Vol. 43 (2023)
No. 6

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

保积 BiHom- 李 color 三系的广义导子

孙亚良, 曹 燕
(哈尔滨理工大学理学院数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 本文研究了保积 BiHom- 李 color 三系 T 的广义导子代数 $\mathrm{GDer}(T)$ 的定义及其一些重要性质. 利用 BiHom- 李三系的广义导子的研究方法, 构造出保积 BiHom- 李 color 三系 T 的拟导子代数 $\mathrm{QDer}(T)$、型心 $\mathrm{C}(T)$、拟型心 $\mathrm{QC}(T)$ 和中心导子代数 $\mathrm{ZDer}(T)$. 证明了中心导子代数 $\mathrm{ZDer}(T)$ 是 $\mathrm{Der}(T)$ 的 BiHom- 理想, 并且证明了 $[\mathrm{C}(T), \mathrm{QC}(T)] \subseteq \mathrm{End}(T, \mathrm{Z}(T))$, 特别地, 若 $\mathrm{Z}(T) = \{0\}$, 则 $[\mathrm{C}(T), \mathrm{QC}(T)] = \{0\}$.

关 键 词: BiHom- 李 color 三系; 广义导子; 拟导子; 型心
MR(2010) **主题分类号**: 17B75; 17A60; 17B22; 17B65 **中 图 分 类 号**: O152.5
文 献 标 识 码: A **文 章 编 号**: 0255-7797(2023)06-0501-14

1 引言

李三系最初源于 Cartan 对黎曼几何的研究中, 但它的概念是由 Jacobson 在 1949 年引入的 [1], 用于研究在三元交换子 [[u, v], w] 下的封闭的结合代数的子空间. 之后赵冠华, 吴辰余在 [2] 中研究了李三系的扩张问题, 且李三系的结构内容和广义导子等的研究见文献 [3, 4]. Okubo 首次提出了李超三系的定义, 李超三系的线性形变与阿贝尔扩张以及李超三系的上同调及 NiJenhuis 算子等内容见文献 [5, 6]. 文献 [7] 研究了李 color 代数的定义, 进一步张健等人在 [8] 中研究了李 color 三系的导子以及广义导子等的性质.

在文献 [9] 中研究了 Hom- 李代数的广义导子, 并且得到了 Hom- 李代数的拟导子代数可以嵌入到较大的 Hom- 李代数的导子中, Hom- 李 color 代数的概念见文献 [10]. 进一步, 文献 [11] 研究了分裂的正则双 Hom- 李 color 代数的结构等内容, 在 [12] 中郭双建等人研究了 BiHom-Lie 共形代数的上同调与形变, 在 [13] 中研究了 δ-BiHom-Jordan 李超代数的阿贝尔扩张的相关内容. 文献 [14, 15] 中分别研究了 BiHom- 李三系的广义导子和 δ-Jordan- 李三系上带有权 λ 的 K- 阶广义导子. 本文给出了 BiHom- 李 color 三系定义, 进而研究保积 BiHom- 李 color 三系的广义导子的一些性质.

2 预备知识

定义 2.1[7] 设 G 是交换群, $\mathbb{F}$ 是任意域. 若对任意的 $\alpha, \beta, \gamma \in G$, 下列等式均成立 :

(1) $\varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\beta, \alpha) = 1$,

(2) $\varepsilon(\alpha, \beta + \gamma) = \varepsilon(\alpha, \beta)\varepsilon(\alpha, \gamma)$,

*收稿日期: 2022-10-01 接收日期: 2023-04-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801121); 黑龙江省自然科学基金资助项目 (QC2018006); 黑龙江省普通高校基本科研业务费资助项目 (LGYC2018JC002)
作者简介: 孙亚良 (1998–), 女, 山西运城, 研究生, 主要研究方向: 李代数. E-mail: 1848593774@qq.com.
通讯作者: 孙亚良

(3) $\varepsilon(\alpha+\beta,\gamma)=\varepsilon(\alpha,\gamma)\varepsilon(\beta,\gamma)$.
则称映射 $\varepsilon: G\times G\to\mathbb{F}\backslash\{0\}$ 为 G 的斜对称双特征标 (或交换因子). 易知,

$$\varepsilon(\alpha,0)=\varepsilon(0,\alpha)=1,\ \varepsilon(\alpha,\alpha)=\pm 1.$$

如果存在 V 的一簇子空间 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in G}$, 满足 $V=\oplus_{\gamma\in G}V_\gamma$, 则称线性空间 V 为 G-阶化; 如果 $x\in V_\gamma(\gamma\in G)$, 则称 x 为 γ 次齐次元素. 如果 x, y, z 是 G-阶化向量空间中的齐次元, 用 $|x|,|y|,|z|\in G$ 表示它们的次数. 为方便, 用 $\varepsilon(x,y)$ 表示 $\varepsilon(|x|,|y|)$, 用 $\varepsilon(x,y+z)$ 表示 $\varepsilon(|x|,|y|+|z|)$, 以此类推. 此外, $\varepsilon(x,y)$ 出现即表明其中的 x,y 是齐次元. 在本文中, 用 $hg(V)$ 表示 V 中所有齐次元素.

设 V,W 是两个 G-阶化的线性空间, 如果对于任意的 $x\in V_\gamma$, 都有 $f(x)\in W_{\gamma+\theta}$, 则称线性映射 $f: V\to W$ 为 θ 次. 若 f 是零次的, 即 $f(V_\gamma)\subseteq W_\gamma$, 则称 f 是偶的.

若对任意的 $\theta,\mu\in G$, 如果 T 是 G-阶化线性空间, 即 $T=\oplus_{\gamma\in G}T_\gamma$, 并且 $T_\theta T_\mu\subseteq T_{\theta+\mu}$, 则 T 称为 G-阶化的代数, 如果 $\alpha(A_\gamma)\subseteq B_\gamma$, 称同态 $\alpha: A\to B$ 是偶的.

定义 2.2[7] 李 color 代数是一个三元组$(T,[\cdot,\cdot],\varepsilon)$, 其中 $T=\oplus_{g\in G}T_g$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 G-阶化向量空间, 如果存在双线性映射 $[\cdot,\cdot]: T\times T\to T$(对任意的 $g,g'\in G$, 有 $[T_g,T_{g'}]\subseteq T_{g+g'}$) 和 G 上的一个斜对称双特征标 $\varepsilon: G\times G\to\mathbb{F}\backslash\{0\}$, 满足

(1) $[x,y]=-\varepsilon(x,y)[y,x]$,

(2) $\varepsilon(z,x)[x,[y,z]]+\varepsilon(x,y)[y,[z,x]]+\varepsilon(y,z)[z,[x,y]]=0$.

对任意的 $x,y,z\in hg(T)$.

当 $G=\mathbb{Z}_2$ 且 $\varepsilon(x,y)=(-1)^{|x||y|}$ 时, 李 color 代数成为李超代数；当 $\varepsilon(x,y)\equiv 1$ 时, 李 color 代数成为李代数. 因此, 李 color 代数是一类包含李代数和李超代数的更广泛的代数结构.

