

## 类空和类时曲线的仿射性质研究

赵鑫铭, 王艺梦, 刘会立, 钱金花  
(东北大学理学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘要:** 本文研究类空和类时曲线的中心仿射曲率, 中心仿射挠率, 曲线的曲率和挠率满足的关系以及两类曲线的正交标架和仿射标架之间关系的问题. 利用仿射空间和 Minkowski 空间中曲线的基本理论, 讨论当类空和类时曲线的弧长与仿射弧长相同时, 类空和类时曲线的仿射性质. 根据得到的结论, 通过变量代换讨论当类空和类时曲线的曲率  $\kappa(s)$  和挠率  $\tau(s)$  满足  $\tau(s) = a\kappa^\lambda(s)$  ( $a \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ) 时, 曲线的曲率所满足的特殊微分方程.

**关键词:** 仿射空间; Minkowski 空间; 弧长; 曲率; 挠率

MR(2010) 主题分类号: 53A15; 53C50; 34A05 中图分类号: O186.1; O184

文献标识码: A 文章编号: 0255-7797(2023)05-0459-12

### 1 引言

作为曲线的几何不变量, 弧长和曲率在微分几何研究中有着重要的意义. 多年来, 人们对于欧氏空间和 Minkowski 空间中曲线的弧长参数和曲率进行了广泛而深入的研究, 但是仿射空间中的相关研究结论则比较少. 1979 年, Michael Spivak 提出应用 Cartan 定理寻找仿射变换下的不变量这一研究思路<sup>[1]</sup>. 2007 年, Mehdi Nadjafikhah 等人在 Spivak 工作的基础上结合等价问题得到了仿射不变量, 同时给出了仿射不变量在物理学、计算机视觉和图像处理中的若干应用<sup>[2,3]</sup>. 2014 年, 刘会立在仿射空间中定义了仿射曲线的中心仿射弧长参数和中心仿射曲率, 并给出了一些分类结果<sup>[4]</sup>. 2016 年, 邓爽将仿射曲线与欧氏空间中的曲线通过弧长参数联系起来, 找到了中心仿射曲率与欧氏空间中曲线的曲率函数和挠率函数之间的关系<sup>[5]</sup>.

众所周知, 曲率和挠率是刻画空间曲线的两个重要特征, 曲率刻画了曲线沿主法方向的弯曲程度, 挠率则刻画了曲线沿副法方向的弯曲程度. 一条空间曲线的形状可以由曲率  $\kappa(s)$  和挠率  $\tau(s)$  完全决定, 如当挠率与曲率的比为非零常数时, 曲线为一般螺线; 当挠率与曲率的比为弧长的线性函数时, 曲线为从切曲线等. 本文主要研究二维以及三维 Minkowski 空间中类空和类时曲线的仿射性质. 首先研究当类空和类时曲线的弧长与仿射弧长相同时, 二维以及三维类空和类时曲线的中心仿射曲率、中心仿射挠率与曲线的曲率、挠率之间的对应关系, 以及两类曲线的正交标架和仿射标架之间的对应关系. 如二维 Minkowski 空间中的类空或者类时曲线的中心仿射曲率  $\kappa_1(s)$  和其曲率  $\kappa(s)$  之间满足  $\kappa_1(s) = (\log |\kappa(s)|)'$ . 同时讨论这一条件下, 类空和类时曲线自身的曲率和挠率满足的关系. 然后根据得到的结论, 讨论当类

\*收稿日期: 2022-10-01 接收日期: 2023-03-31

基金项目: 国家自然科学基金资助 (11801065).

作者简介: 赵鑫铭 (1996-), 女, 研究生, 辽宁本溪, 主要研究方向: 微分几何.

通讯作者: 钱金花 (1979-), 女, 副教授, 河北唐山, 主要研究方向: 微分几何.

空或者类时曲线的曲率  $\kappa(s)$  和挠率  $\tau(s)$  满足

$$\tau(s) = a\kappa^\lambda(s) (a \neq 0, \lambda \in \mathbb{R})$$

时,  $\lambda$  取不同值时曲线的曲率所满足的特殊微分方程, 如当  $\lambda = 0$ , 即类空或者类时曲线具有常挠率时, 其曲率满足第二 Painlevé 方程.

## 2 预备知识

本节主要回顾仿射空间以及 Minkowski 空间中曲线的基本理论.

