{\overline{\nabla v_h}\} ds + \sum_{e \in \Gamma_h} \sigma h_e^{-1} \int_e [[w_h]] \cdot [[\bar{v}_h]] ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 σ 为惩罚参数, θ 的公共值为 $0, \pm 1$. 定义间断有限元空间

$$S^h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\kappa} \in \mathbb{P}_m(\kappa), \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\},$$

其中 $\mathbb{P}_m(\kappa)$ 是 κ 上的 m 次多项式空间. 引入剖分 \mathcal{T}_h 上的分片函数空间 $H^s(\mathcal{T}_h) = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\kappa} \in H^s(\kappa), \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\}$. (2.4) 的有限元近似是求 $(\lambda_h, u_h) \in C \times S^h, u_h \neq 0$, 使得

$$a_h(u_h, v_h) = \lambda_h(u_h, v_h), \quad \forall v_h \in S^h. \quad (2.6)$$

(2.4) 的源问题为: 求 $w \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(w, v) = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.7)$$

(2.7) 的间断有限元近似是求 $w_h \in S^h$, 使得

$$a_h(w_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in S^h. \quad (2.8)$$

定义线性有界算子 $T: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ 满足

$$a(Tf, v) = (f, v), \quad \forall f \in L^2(\Omega), v \in H_0^1(\Omega), \quad (2.9)$$

由 (2.6) 可定义对应的离散解算子 $T_h: L^2(\Omega) \rightarrow S^h$ 满足

$$a_h(T_h f, v) = (f, v), \quad \forall f \in L^2(\Omega), \quad \forall v \in S^h. \quad (2.10)$$

引入赋予间断有限元范数的和空间 $V(h) = S^h + H_0^1(\Omega)$, 其中间断有限元范数为:

$$\|v_h\|_G^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla v_h\|_{0,\kappa}^2 + \|v_h\|_{0,\kappa}^2) + \sum_{e \in \Gamma_h} h_e^{-1} \|[[v_h]]\|_{0,e}^2, \quad (2.11)$$

并且在分片函数空间 $H^{1+s}(\mathcal{T}_h)$ ($s > \frac{1}{2}$) 上定义 h 范数为:

$$\|v_h\|_h^2 = \|v_h\|_G^2 + \sum_{e \in \Gamma_h} h_e \|\{\nabla v_h\}\|_{0,e}^2. \quad (2.12)$$

注意在间断有限元空间 S^h 上, $\|\cdot\|_G$ 与 $\|\cdot\|_h$ 是等价的.

由文献 [3] 和格林公式可以推导出间断有限元方法的一致性, 即设 w 为 (2.7) 的解, $f \in L^2(\Omega)$, 有

$$a_h(w, v) = (f, v), \quad \forall v \in V(h), \quad (2.13)$$

由上式和 (2.8) 式, 可以得到误差公式为:

$$a_h(w - w_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in S^h. \quad (2.14)$$

不难看出, 如下连续性和椭圆性成立:

$$|a_h(u_h, v_h)| \lesssim \|u_h\|_h \|v_h\|_h, \quad \forall u_h, v_h \in S^h + H^{1+s}(\mathcal{T}_h) (s > \frac{1}{2}), \quad (2.15)$$

$$\|u_h\|_G^2 \lesssim |a_h(u_h, u_h)|. \quad (2.16)$$

令 w 是 (2.7) 的解, 且 $f \in L^2(\Omega)$, 则成立如下正则性估计 $\|w\|_{1+r} \lesssim \|f\|_{0,\Omega}$ ($\frac{1}{2} < r \leq 1$). 由文献 [7] 中 2.1.4 节, 可知 $w^I \in S^h$ 表示 w 在 \mathcal{T}_h 上的插值, 且有如下插值估计 $\|w - w^I\|_h \lesssim h^r \|w\|_{1+r}$, 注意 $[[w^I - w]] = 0$.

定理 2.1 设 w 和 w_h 分别是 (2.7) 式和 (2.8) 式的解, 那么有以下不等式成立

$$\|w - w_h\|_h \lesssim \inf_{v_h \in S^h} \|w - v_h\|_h, \quad (2.17)$$

$$\|w - w_h\|_G \lesssim h^r \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.18)$$

证 首先, 我们证明 (2.17) 式, 通过利用 (2.16) 式, (2.14) 式和 (2.15) 式, 可以推导出

$$\begin{aligned} \|v_h - w_h\|_G^2 &\lesssim |a_h(v_h - w_h, v_h - w_h)| \lesssim a_h(v_h - w, v_h - w_h) + a_h(w - w_h, v_h - w_h) \\ &\lesssim \|v_h - w\|_h \|v_h - w_h\|_G, \end{aligned} \quad (2.19)$$

利用三角不等式, (2.19) 式, 可以得到

$$\|w - w_h\|_h \lesssim \|w - v_h\|_h + \|v_h - w_h\|_G \lesssim \|w - v_h\|_h + \|v_h - w\|_h. \quad (2.20)$$

因此, 对于足够小的 h , 可以得到 (2.17) 式.