定义 2.3[10] Hom- 李 color 代数是一个四元组 $(T,[\cdot,\cdot],\alpha,\varepsilon)$, 其中 $T=\oplus_{g\in G}T_g$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 G-阶化向量空间, 如果 T 上有偶的双线性映射 $[\cdot,\cdot]: T\times T\to T$, 偶的同态 $\alpha: T\to T$ 和 G 上的一个斜对称双特征标 $\varepsilon: G\times G\to\mathbb{F}\backslash\{0\}$, 满足

(1) $[x,y]=-\varepsilon(x,y)[y,x]$, ($\varepsilon$- 反对称性),

(2) $\varepsilon(z,x)[\alpha(x),[y,z]]+\varepsilon(x,y)[\alpha(y),[z,x]]+\varepsilon(y,z)[\alpha(z),[x,y]]=0$. (Hom-Jacobi 等式)

对任意的 $x,y,z\in hg(T)$.

定义 2.4[11] BiHom- 李 color 代数是一个五元组 $(T,[\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$, 其中 $T=\oplus_{g\in G}T_g$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 G-阶化向量空间, T 上有一个偶的双线性映射 $[\cdot,\cdot]: T\times T\to T$ (对任意的 $g,h\in G$, 有 $[T_g,T_h]\subset T_{g+h}$)及两个偶自同态 $\alpha,\beta: T\to T$ 和 G 上的一个斜对称双特征标 $\varepsilon: G\times G\to\mathbb{F}\backslash\{0\}$, 满足

(1) $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$,

(2) $[\beta(x),\alpha(y)]=-\varepsilon(x,y)[\beta(y),\alpha(x)]$, ($\varepsilon$- 反对称性),

(3) $\varepsilon(z,x)[\beta^2(x),[\beta(y),\alpha(z)]]+\varepsilon(x,y)[\beta^2(y),[\beta(z),\alpha(x)]]+\varepsilon(y,z)[\beta^2(z),[\beta(x),\alpha(y)]]=0$. (BiHom-Jacobi 等式).

对任意的 $x,y,z\in hg(T)$.

定义 2.5[7] 李 color 三系一个三元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\varepsilon)$, 其中 $T=\oplus_{g\in G}T_g$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 G-阶化向量空间, 如果 T 上有三元运算 $[\cdot,\cdot,\cdot]: T\times T\times T\to T$ 和 G 上的一个斜对称双特征标 $\varepsilon: G\times G\to\mathbb{F}\backslash\{0\}$, 满足

(1) $[x,y,z]=-\varepsilon(x,y)[y,x,z]$,

(2) $\varepsilon(z,x)[x,y,z]+\varepsilon(x,y)[y,z,x]+\varepsilon(y,z)[z,x,y]=0$,

(3) $[u,v,[x,y,z]]=[[u,v,x],y,z]+\varepsilon(u+v,x)[x,[u,v,y],z]+\varepsilon(u+v,x+y)[x,y,[u,v,z]]$.

对任意的 $x,y,z,u,v\in hg(T)$.

当 $G=\mathbb{Z}_2$ 且 $\varepsilon(x,y)=(-1)^{|x||y|}$ 时, 李 color 三系成为李超三系；当 $\varepsilon(x,y)\equiv 1$ 时, 李 color 三系成为李三系. 因此, 李 color 三系是一类包含李三系和李超三系的更广泛的代数结构.

定义 2.6 Hom- 李 color 三系是一个四元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\varepsilon)$, 其中 $T=\oplus_{g\in G}T_g$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 G-阶化向量空间, 如果 T 上有三元运算 $[\cdot,\cdot,\cdot]:T\times T\times T\to T$, 偶自同态 $\alpha:T\to T$ 和 G 上的一个斜对称双特征标 $\varepsilon:G\times G\to\mathbb{F}\backslash\{0\}$, 满足

(1) $[x,y,z]=-\varepsilon(x,y)[y,x,z]$,

(2) $\varepsilon(z,x)[x,y,z]+\varepsilon(x,y)[y,z,x]+\varepsilon(y,z)[z,x,y]=0$,

(3) $[\alpha(u),\alpha(v),[x,y,z]]=[[u,v,x],\alpha(y),\alpha(z)]+\varepsilon(u+v,x)[\alpha(x),[u,v,y],\alpha(z)]+\varepsilon(u+v,x+y)[\alpha(x),\alpha(y),[u,v,z]]$.

对任意的 $x,y,z,u,v\in hg(T)$. 特别地, 若还满足

$$\alpha([x,y,z])=[\alpha(x),\alpha(y),\alpha(z)].$$

则称 T 是保积的 Hom- 李 color 三系.

定义 2.7 BiHom- 李 color 三系是一个五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$, 其中 $T=\oplus_{g\in G}T_g$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 G-阶化向量空间, 设 T 具有三元运算 $[\cdot,\cdot,\cdot]:T\times T\times T\to T$, 及两个偶自同态 $\alpha,\beta:T\to T$ 和 G 上的一个斜对称双特征标 $\varepsilon:G\times G\to\mathbb{F}\backslash\{0\}$, 满足

(1) $\alpha\circ\beta=\beta\circ\alpha$,

(2) $[x,y,z]=-\varepsilon(x,y)[y,x,z]$,

(3) $\varepsilon(z,x)[x,y,z]+\varepsilon(x,y)[y,z,x]+\varepsilon(y,z)[z,x,y]=0$,

(4) $[\beta^2(u),\beta^2(v),[\beta(x),\beta(y),\alpha(z)]]=[[\beta(u),\beta(v),\alpha(x)],\beta^2(y),\beta^2(z)]$
$+\varepsilon(u+v,x)[\beta^2(x),[\beta(u),\beta(v),\alpha(y)],\beta^2(z)]+\varepsilon(u+v,x+y)[\beta^2(x),\beta^2(y),[\beta(u),\beta(v),\alpha(z)]]$.

对任意的 $x,y,z,u,v\in hg(T)$. 特别地, 若还满足

$$\alpha([x,y,z])=[\alpha(x),\alpha(y),\alpha(z)],\quad \beta([x,y,z])=[\beta(x),\beta(y),\beta(z)],$$

则称 T 是保积的 BiHom- 李 color 三系.

命题 2.8 设五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是保积的 BiHom- 李 color 三系, α,β 是 T 上的偶同态, $\mathrm{End}(T)$ 表示 T 的所有线性变换构成的线性空间. 令 $\mho:=\{D\in\mathrm{End}(T)\mid D\alpha=\alpha D,\ D\beta=\beta D\}$. 则五元组$(\mho,[\cdot,\cdot],\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\varepsilon)$是 BiHom- 李 color 代数, 其中李 color 扩积为

$$[D_\theta,D_\mu]=D_\theta D_\mu-\varepsilon(\theta,\mu)D_\mu D_\theta.$$

且同态 $\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}:\mathrm{End}(T)\to\mathrm{End}(T)$ 是偶的, 满足 $\widetilde{\alpha}(D)=\alpha D,\ \widetilde{\beta}(D)=\beta D$.