### 2.1 仿射空间中曲线的基本理论

设  $\mathbb{A}^{n+1}$  是  $n+1$  维仿射空间, 其内积定义为

$$(x, y)_\delta = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i x_i y_i,$$

这里  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}$ ,  $\delta_i = \pm 1$ . 特别地, 当  $\delta_i = 1$  时,  $\mathbb{A}^{n+1}$  即为  $n+1$  维欧氏空间; 当  $\delta_i$  中有一个取值为  $-1$  时,  $\mathbb{A}^{n+1}$  即为  $n+1$  维 Minkowski 空间.

设  $\mathbf{x}(t)$  是  $\mathbb{A}^{n+1}$  中的任意一条曲线, 则

$$ds = \left| \frac{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(s), \mathbf{x}^{(n+1)}(s)]}{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(s), \mathbf{x}(s)]} \right|^{\frac{1}{n+1}} dt$$

是  $\mathbf{x}(t)$  的一个中心仿射不变量, 其中  $[\dots]$  表示  $\mathbb{A}^{n+1}$  中的标准行列式,  $t$  为一般参数. 根据此中心仿射不变量, 有如下引理

**引理 2.1** <sup>[4]</sup> 设  $\mathbf{x}(s)$  是二维仿射空间  $\mathbb{A}^2$  中任意一条正则曲线. 若

$$\frac{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s)]}{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}(s)]} = \varepsilon_0 = \pm 1,$$

则称  $s$  为  $\mathbf{x}(s)$  的中心仿射弧长参数, 此时曲线  $\mathbf{x}(s)$  满足如下 Frenet 公式

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(s) = \mathbf{e}_1(s), \\ \mathbf{x}''(s) = \kappa_1(s)\mathbf{e}_1(s) + \varepsilon_0\mathbf{x}(s), \end{cases}$$

这里  $\kappa_1(s)$  称为  $\mathbf{x}(s)$  的中心仿射曲率, 它可以表示为

$$\kappa_1(s) = \frac{[\mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s)]}{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}(s)]}.$$

**引理 2.2** <sup>[4]</sup> 设  $\mathbf{x}(s)$  是三维仿射空间  $\mathbb{A}^3$  中任意一条正则曲线. 若

$$\frac{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)]}{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s)]} = \varepsilon_0 = \pm 1,$$

则称  $s$  为  $\boldsymbol{x}(s)$  的中心仿射弧长参数, 此时曲线  $\boldsymbol{x}(s)$  满足如下 Frenet 公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(s) = \boldsymbol{e}_1(s), \\ \boldsymbol{x}''(s) = \boldsymbol{e}_2(s), \\ \boldsymbol{x}'''(s) = \kappa_1(s)\boldsymbol{e}_1(s) + \kappa_2(s)\boldsymbol{e}_2(s) + \varepsilon_0\boldsymbol{x}(s), \end{cases}$$

这里  $\kappa_1(s)$  称为  $\boldsymbol{x}(s)$  的中心仿射曲率,  $\kappa_2(s)$  称为  $\boldsymbol{x}(s)$  的中心仿射挠率, 它们可以分别表示为

$$\kappa_1(s) = \frac{[\boldsymbol{x}'''(s), \boldsymbol{x}''(s), \boldsymbol{x}(s)]}{[\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}''(s), \boldsymbol{x}(s)]}, \quad \kappa_2(s) = \frac{[\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}'''(s), \boldsymbol{x}(s)]}{[\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}''(s), \boldsymbol{x}(s)]}.$$

## 2.2 Minkowski 空间中类空和类时曲线的基本理论

设  $\mathbb{E}_1^{n+1}$  是  $n+1$  维 Minkowski 空间, 其内积定义为

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2.$$

对于  $\mathbb{E}_1^{n+1}$  中的非零向量  $\boldsymbol{v}$ , 如果  $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ , 称  $\boldsymbol{v}$  为类空向量; 如果  $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ , 称  $\boldsymbol{v}$  为类光向量; 如果  $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle < 0$ , 称  $\boldsymbol{v}$  为类时向量. 特别地, 规定零向量为类空向量.

**引理 2.3** <sup>[6]</sup> 设  $\boldsymbol{x}(s)$  是二维 Minkowski 空间  $\mathbb{E}_1^2$  中以  $s$  为弧长参数的正则曲线, 即  $|\langle \boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}'(s) \rangle| = 1$ , 则存在正交标架  $\{\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)\}$  满足如下的 Frenet 公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(s) = \boldsymbol{\alpha}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s), \\ \boldsymbol{\beta}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s), \end{cases}$$

这里  $\boldsymbol{\alpha}(s)$  和  $\boldsymbol{\beta}(s)$  分别表示  $\boldsymbol{x}(s)$  的切向量和法向量,  $\kappa(s)$  称为  $\boldsymbol{x}(s)$  的曲率, 且当  $\langle \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\alpha}(s) \rangle = 1$  时,  $\boldsymbol{x}(s)$  是类空曲线; 当  $\langle \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\alpha}(s) \rangle = -1$  时,  $\boldsymbol{x}(s)$  是类时曲线.