下面, 我们证明 (2.18) 式. 由 (2.16) 式和 (2.5) 式, 得到

$$\begin{aligned} \|w^I - w_h\|_G^2 &\lesssim |a_h(w^I - w, w^I - w_h)| \\ &\lesssim \|w^I - w\|_G \|w^I - w_h\|_G + \left| \sum_e \int_e \{\nabla(w^I - w)\} \cdot [[w^I - w_h]] ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_e \int_e [[w^I - w]] \cdot \{\nabla(w^I - w_h)\} ds \right| \\ &\lesssim \|w^I - w\|_G \|w^I - w_h\|_G + \sum_e \|\{\nabla(w^I - w)\}\|_{0,e} \|[[w^I - w_h]]\|_{0,e}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

由插值估计, 间断有限元范数的定义和正则性估计, 可得

$$\begin{aligned} \sum_e \|\{\nabla(w^I - w)\}\|_{0,e} \|[[w^I - w_h]]\|_{0,e} &\lesssim \sum_e \|[[w^I - w_h]]\|_{0,e} h_e^{r-\frac{1}{2}} \|w\|_{1+r, \kappa^+ \cup \kappa^-} \\ &\lesssim \sum_e \left(\|h_e^{-\frac{1}{2}} [[w^I - w_h]]\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} h^r \|w\|_{1+r, \kappa^+ \cup \kappa^-} \lesssim h^r \|w^I - w_h\|_G \|f\|_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

因此, 结合 (2.21) 式和 (2.22) 式, 可得到

$$\begin{aligned} \|w^I - w_h\|_G^2 &\lesssim \|w^I - w\|_G \|w^I - w_h\|_G + h^r \|w^I - w_h\|_G \|f\|_{0,\Omega} \\ &\lesssim h^r \|w^I - w_h\|_G \|f\|_{0,\Omega}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

由上式, 可得

$$\|w^I - w_h\|_G \lesssim h^r \|f\|_{0,\Omega}, \quad (2.24)$$

利用三角不等式和插值误差估计得 (2.18) 式, 证明完成.

定理 2.2 设 w 和 w_h 分别是 (2.7) 式和 (2.8) 式的解, 那么有以下不等式成立

$$\|w - w_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^r \|w - w_h\|_h, \quad (2.25)$$

$$\|w - w_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^{2r} \|f\|_{0,\Omega}. \quad (2.26)$$

证 考虑 (2.4) 式对偶问题的源问题 $a(v, w^*) = (v, g)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, 对于任意固定的 $g \in L^2(\Omega)$, 有正则性估计 $\|w^*\|_{1+r} \lesssim \|g\|_{0,\Omega}$ 成立.

由 $[[w^* - w^{*I}]] = 0$ 和误差公式 (2.14) 推导出

$$\begin{aligned} (w - w_h, g) &= a_h(w - w_h, w^*) = a_h(w - w_h, w^* - w^{*I}) \\ &\lesssim h^r \|w - w_h\|_G \|w^*\|_{1+r} + \left| \sum_e \int_e \{\nabla(w - w_h)\} \cdot [[w^* - w^{*I}]] ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_e \int_e [[w - w_h]] \cdot \{\nabla(w^* - w^{*I})\} ds \right| \\ &\lesssim h^r \|w - w_h\|_G \|w^*\|_{1+r} + \left| \sum_e \int_e [[w - w_h]] \cdot \{\nabla(w^* - w^{*I})\} ds \right|. \end{aligned} \quad (2.27)$$

利用插值估计, 正则性估计和 h 范数的定义, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_e \int_e [[w - w_h]] \cdot \{\nabla(w^* - w^{*I})\} ds \right| &\lesssim \sum_e h_e^{r-\frac{1}{2}} \|[[w - w_h]]\|_{0,e} \|w^*\|_{1+r} \\ &\lesssim \left(\sum_e h^{-1} \|[[w - w_h]]\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} h^r \|w^*\|_{1+r} \lesssim h^r \|w - w_h\|_h \|g\|_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

将 (2.28) 代入 (2.27), 利用 Riesz 表示定理可得到 (2.25) 式.

下面, 我们证明 (2.26), 由插值估计, 间断有限元范数的定义和正则性估计, 得

$$\begin{aligned} \left| \sum_e \int_e [[w - w_h]] \cdot \{\nabla(w^* - w^{*I})\} ds \right| &\lesssim \sum_e \|[[w - w_h]]\|_{0,e} h^{r-\frac{1}{2}} \|w^*\|_{1+r, \kappa+\cup\kappa^-} \\ &\lesssim \left(\sum_e h^{-1} \|[[w - w_h]]\|_{0,e}^2 \right)^{\frac{1}{2}} h^r \|w^*\|_{1+r, \Omega} \\ &\lesssim \|w - w_h\|_G h^r \|g\|_{0,\Omega} \lesssim h^{2r} \|f\|_{0,\Omega} \|g\|_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

将 (2.29) 代入 (2.27), 利用 Riesz 表示定理, 可以得到 (2.26), 证明完成.

设 λ 是 (2.4) 的第 j 个特征值, 具有代数重数 q 和陡度 α , 其中 $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+q-1}$. 当 $\|T_h - T\|_{0,\Omega} \rightarrow 0$, (2.6) 的 q 个特征值 $\lambda_{j,h}, \dots, \lambda_{j+q-1,h}$ 将收敛到 λ . 设 $M(\lambda)$ 是与 λ 相关的 (2.4) 广义特征向量空间, $M_h(\lambda)$ 是与 λ_h 相关的 (2.6) 广义特征向量空间的直接和, λ_h 收敛于 λ .