证 对任意的 $D_\theta,D_\mu,D_\eta\in hg(\mathrm{End}(T))$, 可得

$$\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}(D_\theta)=\widetilde{\alpha}(\beta D_\theta)=\alpha\beta D_\theta=\beta\alpha D_\theta=\beta\widetilde{\alpha}(D_\theta)=\widetilde{\beta}(\widetilde{\alpha}(D_\theta))=\widetilde{\beta}\widetilde{\alpha}(D_\theta).$$

其次,

$$\begin{aligned}[\widetilde{\beta}(D_\mu),\widetilde{\alpha}(D_\eta)] =&[\beta D_\mu,\alpha D_\eta]\\ =&(\beta D_\mu)(\alpha D_\eta)-\varepsilon(\mu,\eta)(\alpha D_\eta)(\beta D_\mu)\\ =&\alpha\beta D_\mu D_\eta-\varepsilon(\mu,\eta)\alpha\beta D_\eta D_\mu\\ =&-\varepsilon(\mu,\eta)[\beta D_\eta,\alpha D_\mu]\\ =&-\varepsilon(\mu,\eta)[\widetilde{\beta}(D_\eta),\widetilde{\alpha}(D_\mu)].\end{aligned}$$

再利用李 color 括积运算, 对任意的 $D_\theta, D_\mu, D_\eta\in hg(\mathrm{End}(T))$, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon(\eta,\theta)[\widetilde{\beta}^2(D_\theta),[\widetilde{\beta}(D_\mu),\widetilde{\alpha}(D_\eta)]] &= \varepsilon(\eta,\theta)[\widetilde{\beta}(D_\theta\beta),[\widetilde{\beta}(D_\mu),\widetilde{\alpha}(D_\eta)]]\\ &= \varepsilon(\eta,\theta)[\beta^2D_\theta,\beta D_\mu\alpha D_\eta-\varepsilon(\mu,\eta)\alpha D_\eta\beta D_\mu]\\ &= \varepsilon(\eta,\theta)[\beta^2D_\theta,\beta D_\mu\alpha D_\eta]-\varepsilon(\eta,\theta)\varepsilon(\mu,\eta)[\beta^2D_\theta,\alpha D_\eta\beta D_\mu]\\ &= \varepsilon(\eta,\theta)(\beta^2D_\theta\beta D_\mu\alpha D_\eta-\varepsilon(\theta,\mu+\eta)\beta D_\mu\alpha D_\eta\beta^2D_\theta)\\ &\quad-\varepsilon(\eta,\theta)\varepsilon(\mu,\eta)(\beta^2D_\theta\alpha D_\eta\beta D_\mu-\varepsilon(\theta,\eta+\mu)\alpha D_\eta\beta D_\mu\beta^2D_\theta)\\ &= \varepsilon(\eta,\theta)\beta^2D_\theta\beta D_\mu\alpha D_\eta-\varepsilon(\theta,\mu)\beta D_\mu\alpha D_\eta\beta^2D_\theta\\ &\quad-\varepsilon(\eta,\theta)\varepsilon(\mu,\eta)\beta^2D_\theta\alpha D_\eta\beta D_\mu+\varepsilon(\mu,\eta)\varepsilon(\theta,\mu)\alpha D_\eta\beta D_\mu\beta^2D_\theta.\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}\varepsilon(\theta,\mu)[\widetilde{\beta}^2(D_\mu),[\widetilde{\beta}(D_\eta),\widetilde{\alpha}(D_\theta)]] &= \varepsilon(\theta,\mu)[\widetilde{\beta}(D_\mu\beta),[\widetilde{\beta}(D_\eta),\widetilde{\alpha}(D_\theta)]]\\ &= \varepsilon(\theta,\mu)[\beta^2D_\mu,\beta D_\eta\alpha D_\theta-\varepsilon(\eta,\theta)\alpha D_\theta\beta D_\eta]\\ &= \varepsilon(\theta,\mu)[\beta^2D_\mu,\beta D_\eta\alpha D_\theta]-\varepsilon(\theta,\mu)\varepsilon(\eta,\theta)[\beta^2D_\mu,\alpha D_\theta\beta D_\eta]\\ &= \varepsilon(\theta,\mu)(\beta^2D_\mu\beta D_\eta\alpha D_\theta-\varepsilon(\mu,\eta+\theta)\beta D_\eta\alpha D_\theta\beta^2D_\mu)\\ &\quad-\varepsilon(\theta,\mu)\varepsilon(\eta,\theta)(\beta^2D_\mu\alpha D_\theta\beta D_\eta-\varepsilon(\mu,\theta+\eta)\alpha D_\theta\beta D_\eta\beta^2D_\mu)\\ &= \varepsilon(\theta,\mu)\beta^2D_\mu\beta D_\eta\alpha D_\theta-\varepsilon(\mu,\eta)\beta D_\eta\alpha D_\theta\beta^2D_\mu\\ &\quad-\varepsilon(\theta,\mu)\varepsilon(\eta,\theta)\beta^2D_\mu\alpha D_\theta\beta D_\eta+\varepsilon(\eta,\theta)\varepsilon(\mu,\eta)\alpha D_\theta\beta D_\eta\beta^2D_\mu,\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mu,\eta)[\widetilde{\beta}^2(D_\eta),[\widetilde{\beta}(D_\theta),\widetilde{\alpha}(D_\mu)]] &= \varepsilon(\mu,\eta)[\widetilde{\beta}(D_\eta\beta),[\widetilde{\beta}(D_\theta),\widetilde{\alpha}(D_\mu)]]\\ &= \varepsilon(\mu,\eta)[\beta^2D_\eta,\beta D_\theta\alpha D_\mu-\varepsilon(\theta,\mu)\alpha D_\mu\beta D_\theta]\\ &= \varepsilon(\mu,\eta)[\beta^2D_\eta,\beta D_\theta\alpha D_\mu]-\varepsilon(\mu,\eta)\varepsilon(\theta,\mu)[\beta^2D_\eta,\alpha D_\mu\beta D_\theta]\\ &= \varepsilon(\mu,\eta)(\beta^2D_\eta\beta D_\theta\alpha D_\mu-\varepsilon(\eta,\theta+\mu)\beta D_\theta\alpha D_\mu\beta^2D_\eta)\\ &\quad-\varepsilon(\mu,\eta)\varepsilon(\theta,\mu)(\beta^2D_\eta\alpha D_\mu\beta D_\theta-\varepsilon(\eta,\mu+\theta)\alpha D_\mu\beta D_\theta\beta^2D_\eta)\\ &= \varepsilon(\mu,\eta)\beta^2D_\eta\beta D_\theta\alpha D_\mu-\varepsilon(\eta,\theta)\beta D_\theta\alpha D_\mu\beta^2D_\eta\\ &\quad-\varepsilon(\mu,\eta)\varepsilon(\theta,\mu)\beta^2D_\eta\alpha D_\mu\beta D_\theta+\varepsilon(\eta,\theta)\varepsilon(\theta,\mu)\alpha D_\mu\beta D_\theta\beta^2D_\eta.\end{aligned}$$

将以上三式相加, 可得 $\varepsilon(\eta,\theta)[\widetilde{\beta}^2(D_\theta),[\widetilde{\beta}(D_\mu),\widetilde{\alpha}(D_\eta)]]+\varepsilon(\theta,\mu)[\widetilde{\beta}^2(D_\mu),[\widetilde{\beta}(D_\eta),\widetilde{\alpha}(D_\theta)]]$
$+\,\varepsilon(\mu,\eta)[\widetilde{\beta}^2(D_\eta),[\widetilde{\beta}(D_\theta),\widetilde{\alpha}(D_\mu)]]=0.$

综上, 五元组$(\mho, [\cdot,\cdot], \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \varepsilon)$是 BiHom- 李 color 代数.