类似文献 [3] 中定理 3.1 的证明方法可以证明下面定理.

定理 2.3 设 $M(\lambda) \subset H^{1+s}(\Omega)$ ($m \geq s > \frac{1}{2}$), 那么有以下不等式成立

$$|\lambda_h - \lambda| \lesssim h^{\frac{2s}{\alpha}}. \quad (2.30)$$

设 $u_h \in M_h(\lambda)$ 是 (2.6) 的广义特征向量空间的直接和, 那么存在 (2.3) 的特征值 u 使得

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^{\frac{s+r}{\alpha}}, \quad (2.31)$$

$$\|u - u_h\|_h \lesssim h^s + h^{\frac{s+r}{\alpha}}, \quad (2.32)$$

如果设 $\alpha = 1$, 那么

$$\|u - u_h\|_h \lesssim h^s + h^{s+r}. \quad (2.33)$$

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^r \|u - u_h\|_h. \quad (2.34)$$

3 后验误差分析

3.1 特征函数的估计子及其可靠性

设 (λ_h, u_h) 为 (2.6) 的特征对, 在每个单元 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 和 $e \in \Gamma_h$ 上分别定义元素残差和面残差为 $R_\kappa = \Delta u_h + (\lambda_h - c)u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h$; $J_{F,1} = \llbracket \nabla u_h \rrbracket$, $\forall e \in \Gamma_h^i$; $J_{F,2} = \llbracket u_h \rrbracket$, $\forall e \in \Gamma_h^i$. 定义每个单元 $\kappa \in \mathcal{T}_h$ 上的局部误差指示子

$$\eta_\kappa^2 = h_\kappa^2 \|\Delta u_h + (\lambda_h - c)u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h\|_{0,\kappa}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e \|J_{F,1}\|_{0,e}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e^{-1} \|J_{F,2}\|_{0,e}^2. \quad (3.1)$$

全局误差指示子为

$$\eta(u_h) = \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \eta_\kappa^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

下面, 我们将证明这个误差估计是可靠的.

引进提升算子 $\mathcal{L}: V(h) \rightarrow [S^h]^2$ 如下

$$\int_\Omega \mathcal{L}(v) \cdot w dx = \sum_{e \in \Gamma_h^i} \int_e \llbracket v \rrbracket \cdot \{w\} ds, \quad \forall w \in [S^h]^2. \quad (3.3)$$

由文献 [8] 我们知道提升算子具有稳定性, 即 $\|\mathcal{L}(v)\|_{0,\Omega}^2 \lesssim \sum_{e \in \Gamma_h} \left\| h_e^{-1/2} \llbracket v \rrbracket \right\|_{0,e}^2$. 利用这个算子, 我们可以定义一个辅助双线性型式 $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot): V(h) \times V(h) \rightarrow C$,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_h(w, v) &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_\kappa (\nabla w \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla w)v + cwv) dx - \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_\kappa \nabla w \cdot \mathcal{L}(\bar{v}) dx \\ &+ \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_\kappa \mathcal{L}(w) \cdot \nabla v dx + \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e \sigma h_e^{-1} \llbracket w \rrbracket \llbracket \bar{v} \rrbracket ds. \end{aligned} \quad (3.4)$$

由文献 [3] 中定理 4.1 可知下列定理成立.

定理 3.1 设 (λ, u) 和 (λ_h, u_h) 分别是 (2.4) 和 (2.6) 的特征对, $u \in H^{1+s}(\Omega)$ ($s > \frac{1}{2}$), 那么对于任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$, 有下式成立

$$\|u - u_h\|_G \lesssim \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(\lambda_h u_h, v) - \tilde{a}_h(u_h, v)|}{\|v\|_G} + \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \|u_h - v\|_G + \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\Omega}. \quad (3.5)$$

证 注意在 $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上 $a = \tilde{a}_h$. 设 $w \in H_0^1(\Omega)$, 由双线性形式的椭圆性和连续性, 可推导出

$$\begin{aligned} \|u - w\|_G^2 &\lesssim |\tilde{a}_h(u - w, u - w)| \lesssim |\tilde{a}_h(u, u - w) - \tilde{a}_h(w, u - w)| \\ &\lesssim |\lambda(u, u - w) - \tilde{a}_h(w, u - w)| \\ &\lesssim |(\lambda u - \lambda_h u_h + \lambda_h u_h, u - w) - \tilde{a}_h(w + u_h - u_h, u - w)| \\ &\lesssim |(\lambda_h u_h, u - w) - \tilde{a}_h(u_h, u - w)| + |(\lambda u - \lambda_h u_h, u - w) + \tilde{a}_h(u_h - w, u - w)| \\ &\lesssim |(\lambda_h u_h, u - w) - \tilde{a}_h(u_h, u - w)| + \|u_h - w\|_G \|u - w\|_G \\ &\quad + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega} \|u - w\|_{0,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

取 $v = u - w$, 可得

$$\begin{aligned} \|u - w\|_G &\lesssim \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(\lambda_h u_h, u - w) - \tilde{a}_h(u_h, u - w)|}{\|v\|_G} + \|u_h - w\|_G + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega} \\ &\lesssim \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(\lambda_h u_h, v) - \tilde{a}_h(u_h, v)|}{\|v\|_G} + \|u_h - w\|_G + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

由三角不等式, 得

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_G &\lesssim \|u - w\|_G + \|u_h - w\|_G \\ &\lesssim \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(\lambda_h u_h, v) - \tilde{a}_h(u_h, v)|}{\|v\|_G} + \|u_h - w\|_G + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

由 w 的任意性, 可得定理成立.

由文献 [9] 中 Scott-Zhang 插值, 我们可以得到以下引理.

引理 3.1 对于任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, 存在一个分片线性插值 $I^h \varphi \in S_h$ 满足

$$\|\varphi - I^h \varphi\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|\nabla(\varphi - I^h \varphi)\|_{0,\kappa} \lesssim h_\kappa \|\nabla \varphi\|_{0,U_\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathcal{T}_h, \quad (3.9)$$

$$\|\varphi - I^h \varphi\|_{0,e} \lesssim h_e^{\frac{1}{2}} \|\nabla \varphi\|_{0,U_e}, \quad \forall e \in \Gamma_h, \quad (3.10)$$

其中 U_κ 是与 κ 共享至少一个节点的所有单元的并集, U_e 是与边 e 共享至少一个节点的所有边的并集.

引理 3.2 设 (λ, u) 和 (λ_h, u_h) 分别是 (2.4) 和 (2.6) 的特征对, 对于任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$, 成立

$$|(\lambda_h u_h, v) - \tilde{a}_h(u_h, v)| \lesssim (\eta(u_h) + h \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}) \|v\|_G. \quad (3.11)$$

证 由插值性质, 我们得到 $[[v - I^h v]] = 0$, 利用格林公式, 可得到

$$\begin{aligned} B &\equiv \lambda(u, v - I^h v) - \tilde{a}_h(u_h, v - I^h v) \\ &= \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} (\Delta u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h - c u_h) (v - I^h v) dx + \int_{\Omega} \lambda u (v - I^h v) dx \\ &\quad - \sum_{e \in \Gamma_h} \int_e [[\nabla u_h]] (v - I^h v) ds + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \int_{\kappa} \mathcal{L}(u_h) \cdot (\nabla(v - I^h v) \cdot \mathbf{n}) dx \\ &\equiv B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \end{aligned} \quad (3.12)$$

由柯西 - 斯瓦兹不等式、(3.9) 式、(3.10) 式和提升算子的稳定性, 有

$$|B_1| + |B_2| \lesssim \left(\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^2 \|\Delta u_h + (\lambda_h - c) u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h + \lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\kappa}^2 \right)^{1/2} \|v\|_G, \quad (3.13)$$

$$|B_3| \lesssim \left(\sum_{e \in \Gamma_h} h_e \|\llbracket \nabla u_h \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \|v\|_G, |B_4| \lesssim \left(\sum_{e \in \Gamma_h} \sigma h_e^{-1} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{0,e}^2 \right)^{1/2} \|v\|_G. \quad (3.14)$$

结合 $B_1 - B_4$ 上述四个不等式, 可以得到

$$|B| \lesssim (\eta(u_h) + h \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}) \|v\|_G. \quad (3.15)$$

由 (2.6) 和 (3.15) 我们有

$$\begin{aligned} (\lambda_h u_h, v) - \tilde{a}_h(u_h, v) &= (\lambda_h u_h, v - I^h v) - \tilde{a}_h(u_h, v - I^h v) \\ &\lesssim (\eta(u_h) + h \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}) \|v\|_G, \end{aligned} \quad (3.16)$$

故 (3.11) 成立, 证明完成.

定理 3.2 在定理 3.1 的条件下, 有下式成立

$$\|u - u_h\|_G \lesssim \eta(u_h) + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.17)$$

证 由文献 [10] 可知, 对于任意的 $v \in S^h$, 存在一个丰富算子 $E_h : S^h \rightarrow S^h \cap H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \left(h_\kappa^{-2} \|v - E_h v\|_{0,\kappa}^2 + \|\nabla(v - E_h v)\|_{0,\kappa}^2 \right) \lesssim \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e^{-1} \|\llbracket v \rrbracket\|_{0,e}^2. \quad (3.18)$$

对 (3.5) 右边第二项利用 (2.11) 和 (3.18) 式, 并注意到 $\llbracket E_h u_h \rrbracket = 0$, 有

$$\begin{aligned} \inf_{v \in H^1(\Omega)} \|u_h - v\|_G^2 &\lesssim \|E_h u_h - u_h\|_G^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(E_h u_h - u_h)\|_{0,\kappa}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e^{-1} \|\llbracket E_h u_h - u_h \rrbracket\|_{0,e}^2 \\ &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_h^i} \|h_e^{-1/2} \llbracket u_h \rrbracket\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e^{-1} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{0,e}^2 \\ &\lesssim \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e^{-1} \|\llbracket u_h \rrbracket\|_{0,e}^2 \lesssim \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e^{-1} \|J_{F,2}\|_{0,e}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

将 (3.19) 和 (3.11) 代入 (3.5), 可得到 (3.17), 即证明完成.