任取 $\theta \in G$, 对任意的 $\mu \in G$, 令 $\mathrm{End}_\theta(T) = \{D_\theta \in \mathrm{End}(T) \mid D(T_\mu) \subseteq T_{\theta+\mu}\}$.

定义 2.9 设五元组$(T, [\cdot,\cdot,\cdot], \alpha, \beta, \varepsilon)$是保积的 BiHom- 李 color 三系. $D \in \mathrm{End}_\theta(T)$, 其中 $\theta \in G$,

• 对任意的 $x, y, z \in hg(T)$, 满足

$$[D, \alpha] = 0, \ \ [D, \beta] = 0,$$

$$D([x,y,z]) = [D(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)] + \varepsilon(\theta, x)[\alpha^k\beta^l(x), D(y), \alpha^k\beta^l(z)] + \varepsilon(\theta, x+y)[\alpha^k\beta^l(x), \alpha^k\beta^l(y), D(z)].$$

则称 D 为 T 的 θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 导子.

• 对任意的 $x, y, z \in hg(T)$, 如果存在 $D^{'}, D^{''}, D^{'''} \in \mathrm{End}_\theta(T)$, 满足

$$[D, \alpha] = [D^{'}, \alpha] = [D^{''}, \alpha] = [D^{'''}, \alpha] = 0, \quad [D, \beta] = [D^{'}, \beta] = [D^{''}, \beta] = [D^{'''}, \beta] = 0,$$

$$D^{'''}([x,y,z]) = [D(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)] + \varepsilon(\theta, x)[\alpha^k\beta^l(x), D^{'}(y), \alpha^k\beta^l(z)] + \varepsilon(\theta, x+y)[\alpha^k\beta^l(x), \alpha^k\beta^l(y), D^{''}(z)].$$

则称 D 为 T 的 θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 广义导子.

• 对任意的 $x, y, z \in hg(T)$, 如果存在 $D^{'} \in \mathrm{End}_\theta(T)$, 满足

$$[D, \alpha] = [D^{'}, \alpha] = 0, \quad [D, \beta] = [D^{'}, \beta] = 0,$$

$$D^{'}([x,y,z]) = [D(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)] + \varepsilon(\theta, x)[\alpha^k\beta^l(x), D(y), \alpha^k\beta^l(z)] + \varepsilon(\theta, x+y)[\alpha^k\beta^l(x), \alpha^k\beta^l(y), D(z)].$$

则称 D 为 T 的 θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 拟导子.

• 对任意的 $x, y, z \in hg(T)$, 若满足

$$[D, \alpha] = 0, \ \ [D, \beta] = 0,$$

$$D([x,y,z]) = [D(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)] = \varepsilon(\theta, x)[\alpha^k\beta^l(x), D(y), \alpha^k\beta^l(z)] = \varepsilon(\theta, x+y)[\alpha^k\beta^l(x), \alpha^k\beta^l(y), D(z)].$$

则称 D 为 T 的 θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 型心.

• 对任意的 $x, y, z \in hg(T)$, 若满足

$$[D, \alpha] = 0, \ \ [D, \beta] = 0,$$

$$[D(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)] = \varepsilon(\theta, x)[\alpha^k\beta^l(x), D(y), \alpha^k\beta^l(z)] = \varepsilon(\theta, x+y)[\alpha^k\beta^l(x), \alpha^k\beta^l(y), D(z)].$$

则称 D 为 T 的 θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 拟型心.

• 对任意的 $x, y, z \in hg(T)$, 若满足

$$[D, \alpha] = 0, \ \ [D, \beta] = 0,$$

$$D([x,y,z])=[D(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)]=0.$$

则称 D 为 T 的 θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 中心导子.

用 $\mathrm{Der}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{GDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{QDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{QC}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{ZDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 分别表示五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$的 θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 导子, θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 广义导子, θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 拟导子, θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 型心, θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 拟型心, θ 次 $\alpha^k\beta^l$- 中心导子构成的全体. 令

$\mathrm{Der}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{GDer}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{GDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$,

$\mathrm{QDer}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{QDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{C}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{C}_{\alpha^k\beta^l}(T)$,

$\mathrm{QC}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{QC}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $\mathrm{ZDer}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{ZDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$.

称 $\mathrm{Der}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 为 T 的导子, 其中 $\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 是 G-阶化的, 即

$$\mathrm{Der}_{\alpha^k\beta^l}(T)=\oplus_{\theta\in G}\mathrm{Der}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T).$$

称 $\mathrm{GDer}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{GDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 为 T 的广义导子, 其中 $\mathrm{GDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 是 G-阶化的, 即

$$\mathrm{GDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)=\oplus_{\theta\in G}\mathrm{GDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T).$$

称 $\mathrm{QDer}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{QDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 为 T 的拟导子, 其中 $\mathrm{QDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 是 G-阶化的, 即

$$\mathrm{QDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)=\oplus_{\theta\in G}\mathrm{QDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T).$$

称 $\mathrm{C}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{C}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 为 T 的型心, 其中 $\mathrm{C}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 是 G-阶化的, 即

$$\mathrm{C}_{\alpha^k\beta^l}(T)=\oplus_{\theta\in G}\mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T).$$

称 $\mathrm{QC}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{QC}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 为 T 的拟型心, 其中 $\mathrm{QC}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 是 G-阶化的, 即

$$\mathrm{QC}_{\alpha^k\beta^l}(T)=\oplus_{\theta\in G}\mathrm{QC}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T).$$

称 $\mathrm{ZDer}(T)=\oplus_{k\geq0,l\geq0}\mathrm{ZDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 为 T 的中心导子, 其中 $\mathrm{ZDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)$ 是 G- 阶化的, 即

$$\mathrm{ZDer}_{\alpha^k\beta^l}(T)=\oplus_{\theta\in G}\mathrm{ZDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T).$$

根据以上定义, 易得

$$\mathrm{ZDer}(T)\subseteq\mathrm{Der}(T)\subseteq\mathrm{QDer}(T)\subseteq\mathrm{GDer}(T)\subseteq\mathrm{End}(T),$$

$$\mathrm{C}(T)\subseteq\mathrm{QC}(T).$$

定义 2.10 设五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是保积的 BiHom- 李 color 三系. 如果对任意的 $y,z\in T$, 满足

$$\mathrm{Z}(T)=\{x\in hg(T)|[x,y,z]=0\}.$$

那么 $\mathrm{Z}(T)$ 为 T 的中心.

下面给出 BiHom- 李 color 代数的子代数、BiHom- 子代数、理想以及 BiHom- 理想的定义.

定义 2.11 设五元组$(T,[\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是 BiHom- 李 color 代数, M 和 I 是 T 的 G-阶化子空间, 如果 $[M,M]\subseteq M$, 则称 M 是 T 的子代数；如果 $[T,I]\subseteq I$, 则称 I 是 T 的理想.