由定理 2.3, 我们知道陡度 $\alpha = 1$ 时, $\|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}$ 和 $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ 都是 $\|u - u_h\|_G$ 的高阶小量, 因此 (3.17) 告诉我们误差估计指示子 $\eta(u_h)$ 是间断有限元能量范数的上界之一, 因此误差估计是可靠的.

3.2 特征函数估计子的有效性

为了保证我们的估计方法对于实际的自适应改进是有效的, 我们的下一个目标是证明局部误差估计指示子 η_κ 提供了 κ 上误差的局部下界. 标记 $b_\kappa \in H_0^1(\kappa)$ 为标准单元气泡函

数, $b_e \in H_0^1(U_e)$ 为面上的气泡函数, 其中 U_e 是两个单元 κ^+ 和 κ^- 共享 e 的并集, 通过利用 Verfürth 开发的气泡函数技术, 我们引入并介绍以下知识.

引理 3.3 对于所有多项式函数 $v \in P_k(\kappa)$,

$$\|v\|_{0,\kappa} \lesssim \|b_\kappa^{1/2}v\|_{0,\kappa}, \quad (3.20)$$

对于所有多项式函数 $w \in P_k(e)$, 我们有

$$\|w\|_{0,e} \lesssim \|b_e^{1/2}w\|_{0,e}, \quad (3.21)$$

对于每一个 $b_e w$, 存在扩展的 W_b 满足 $W_b|_e = b_e w$, $W_b \in H_0^1(U_e)$

$$\|W_b\|_{0,w_e} \lesssim h_e^{1/2}\|w\|_{0,e}, \quad (3.22)$$

$$\|\nabla W_b\|_{0,w_e} \lesssim h_e^{-1/2}\|w\|_{0,e}. \quad (3.23)$$

根据以上引理, 并使用标准参数 (见文献 [11] 中引理 3.13), 我们可以证明以下有局部下界.

引理 3.4 设 (λ, u) 和 (λ_h, u_h) 分别是 (2.4) 和 (2.6) 的第 j 个特征对, 然后我们有以下局部下界:

(i) 对于任意的 $\kappa \in \mathcal{T}_h, h_\kappa \|\Delta u_h + (\lambda_h - c)u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h\|_{0,\kappa} \lesssim \|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|u - u_h\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\kappa}$.

(ii) 设 $e \in \Gamma_h$ 是 κ^+ 和 κ^- 共享的内部边, 有

$$h_e^{1/2} \|J_{F,1}\|_{0,e} \lesssim \sum_{\kappa \in U_e} (\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|u - u_h\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\kappa}),$$

其中 $U_e = \{\kappa^+, \kappa^-\}$.

(iii) 对于每条边 $e \in \Gamma_h, h_e^{-1} \|J_{F,2}\|_{0,e}^2 = h_e^{-1} \|[u_h]\|_{0,e}^2 = h_e^{-1} \|[u - u_h]\|_{0,e}^2$.

证 (i) 设 $v_h = \Delta u_h + (\lambda_h - c)u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h$ 和 $v_b = b_\kappa v_h$. 注意在 $L^2(\kappa)$ 中 $\Delta u + (\lambda - c)u - \mathbf{b} \cdot \nabla u = 0$, 在 $\partial\kappa$ 上, $v_b = 0$, 利用分部积分, 有

$$\begin{aligned} & \|b_\kappa^{1/2}v_h\|_{0,\kappa}^2 \\ &= \int_\kappa \nabla(u - u_h) \nabla v_b dx + \int_\kappa \mathbf{b} \cdot \nabla(u - u_h) v_b dx + \int_\kappa (\lambda_h u_h - \lambda u) v_b dx + \int_\kappa c(u - u_h) v_b dx, \end{aligned} \quad (3.24)$$

利用 (3.20) 式和柯西 - 斯瓦兹不等式, 可得

$$h_\kappa \|v_h\|_{0,\kappa} \lesssim \|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|u - u_h\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\kappa}.$$

则 (i) 得证.

(ii) 对于任意的 $e \in \Gamma_h$, 设 $w_h = \llbracket \nabla u_h \rrbracket$, $w_b = b_e w_h$. 设 $W_b \in H_0^1(U_e)$ 是 w_b 满足 (3.22) 和 (3.23) 的扩展. 注意 $\llbracket \nabla u \rrbracket = 0$, 利用格林公式, (3.21), (3.22), (3.23), 可以推导出

$$\begin{aligned} h_e^{1/2} \|w_h\|_{0,e} &\lesssim h_e^{1/2} \|b_e^{1/2} w_h\|_{0,e} \lesssim \sum_{\kappa \in U_e} (h_e \|\Delta u_h + (\lambda_h - c)u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h\|_{0,\kappa} \\ &+ \|\nabla(u_h - u)\|_{0,\kappa} + h_e \|\mathbf{b} \cdot \nabla(u_h - u)\|_{0,\kappa} + h_e \|u_h - u\|_{0,\kappa} + h_e \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\kappa}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

结合 $\|\Delta u_h + (\lambda_h - c)u_h - \mathbf{b} \cdot \nabla u_h\|_{0,\kappa}$ 在 (i) 中的界和网格形状规则性得

$$h_e^{1/2} \|[\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\|_{0,e} \lesssim \sum_{\kappa \in \mathcal{U}_e} (\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|u - u_h\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\kappa}),$$

由此可得到 (ii).

(iii) 对于任意的 $e \in \Gamma_h$, 我们有 $[[u]] = 0$, 从而得到 (iii).

定理 3.3 在定理 3.1 的条件下, 有下面等式成立

$$\begin{aligned} \eta_\kappa &\lesssim \sum_{\kappa \in \mathcal{W}_\kappa} (\|\nabla(u - u_h)\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|u - u_h\|_{0,\kappa} + h_\kappa \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\kappa}) \\ &\quad + \sum_{e \in \Gamma_h} h_e^{-\frac{1}{2}} \|[[u - u_h]]\|_{0,e}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\eta(u_h) \lesssim \|u - u_h\|_G + h \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Omega}. \quad (3.27)$$

证 通过 η_κ 的定义和引理 3.4, 可得到 (3.26), 再利用间断有限元范数 $\|\cdot\|_G$ 的定义, 可以得到 (3.27).

定理 3.3 表明误差估计指示子 $\eta(u_h)$ 是有效的.

3.3 关于特征值误差估计指示子的可靠性

引理 3.5(文献 [3] 中引理 4.6) 设 (λ, u) 和 (λ_h, u_h) 分别是 (2.4) 和 (2.6) 的特征对, 设 (λ^*, u^*) 和 (λ_h^*, u_h^*) 分别是 (2.4) 的对偶问题及离散变分形式的特征对, $(u_h, u_h^*) \neq 0$, 那么

$$\lambda - \lambda_h = \lambda \frac{(u - u_h, u^* - u_h^*)}{(u_h, u_h^*)} - \frac{a_h(u - u_h, u^* - u_h^*)}{(u_h, u_h^*)}. \quad (3.28)$$

定理 3.4 在引理 3.5 的条件下, 设特征函数空间 $M(\lambda)$, $M(\lambda^*) \subset H^{1+s}(\Omega)$ ($s > \frac{1}{2}$), 那么

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_h| &\lesssim \eta(u_h)^2 + \eta(u_h^*)^2 + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} |u - u^I|_{1,\kappa}^2 + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} |u^* - u^{*I}|_{1,\kappa}^2 \\ &\quad + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^\sigma |u - u^I|_{1+\frac{\sigma}{2},\kappa}^2 + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^\sigma |u^* - u^{*I}|_{1+\frac{\sigma}{2},\kappa}^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

其中, ε 是一个足够小的常数, $\sigma > \frac{1}{2}$ 充分接近 $\frac{1}{2}$.

证 定理 2.3 表明 $\|u - u_h\|_{0,\Omega}$ 比 $\|u - u_h\|_h$ 更高阶, $\|u^* - u_h^*\|_{0,\Omega}$ 也比 $\|u^* - u_h^*\|_h$ 更高阶. 因此, 由 (3.28), u_h 的估计式 (3.17) 和 u_h^* 的估计式, 可得

$$|\lambda - \lambda_h| \lesssim \eta(u_h)^2 + \eta(u_h^*)^2 + \varepsilon \sum_{e \in \Gamma_h} h_e \|\{\nabla(u - u_h)\}\|_{0,e}^2 + \varepsilon \sum_{e \in \Gamma_h} h_e \|\{\nabla(u^* - u_h^*)\}\|_{0,e}^2,$$

由逆估计和迹不等式, 得

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e \|\{\nabla(u - u_h)\}\|_{0,e}^2 &\lesssim \varepsilon \sum_{e \in \Gamma_h} h_e \|\{\nabla(u^I - u_h)\}\|_{0,e}^2 + \varepsilon \sum_{e \in \Gamma_h} h_e \|\{\nabla(u - u^I)\}\|_{0,e}^2 \\ &\lesssim \varepsilon \|u - u_h\|_G^2 + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} |u - u^I|_{1,\kappa}^2 + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^\sigma |u - u^I|_{1+\frac{\sigma}{2},\kappa}^2, \\ \varepsilon \sum_{e \in \Gamma_h^i} h_e \|\{\nabla(u^* - u_h^*)\}\|_{0,e}^2 &\lesssim \varepsilon \|u^* - u_h^*\|_G^2 + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} |u^* - u^{*I}|_{1,\kappa}^2 + \varepsilon \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^\sigma |u^* - u^{*I}|_{1+\frac{\sigma}{2},\kappa}^2. \end{aligned}$$

通过以上三个公式, 可证明该定理.

从定理 3.2 和定理 3.3, 可以知道特征函数误差 $\|u - u_h\|_G^2 + \|u^* - u_h^*\|_G^2$ 的估计指示子 $\eta(u_h)^2 + \eta(u_h^*)^2$ 是可靠和高效的, 因此, 基于该估计指示子的自适应算法可以生成良好的梯度网格. 使近似特征函数在 $\|\cdot\|_G^2$ 中达到最优收敛阶 $O(dof^{-m})$. 因此, 我们期望得到:

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^\sigma |u - u^I|_{1+\frac{\sigma}{2}, \kappa}^2 + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} h_\kappa^\sigma |u^* - u^{*I}|_{1+\frac{\sigma}{2}, \kappa}^2 \leq dof^{-m}.$$

因此, 从 (3.29) 可得 $|\lambda - \lambda_h| \leq dof^{-m}$. 所以 $\eta(u_h)^2 + \eta(u_h^*)^2$ 可看作 λ_h 的误差估计指示子, 第 4 节的数值实验表明 $\eta(u_h)^2 + \eta(u_h^*)^2$ 作为 λ_h 的误差估计指示子是可靠的和高效的.