定义 2.12 设五元组$(T,[\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是 BiHom- 李 color 代数, 若 M 是 T 的子代数, 还满足 $\alpha(M)\subseteq M$, $\beta(M)\subseteq M$, 则称 M 是 T 的 BiHom- 子代数；若 I 是 T 的理想, 还满足 $\alpha(I)\subseteq I$, $\beta(I)\subseteq I$, 则称 I 是 T 的 BiHom- 理想.

3 主要结果

命题 3.1 若五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是一个保积的 BiHom- 李 color 三系, 则下列成立：

(1) $\mathrm{GDer}(T)$, $\mathrm{QDer}(T)$ 和 $\mathrm{C}(T)$ 是 $\mho$ 的 BiHom- 子代数,

(2) $\mathrm{ZDer}(T)$ 是 $\mathrm{Der}(T)$ 的 BiHom- 理想.

证 (1) 假设 $D_1\in\mathrm{GDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $D_2\in\mathrm{GDer}^{\eta}_{\alpha^s\beta^t}(T)$. 对任意的 $x,y,z\in hg(T)$. 有

$$
\begin{aligned}
&[(\widetilde{\alpha}(D_1)(x)),\alpha^{k+1}\beta^l(y),\alpha^{k+1}\beta^l(z)]\\
=&[D_1\circ\alpha(x),\alpha^{k+1}\beta^l(y),\alpha^{k+1}\beta^l(z)]\\
=&\alpha([D_1(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)])\\
=&\alpha([D_1^{'''}([x,y,z])-\varepsilon(\theta,x)[\alpha^k\beta^l(x),D_1^{'}(y),\alpha^k\beta^l(z)]\\
&-\varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^k\beta^l(x),\alpha^k\beta^l(y),D_1^{''}(z)])\\
=&\widetilde{\alpha}(D_1^{'''}[x,y,z])-\varepsilon(\theta,x)[\alpha^{k+1}\beta^l(x),\widetilde{\alpha}(D_1^{'})(y),\alpha^{k+1}\beta^l(z)]\\
&-\varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^{k+1}\beta^l(x),\alpha^{k+1}\beta^l(y),\widetilde{\alpha}(D_1^{''})(z)].
\end{aligned}
$$

因为 $\widetilde{\alpha}(D_1^{'''})$, $\widetilde{\alpha}(D_1^{''})$ 和 $\widetilde{\alpha}(D_1^{'})$ 全部属于 $\mathrm{End}(T)$, 因此 $\widetilde{\alpha}(D_1)\in\mathrm{GDer}^{\theta}_{\alpha^{k+1}\beta^l}(T)$. 类似可得 $\widetilde{\beta}(D_1)\in\mathrm{GDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^{l+1}}(T)$. 又有

$$
\begin{aligned}
&[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
=&D_1^{'''}([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y),\alpha^s\beta^t(z)])\\
&-\varepsilon(\theta,\eta+x)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),D_1^{'}(\alpha^s\beta^t(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&-\varepsilon(\theta,\eta+x+y)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_1^{''}(\alpha^s\beta^t(z))]\\
=&D_1^{'''}(D_2^{'''}([x,y,z])-\varepsilon(\eta,x)[\alpha^s\beta^t(x),D_2^{'}(y),\alpha^s\beta^t(z)]\\
&-\varepsilon(\eta,x+y)[\alpha^s\beta^t(x),\alpha^s\beta^t(y),D_2^{''}(z)])\\
&-\varepsilon(\theta,\eta+x)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),D_1^{'}(\alpha^s\beta^t(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&-\varepsilon(\theta,\eta+x+y)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_1^{''}(\alpha^s\beta^t(z))]\\
=&D_1^{'''}(D_2^{'''}([x,y,z])-\varepsilon(\eta,x)D_1^{'''}([\alpha^s\beta^t(x),D_2^{'}(y),\alpha^s\beta^t(z)])\\
&-\varepsilon(\eta,x+y)D_1^{'''}([\alpha^s\beta^t(x),\alpha^s\beta^t(y),D_2^{''}(z)])\\
&-\varepsilon(\theta,\eta+x)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),D_1^{'}(\alpha^s\beta^t(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&-\varepsilon(\theta,\eta+x+y)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_1^{''}(\alpha^s\beta^t(z))]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= D_1^{'''}(D_2^{'''}([x,y,z])) - \varepsilon(\eta,x)[D_1(\alpha^s\beta^t(x)), \alpha^k\beta^l(D_2^{'}(y)), \alpha^{k+s}\beta^{t+l}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,x)\varepsilon(\theta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{t+l}(x), D_1^{'}D_2^{'}(y), \alpha^{k+s}\beta^{t+l}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,x)\varepsilon(\theta,x+y+\eta)[\alpha^{k+s}\beta^{t+l}(x), \alpha^k\beta^l(D_2^{'}(y)), D_1^{''}(\alpha^s\beta^t(z))]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,x+y)[D_1(\alpha^s\beta^t(x)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), \alpha^k\beta^l(D_2^{''}(z))]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,x+y)\varepsilon(\theta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{t+l}(x), D_1^{'}(\alpha^s\beta^t(y)), \alpha^k\beta^l(D_2^{''}(z))]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,x+y)\varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{t+l}(x), \alpha^{k+s}\beta^{t+l}(y), D_1^{''}D_2^{''}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,\eta+x)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)), D_1^{'}(\alpha^s\beta^t(y)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,\eta+x+y)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), D_1^{''}(\alpha^s\beta^t(z))],
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&[D_2D_1(x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&= D_2^{'''}([D_1(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)])\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), D_2^{'}(\alpha^k\beta^l(y)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x+y)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), D_2^{''}(\alpha^k\beta^l(z))]\\
&= D_2^{'''}\big(D_1^{'''}([x,y,z]) - \varepsilon(\theta,x)[\alpha^k\beta^l(x), D_1^{'}(y), \alpha^k\beta^l(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^k\beta^l(x), \alpha^k\beta^l(y), D_1^{''}(z)]\big)\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), D_2^{'}(\alpha^k\beta^l(y)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x+y)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), D_2^{''}(\alpha^k\beta^l(z))]\\
&= D_2^{'''}D_1^{'''}([x,y,z]) - \varepsilon(\theta,x)D_2^{'''}([\alpha^k\beta^l(x), D_1^{'}(y), \alpha^k\beta^l(z)])\\
&\quad - \varepsilon(\theta,x+y)D_2^{'''}([\alpha^k\beta^l(x), \alpha^k\beta^l(y), D_1^{''}(z)])\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), D_2^{'}(\alpha^k\beta^l(y)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x+y)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), D_2^{''}(\alpha^k\beta^l(z))]\\
&= D_2^{'''}D_1^{'''}([x,y,z]) - \varepsilon(\theta,x)[D_2(\alpha^k\beta^l(x)), \alpha^s\beta^t(D_1^{'}(y)), \alpha^{k+s}\beta^{t+l}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,x)\varepsilon(\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), D_2^{'}(D_1^{'}(y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,x)\varepsilon(\eta,x+y+\theta)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), \alpha^s\beta^t(D_1^{'}(y)), D_2^{''}(\alpha^k\beta^l(z))]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,x+y)[D_2(\alpha^k\beta^l(x)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), \alpha^s\beta^t(D_1^{''}(z))]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,x+y)\varepsilon(\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), D_2^{'}(\alpha^k\beta^l(y)), \alpha^s\beta^t(D_1^{''}(z))]\\
&\quad - \varepsilon(\theta,x+y)\varepsilon(\eta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), D_2^{''}D_1^{''}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), D_2^{'}(\alpha^k\beta^l(y)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&\quad - \varepsilon(\eta,\theta+x+y)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), D_2^{''}(\alpha^k\beta^l(z))].
\end{aligned}
$$