4 数值实验

在本节中, 将报告一些数值实验, 以此来证明我们方法的有效性. 考虑问题 (2.1), 其中取 $\mathbf{b} = (0, 0)^T, (1, 1)^T, (3, 0)^T, c = 0$. 我们的程序是在 iFEM 软件包下编译的, 我们使用 SIPG 方法 ($\theta = -1$) 来进行计算. 考虑以下两个测试域: L 形域 $\Omega_L = (-1, 1)^2 \setminus ([0, 1] \times (-1, 0])$, 裂缝结构域 $\Omega_{SL} = (-1, 1)^2 \setminus \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$. 由于确切的特征值是未知的, 我们在 L 形域中取参考特征值 $\lambda_1 = |\mathbf{b}|^2/4 + 9.63972384472$; 在裂缝结构域 Ω_{SL} 中取参考特征值 $\lambda_1 = |\mathbf{b}|^2/4 + 8.3713297112$. 这些参考特征值是通过自适应计算尽可能精确得到的.

表 1 当 $\mathbf{b} = (0, 0)^T$ 时, 区域 Ω_L, Ω_{SL} 上的一次元数值特征值结果

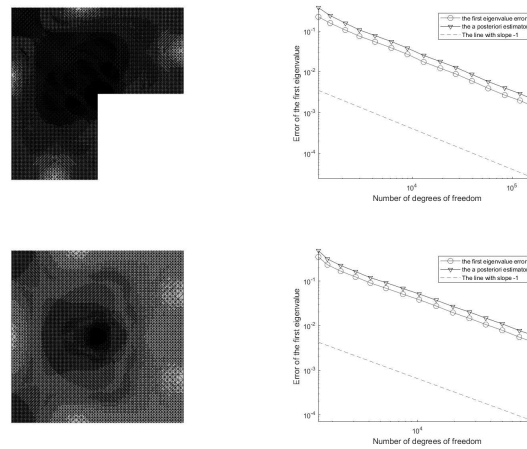
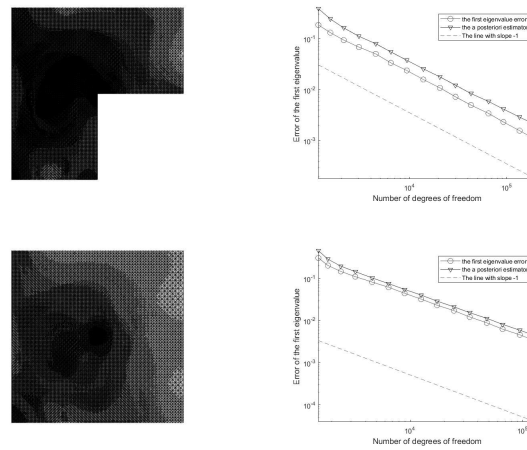
Domain	h	dof	λ_1	Error	rate
Ω_L	1/8	18	9.6410	0.0019	0.6644
	1/16	36	9.6406	0.0012	0.7352
	1/32	72	9.6402	0.0007	0.7894
	1/64	144	9.6400	0.0004	0.7515
	1/128	288	9.6398	0.0002	0.6430
Domain	h	dof	λ_1	Error	rate
Ω_{SL}	1/8	24	8.3754	0.0058	0.5239
	1/16	48	8.3742	0.0040	0.5109
	1/32	96	8.3733	0.0028	0.5407
	1/64	192	8.3727	0.0019	0.5011
	1/128	384	8.3723	0.0014	0.4975

表 2 当 $\mathbf{b} = (1, 1)^T$ 时, 区域 Ω_L, Ω_{SL} 上的一次元数值特征值结果

Domain	h	dof	λ_1	Error	rate
Ω_L	1/8	18	10.1420	0.0042	0.6300
	1/16	36	10.1412	0.0027	0.7566
	1/32	72	10.1405	0.0016	0.6124
	1/64	144	10.1402	0.0010	0.6479
	1/128	288	10.1400	0.0007	0.3354
Domain	h	dof	λ_1	Error	rate
Ω_{SL}	1/8	24	8.8776	0.0081	0.5587
	1/16	48	8.8757	0.0055	0.5463
	1/32	96	8.8742	0.0038	0.5077
	1/64	192	8.8733	0.0027	0.5218
	1/128	384	8.8727	0.0018	0.4116

表 3 当 $\mathbf{b} = (3, 0)^T$ 时, 区域 Ω_L, Ω_{SL} 上的一元数值特征值结果

Domain	h	dof	λ_1	Error	rate
Ω_L	1/8	18	11.8930	0.0062	0.7158
	1/16	36	11.8915	0.0038	0.9617
	1/32	72	11.8909	0.0019	0.7041
	1/64	144	11.8903	0.0012	0.9499
	1/128	288	11.8901	0.0006	0.6851
Domain	h	dof	λ_1	Error	rate
Ω_{SL}	1/8	24	10.6319	0.0090	0.6422
	1/16	48	10.6285	0.0058	0.7145
	1/32	96	10.6258	0.0035	0.6172
	1/64	192	10.6247	0.0023	0.6508
	1/128	384	10.6235	0.0015	0.5316

图 1 当 $\mathbf{b} = (0, 0)^T$ 时, 在测试域 Ω_L 和 Ω_{SL} 上, 初始网格为 1/8 的一元自适应网格与误差曲线图图 2 当 $\mathbf{b} = (1, 1)^T$ 时, 在测试域 Ω_L 和 Ω_{SL} 上, 初始网格为 1/8 的一元自适应网格与误差曲线图

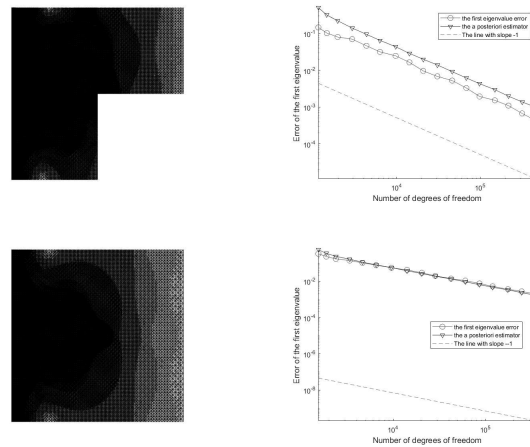


图 3 当 $\mathbf{b} = (3, 0)^T$ 时, 在测试域 Ω_L 和 Ω_{SL} 上, 初始网格为 $1/8$ 的一次元自适应网格与误差曲线图

我们在表 1 到表 3 中列出了通过自适应计算得到的特征值数值解结果, 并在图中描述了自适应网格和误差曲线. 从图 1 到图 3 中, 我们可以看出, 当 $\mathbf{b} = (0, 0)^T, (1, 1)^T, (3, 0)^T$ 时, 一次间断元的误差曲线近似平行于斜率为 -1 的直线. 结果表明, 该自适应算法能达到最优收敛阶数, 从误差曲线也可以看出, 在相同自由度 (dof) 下, 自适应算法得到的近似比均匀网格计算的近似更准确.

参 考 文 献

- [1] 徐红梅, 李婕. 一维对流扩散方程解的逐点衰减估计 [J]. 数学杂志, 2016, 36(02): 328–334.
- [2] 曾晓艳, 陈建业, 孙乐林. 对流扩散方程的一种新型差分格式 [J]. 数学杂志, 2003, 23(1): 37–42.
- [3] Li Y, Bi H, Yang Y. The a priori and a posteriori error estimates of DG method for the steklov eigenvalue problem in inverse scattering[J]. Journal of Scientific Computing, 2022, 91(1): 20.
- [4] 贺之龙, 赵建平, 杨欢, 李兵, 席梦茹. $H(\text{curl})$ 空间中椭圆最优控制问题的自适应有限元算法 [J]. 工程数学学报, 2022, 39(05): 775–796.
- [5] Babuska I, Rheinboldt W C. Error estimates for adaptive finite element computations[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1978, 15(4): 736–754.
- [6] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Los Alamos Scientific Lab., N. Mex.(USA), 1973.
- [7] Riviere B. Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations: theory and implementation[M]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008.
- [8] 由同顺. 对流 - 扩散方程的 hp- 局部间断 Galerkin 有限元方法的最优 $L^\infty (H^1)$ 误差估计 [J]. 高校应用数学学报 A 辑, 2020, 35(01): 40–48.
- [9] Scott L R, Zhang S. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions[J]. Mathematics of Computation, 1990, 54(190): 483–493.
- [10] Karakashian O A, Pascal F. A posteriori error estimates for a discontinuous Galerkin approximation of second-order elliptic problems[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2003, 41(6): 2374–2399.

- [11] Wang L, Xiong C, Wu H, et al. A priori and a posteriori error analysis for discontinuous Galerkin finite element approximations of biharmonic eigenvalue problems[J]. *Advances in Computational Mathematics*, 2019, 45(5-6): 2623–2646.

THE ADAPTIVE DISCONTINUOUS FINITE ELEMENT METHOD FOR CONVECTION-DIFFUSION EIGENVALUE PROBLEMS

DUAN Li-mei, CHEN Xing-long, HAN Jia-yu

(School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China)

Abstract: The discontinuous finite element method for convection-diffusion eigenvalue problems is studied in this paper. As an important branch of partial differential equation, the convection-diffusion equation originates from many practical physical backgrounds, such as environmental science, fluid mechanics, aerodynamics, etc. Since the solution of convection-diffusion equation is difficult to be obtained by the analytical method, it is of great value to explore the numerical method of convection-diffusion equation. The numerical method of convection-diffusion eigenvalue problem is a hot topic in computational mathematics. The difficulty of this study lies in the asymmetry of the problem and the boundary layer effect caused by the convective term. In this paper, the discontinuous finite element method is used to study the convection-diffusion eigenvalue problem. The complete posterior error estimation results of this method are obtained and the adaptive finite element calculation is performed. Numerical experiments and theoretical analysis show that our method reaches the optimal convergence order.

Keywords: convection-diffusion eigenvalue; discontinuous Galerkin method; a posteriori error estimate; adaptive algorithm

2010 MR Subject Classification: 65N25; 65N30