从而对于任意的 $x,y,z\in hg(T)$, 有

$$
\begin{aligned}
[[D_1,D_2](x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)] =&[D_1^{'''}, D_2^{'''}]([x,y,z])\\
&- \varepsilon(\theta+\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), [D_1^{'}, D_2^{'}](y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&- \varepsilon(\theta+\eta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), [D_1^{''}, D_2^{''}](z)].
\end{aligned}
$$

显然 $[D_1^{'}, D_2^{'}]$, $[D_1^{''}, D_2^{''}]$ 和 $[D_1^{'''}, D_2^{'''}]$ 都属于 $\mathrm{End}(T)$, 所以 $[D_1, D_2] \in \mathrm{GDer}^{\theta+\eta}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(T)$, 对任意的 $x, y, z \in T$, 所以 $\mathrm{GDer}(T)$ 是 $\mho$ 的 BiHom- 子代数.

同理可证 $\mathrm{QDer}(T)$ 是 $\mho$ 的 BiHom- 子代数.

下面证明 $\mathrm{C}(T)$ 是 $\mho$ 的 BiHom- 子代数. 假设 $D_1 \in \mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $D_2 \in \mathrm{C}^{\eta}_{\alpha^s\beta^t}(T)$, 对任意的 $x, y, z \in hg(T)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}(D_1)([x,y,z]) &= \alpha \circ D_1([x,y,z]) \\
&= D_1 \circ \alpha([x,y,z]) \\
&= D_1[\alpha(x), \alpha(y), \alpha(z)] \\
&= [D_1(\alpha(x)), \alpha^{k+1}\beta^l(y), \alpha^{k+1}\beta^l(z)] \\
&= \varepsilon(\theta, x)[\alpha^{k+1}\beta^l(x), D_1(\alpha(y)), \alpha^{k+1}\beta^l(z)] \\
&= \varepsilon(\theta, x)[\alpha^{k+1}\beta^l(x), \widetilde{\alpha}(D_1(y)), \alpha^{k+1}\beta^l(z)].
\end{aligned}$$

类似可得 $\widetilde{\beta}(D_1)([x,y,z]) = \varepsilon(\theta, x)[\alpha^k\beta^{l+1}(x), \widetilde{\beta}(D_1(y)), \alpha^k\beta^{l+1}(z)]$.
所以, $\widetilde{\alpha}(D_1) \in \mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^{k+1}\beta^l}(T)$ 和 $\widetilde{\beta}(D_1) \in \mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^{l+1}}(T)$, 注意到

$$\begin{aligned}
&[[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)] \\
&= [D_1D_2(x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)] - \varepsilon(\theta,\eta)[D_2D_1(x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)] \\
&= [D_1(D_2(x)), \alpha^k\beta^l(\alpha^s\beta^t(y)), \alpha^k\beta^l(\alpha^s\beta^t(z))] \\
&\quad - \varepsilon(\theta,\eta)[D_2(D_1(x)), \alpha^s\beta^t(\alpha^k\beta^l(y)), \alpha^s\beta^t(\alpha^k\beta^l(z))] \\
&= D_1[D_2(x), \alpha^s\beta^t(y), \alpha^s\beta^t(z)] - \varepsilon(\theta,\eta)D_2[D_1(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)] \\
&= D_1D_2([x,y,z]) - \varepsilon(\theta,\eta)D_2D_1([x,y,z]) = [D_1, D_2]([x,y,z]).
\end{aligned}$$

同理可得

$$\varepsilon(\theta+\eta, x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), [D_1, D_2](y), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)] = [D_1, D_2]([x,y,z]),$$

和

$$\varepsilon(\theta+\eta, x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x), \alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y), [D_1, D_2](z)] = [D_1, D_2]([x,y,z]).$$

因此 $[D_1, D_2] \in \mathrm{C}^{\theta+\eta}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(T)$, 即证 $\mathrm{C}(T)$ 是 $\mho$ 的 BiHom- 子代数.

(2) 假设 $D_1 \in \mathrm{ZDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $D_2 \in \mathrm{Der}^{\eta}_{\alpha^s\beta^t}(T)$. 对任意的 $x, y, z \in T$, 则有

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\alpha}(D_1)(x), \alpha^{k+1}\beta^l(y), \alpha^{k+1}\beta^l(z)] &= \alpha([D_1(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)]) \\
&= \alpha \circ D_1([x,y,z]) \\
&= \widetilde{\alpha}(D_1)([x,y,z]) = 0,
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
[\widetilde{\beta}(D_1)(x), \alpha^k\beta^{l+1}(y), \alpha^k\beta^{l+1}(z)] &= \beta([D_1(x), \alpha^k\beta^l(y), \alpha^k\beta^l(z)]) \\
&= \beta \circ D_1([x,y,z]) \\
&= \widetilde{\beta}(D_1)([x,y,z]) = 0.
\end{aligned}$$

因此 $\widetilde{\alpha}(D_1)\in \mathrm{ZDer}^{\theta}_{\alpha^{k+1}\beta^{l}}(T)$ 和 $\widetilde{\beta}(D_1)\in \mathrm{ZDer}^{\theta}_{\alpha^{k}\beta^{l+1}}(T)$. 注意到

$$\begin{aligned}[[D_1,D_2]([x,y,z])]&=D_1D_2([x,y,z])-\varepsilon(\theta,\eta)D_2D_1([x,y,z])\\&=D_1([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y),\alpha^s\beta^t(z)])+\varepsilon(\eta,x)D_1([\alpha^s\beta^t(x),D_2(y),\alpha^s\beta^t(z)])\\&\quad+\varepsilon(\eta,x+y)D_1([\alpha^s\beta^t(x),\alpha^s\beta^t(y),D_2(z)])-0\\&=0,\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}&[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\=&[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\&-\varepsilon(\theta,\eta)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\=&D_1([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y),\alpha^s\beta^t(z)])\\&-\varepsilon(\theta,\eta)D_2([D_1(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)])+\varepsilon(\eta,\theta+x)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)),D_2(\alpha^k\beta^l(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\&+\varepsilon(\eta,\theta+x+y)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_2(\alpha^k\beta^l(z))]\\=&0.\end{aligned}$$

则 $[D_1,D_2]\in \mathrm{ZDer}^{\theta+\eta}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(T)$. 于是, ZDer(T) 是 $\mathrm{Der}(T)$ 的 BiHom- 理想.

引理 3.2 若五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是特征不等于 3 的域 $\mathbb{F}$ 上保积的 BiHom- 李 color 三系. 则

(1) $[\mathrm{Der}(T),\mathrm{C}(T)]\subseteq \mathrm{C}(T)$,

(2) $[\mathrm{QDer}(T),\mathrm{QC}(T)]\subseteq \mathrm{QC}(T)$,

(3) $[\mathrm{QC}(T),\mathrm{QC}(T)]\subseteq \mathrm{QDer}(T)$,

(4) $\mathrm{C}(T)\subseteq \mathrm{QDer}(T)$.

证 (1) 假设 $D_1\in \mathrm{Der}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $D_2\in \mathrm{C}^{\eta}_{\alpha^s\beta^t}(T)$. 对任意的 $x,y,z\in hg(T)$, 则有

$$\begin{aligned}&[D_1,D_2]([x,y,z])\\=&D_1D_2([x,y,z])-\varepsilon(\theta,\eta)D_2D_1([x,y,z])\\=&D_1([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y),\alpha^s\beta^t(z)])\\&-\varepsilon(\theta,\eta)D_2\big([D_1(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)]\\&+\varepsilon(\theta,x)[\alpha^k\beta^l(x),D_1(y),\alpha^k\beta^l(z)]+\varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^k\beta^l(x),\alpha^k\beta^l(y),D_1(z)]\big)\\=&[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\&+\varepsilon(\theta,\eta+x)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),D_1(\alpha^s\beta^t(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\&+\varepsilon(\theta,\eta+x+y)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_1(\alpha^s\beta^t(z))]\\&-\varepsilon(\theta,\eta)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\&-\varepsilon(\theta,\eta)\varepsilon(\theta,x)[(\alpha^k\beta^l(D_2(x)),\alpha^s\beta^t(D_1(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\&-\varepsilon(\theta,\eta)\varepsilon(\theta,x+y)[D_2(\alpha^k\beta^l(x)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^s\beta^t(D_1(z))]\\=&[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]-\varepsilon(\theta,\eta)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\=&[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)].\end{aligned}$$

同理可得

$$[D_1,D_2]([x,y,z])=\varepsilon(\theta+\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),[D_1,D_2](y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)],$$

且

$$[D_1,D_2]([x,y,z])=\varepsilon(\theta+\eta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),[D_1,D_2](z)].$$

则 $[D_1,D_2]([x,y,z])\in \mathrm{C}^{\theta+\eta}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(T)$. 因此 $[\mathrm{Der}(T),\mathrm{C}(T)]\subseteq \mathrm{C}(T)$.

(2) 类似于 (1) 的证明.

(3) 假设 $D_1\in \mathrm{QC}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $D_2\in \mathrm{QC}^{\eta}_{\alpha^s\beta^t}(T)$. 对任意的 $x,y,z\in hg(T)$, 则有

$$\begin{aligned}
&[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&+\varepsilon(\theta+\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),[D_1,D_2](y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&+\varepsilon(\theta+\eta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),[D_1,D_2](z)]\\
=\;&[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&+\varepsilon(\theta+\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),D_1D_2(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&+\varepsilon(\theta+\eta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_1D_2(z)]\\
&-\varepsilon(\theta,\eta)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&-\varepsilon(\theta+\eta,x)\varepsilon(\theta,\eta)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),D_2D_1(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
&-\varepsilon(\theta+\eta,x+y)\varepsilon(\theta,\eta)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_2D_1(z)].
\end{aligned}$$

很容易验证

$$\begin{aligned}
&[D_1D_2(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
=\;&[D_1(D_2(x)),\alpha^k\beta^l(\alpha^s\beta^t(y)),\alpha^k\beta^l(\alpha^s\beta^t(z))]\\
=\;&\varepsilon(\theta,\eta+x)[\alpha^k\beta^l(D_2(x)),D_1(\alpha^s\beta^t(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
=\;&\varepsilon(\theta,\eta+x)\varepsilon(\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),D_2(D_1(y)),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
=\;&\varepsilon(\theta+\eta,x)\varepsilon(\theta,\eta)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),D_2D_1(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)],
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\theta+\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),D_1D_2(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
=\;&\varepsilon(\theta+\eta,x)[\alpha^k\beta^l(\alpha^s\beta^t(x)),D_1(D_2(y)),\alpha^k\beta^l(\alpha^s\beta^t(z))]\\
=\;&\varepsilon(\theta+\eta,x)\varepsilon(\theta,\eta+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),(\alpha^k\beta^l(D_2(y)),D_1(\alpha^s\beta^t(z))]\\
=\;&\varepsilon(\theta+\eta,x)\varepsilon(\theta,\eta+y)\varepsilon(\eta,y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_2D_1(z)]\\
=\;&\varepsilon(\theta+\eta,x+y)\varepsilon(\theta,\eta)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_2D_1(z)],
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\theta+\eta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),D_1D_2(z)]\\
=\;&\varepsilon(\theta+\eta,x+y)\varepsilon(x+y,\theta)[D_1(\alpha^s\beta^t(x)),(\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y)),\alpha^k\beta^lD_2(z)]\\
=\;&\varepsilon(\theta+\eta,x+y)\varepsilon(x+y,\theta)\varepsilon(\theta+x+y,\eta)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]\\
=\;&\varepsilon(\theta,\eta)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)].
\end{aligned}$$

因此, $[[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]+\varepsilon(\theta+\eta,x)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),[D_1,D_2](y),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z)]$ $+\varepsilon(\theta+\eta,x+y)[\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y),[D_1,D_2](z)]=0$, 所以 $[D_1,D_2]\in \mathrm{QDer}^{\theta+\eta}_{\alpha^{k+s}\beta^{l+t}}(T)$. 即证 $[\mathrm{QC}(T),\mathrm{QC}(T)]\subseteq \mathrm{QDer}(T)$.

(4) 假设 $D\in \mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$. 则对任意的 $x,y,z\in hg(T)$, 有

$$\begin{aligned} D([x,y,z]) &= [D(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)]=\varepsilon(\theta,x)[\alpha^k\beta^l(x),D(y),\alpha^k\beta^l(z)]\\ &= \varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^k\beta^l(x),\alpha^k\beta^l(y),D(z)]. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} 3D([x,y,z]) &= [D(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)]+\varepsilon(\theta,x)[\alpha^k\beta^l(x),D(y),\alpha^k\beta^l(z)]\\ &\quad +\varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^k\beta^l(x),\alpha^k\beta^l(y),D(z)]. \end{aligned}$$

这就是说 $D^{'}=3D\in \mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$. 故 $\mathrm{C}(T)\subseteq \mathrm{QDer}(T)$.

定理 3.3 设五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是一个保积的 BiHom- 李 color 三系, α,β 是满射, 则 $[\mathrm{C}(T),\mathrm{QC}(T)]\subseteq \mathrm{End}(T,\mathrm{Z}(T))$. 特别地, 若 $\mathrm{Z}(T)=\{0\}$, 则 $[\mathrm{C}(T),\mathrm{QC}(T)]=\{0\}$.

证 假设 $D_1\in \mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, $D_2\in \mathrm{QC}^{\eta}_{\alpha^s\beta^t}(T)$. 对任意的 $x\in hg(T)$. 因为 α 和 β 是满射, 对任意的 $y,z\in hg(T)$, 存在 $y^{'},z^{'}\in hg(T)$, 使得 $y=\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y^{'}),z=\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z^{'})$, 则

$$\begin{aligned} [[D_1,D_2](x),y,z] &= [[D_1,D_2](x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y^{'}),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z^{'})]\\ &= [D_1D_2(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y^{'}),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z^{'})]\\ &\quad -\varepsilon(\theta,\eta)[D_2D_1(x),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(y^{'}),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z^{'})]\\ &= D_1([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y^{'}),\alpha^s\beta^t(z^{'})])\\ &\quad -\varepsilon(\theta,\eta)\varepsilon(\eta,\theta+x)[\alpha^s\beta^t(D_1(x)),D_2(\alpha^k\beta^l(y^{'})),\alpha^{k+s}\beta^{l+t}(z^{'})]\\ &= D_1([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y^{'}),\alpha^s\beta^t(z^{'})])\\ &\quad -\varepsilon(\eta,x)D_1([\alpha^s\beta^t(x),D_2(y^{'}),\alpha^s\beta^t(z^{'})])\\ &= D_1([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y^{'}),\alpha^s\beta^t(z^{'})])\\ &\quad -D_1([D_2(x),\alpha^s\beta^t(y^{'}),\alpha^s\beta^t(z^{'})])\\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $[D_1,D_2](x)\in \mathrm{Z}(T)$, 从而 $[D_1,D_2]\in \mathrm{End}(T,\mathrm{Z}(T))$. 特别地, 若 $\mathrm{Z}(T)=\{0\}$, 显然有 $[\mathrm{C}(T),\mathrm{QC}(T)]=\{0\}$.

定理 3.4 如果五元组$(T,[\cdot,\cdot,\cdot],\alpha,\beta,\varepsilon)$是在特征不为 2 的域 $\mathbb{F}$ 上的一个保积的 BiHom-李 color 三系, 则有

$$\mathrm{ZDer}(T)=\mathrm{C}(T)\cap \mathrm{Der}(T).$$

证 假设 $D\in \mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)\cap \mathrm{Der}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$. 对任意的 $x,y,z\in hg(T)$, 则有

$$\begin{aligned} D([x,y,z]) &= [D(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)]+\varepsilon(\theta,x)[\alpha^k\beta^l(x),D(y),\alpha^k\beta^l(z)]\\ &\quad +\varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^k\beta^l(x),\alpha^k\beta^l(y),D(z)], \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} D([x,y,z]) &= [D(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)] = \varepsilon(\theta,x)[\alpha^k\beta^l(x),D(y),\alpha^k\beta^l(z)] \\ &= \varepsilon(\theta,x+y)[\alpha^k\beta^l(x),\alpha^k\beta^l(y),D(z)]. \end{aligned}$$

则 $2D([x,y,z]) = 0$, 因为数域 $\mathbb{F}$ 的特征不等于 2, 因此 $D([x,y,z]) = 0$. 因此 $D \in \mathrm{ZDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, 从而 $\mathrm{C}(T)\cap\mathrm{Der}(T)\subseteq\mathrm{ZDer}(T)$.

另一方面, 假设 $D\in\mathrm{ZDer}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$, 对任意的 $x,y,z\in hg(T)$, 我们有

$$D([x,y,z]) = [D(x),\alpha^k\beta^l(y),\alpha^k\beta^l(z)] = 0.$$

很容易验证 $D\in\mathrm{C}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)\cap\mathrm{Der}^{\theta}_{\alpha^k\beta^l}(T)$. 从而 $\mathrm{ZDer}(T)\subseteq\mathrm{C}(T)\cap\mathrm{Der}(T)$.

综上 $\mathrm{ZDer}(T)=\mathrm{C}(T)\cap\mathrm{Der}(T)$.

参 考 文 献

[1] Jacobson N. Lie and Jordan triple systems[J]. American Journal of Mathematics, 1949, 71(1): 149–170.

[2] 赵冠华, 吴辰余. 李三系的扩张 [J]. 河北师范大学学报 (自然科学版), 2011, 35(06): 555–557.

[3] Lister W G. A structure theory of Lie triple systems[J]. Transactions of the American Mathematic Society, 1952, 72(2): 217–242.

[4] Najati A. Generalized derivations on Lie triple systems[J]. Results in Mathematics, 2009, 54(1-2): 143–147.

[5] 腾文, 金久林, 游泰杰. 李超三系的线性形变与阿贝尔扩张 [J]. 山东大学学报 (理学版), 2021, 56(04): 14–24.

[6] 郭双建. 李超三系的上同调和 Nijenhuis 算子 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2020, (04): 1–11.

[7] 张庆成. 李 color 代数及其相关问题研究 [D]. 东北师范大学, 2007.

[8] 张健, 曹燕. 李 color 三系的导子、广义导子和拟导子 [J]. 东北师大学报 (自然科学版), 2018, 50(03): 13–16.

[9] 周佳, 牛艳君, 陈良云. Hom- 李代数的广义导子 [J]. 数学学报 (中文版), 2015, 58(04): 551–558.

[10] Lamei Y. Hom-Lie color algebra structures[J]. Communications in Algebra, 2012, 40(2): 575–592.

[11] 曹燕, 陶雅玲. 分裂的正则双 Hom- 李 Color 代数 (英文)[J]. 数学杂志, 2022, 42(01): 49–62.

[12] 郭双建, 张晓辉, 王圣祥. BiHom-Lie 共形代数的上同调与形变 [J]. 中国科学: 数学, 2022, 52(09): 997–1014.

[13] 郭双建. δ-BiHom-Jordan- 李超代数的阿贝尔扩张和 T*- 扩张 [J]. 浙江大学学报 (理学版), 2021, 48(02): 167–179.

[14] Hassine A B. Generalized derivations, quasiderivations and centroids of Bihom-Lie triple system[J]. Asian-European Journal of Mathematics, 2022, 15(06): 2250111.

[15] 刘宁, 张庆成. δ Jordan- 李三系上带有权 λ 的 k- 阶广义导子 (英文)[J]. 数学杂志, 2021, 41(01): 37–56.

GENERALIZED DERIVATIONS OF MULTIPLICATIVE BIHOM-LIE COLOR TRIPLE SYSTEMS

SUN Ya-liang, CAO Yan

(*School of science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China*)

Abstract: In this paper, we study the definition and important properties of the generalized derivation algebra $\mathrm{GDer}(T)$ of Multiplicative BiHom-Lie color triple systems T. Based on the generalized derivations of BiHom-Lie triple systems, we construct the quasi derivation algebra $\mathrm{QDer}(T)$, the centroid $\mathrm{C}(T)$ and the quasi centroid $\mathrm{QC}(T)$ and the central derivation algebra $\mathrm{ZDer}(T)$ of multiplicative BiHom-Lie color triple systems T. We prove the central derivation algebra $\mathrm{ZDer}(T)$ is BiHom-ideals of $\mathrm{Der}(T)$. Moreover, we also prove that $[\mathrm{C}(T), \mathrm{QC}(T)] \subseteq \mathrm{End}(T, \mathrm{Z}(T))$. In particular, if $\mathrm{Z}(T) = \{0\}$, then we have $[\mathrm{C}(T), \mathrm{QC}(T)] = \{0\}$.

Keywords: BiHom-Lie color triple systems; generalized derivations; quasi derivations; centroids

2010 MR Subject Classification: 17B75; 17A60; 17B22; 17B65