**引理 2.4** <sup>[6]</sup> 设  $\boldsymbol{x}(s)$  是三维 Minkowski 空间  $\mathbb{E}_1^3$  中以  $s$  为弧长参数的类空 (类时) 曲线, 即  $|\langle \boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}'(s) \rangle| = 1$ , 则存在正交标架  $\{\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)\}$  满足如下的 Frenet 公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(s) = \boldsymbol{\alpha}(s), \\ \boldsymbol{\alpha}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s), \\ \boldsymbol{\beta}'(s) = -\varepsilon\tilde{\varepsilon}\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s) + \tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s), \\ \boldsymbol{\gamma}'(s) = \varepsilon\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s), \end{cases}$$

这里  $\boldsymbol{\alpha}(s)$ ,  $\boldsymbol{\beta}(s)$ ,  $\boldsymbol{\gamma}(s)$  分别是  $\boldsymbol{x}(s)$  的切向量, 主法向量和副法向量,  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$  分别称为  $\boldsymbol{x}(s)$  的曲率和挠率.  $\langle \boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\alpha}(s) \rangle = \varepsilon = \pm 1$ ,  $\langle \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\beta}(s) \rangle = \tilde{\varepsilon} = \pm 1$ ,  $\langle \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle = -\varepsilon\tilde{\varepsilon}$ . 且当  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$  时,  $\boldsymbol{x}(s)$  是第一类类空曲线; 当  $\varepsilon = 1, \tilde{\varepsilon} = -1$  时,  $\boldsymbol{x}(s)$  是第二类类空曲线; 当  $\varepsilon = -1, \tilde{\varepsilon} = 1$  时,  $\boldsymbol{x}(s)$  是类时曲线.

**注 2.5**  $\mathbb{E}_1^2$  中的类光曲线退化为直线.  $\mathbb{E}_1^3$  中的第三类类空曲线以及类光曲线, 由于它们的切向量或者法向量 (副法向量) 中含有类光向量, 其活动标架为渐近正交标架, 本文暂且不对它们进行相关讨论.

**注 2.6** 本文假设第一类 (第二类) 类空曲线以及类时曲线的中心仿射曲率 (曲率), 中心仿射挠率 (挠率) 均不为零. 这里 ' 表示仿射空间 (Minkowski 空间) 中的变量关于中心仿射弧长参数 (弧长参数) 的微分.

### 3 二维 Minkowski 空间中曲线的仿射性质

**定理 3.1** 设  $\boldsymbol{x}(s)$  是  $\mathbb{A}^2$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $\boldsymbol{x}(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^2$  中的类空 (类时) 曲线, 且以  $s$  为弧长参数, 则曲线  $\boldsymbol{x}(s)$  的中心仿射曲率  $\kappa_1(s)$  和  $\mathbb{E}_1^2$  中的曲率  $\kappa(s)$  之间满足

$$\kappa_1(s) = (\log |\kappa(s)|)'. \quad (3.1)$$

**证** 由引理 2.1 和引理 2.3, 曲线  $\boldsymbol{x}(s)$  的中心仿射曲率  $\kappa_1(s)$  为

$$\kappa_1(s) = \frac{[\boldsymbol{x}''(s), \boldsymbol{x}(s)]}{[\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}(s)]} = \frac{\kappa(s) [\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{x}(s)]}{[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{x}(s)]}, \quad (3.1)$$

且同时有

$$\varepsilon_0 = \frac{[\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}''(s)]}{[\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}(s)]} = \frac{\kappa(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)]}{[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{x}(s)]} = \pm 1. \quad (3.2)$$

由 (3.1) 式和 (3.2) 式, 显然有下面的等式

$$\kappa(s) [\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{x}(s)] = \kappa_1(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{x}(s)] \quad (3.3)$$

和

$$\kappa(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)] = \varepsilon_0 [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{x}(s)]. \quad (3.4)$$

在 (3.4) 式两端关于  $s$  求导, 可得

$$\kappa'(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)] + \kappa(s) [\boldsymbol{\alpha}'(s), \boldsymbol{\beta}(s)] + \kappa(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}'(s)] = \varepsilon_0 \{ [\boldsymbol{\alpha}'(s), \boldsymbol{x}(s)] + [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{x}'(s)] \}. \quad (3.5)$$

利用引理 2.3, (3.5) 式可以化简为

$$\kappa'(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)] = \varepsilon_0 \kappa(s) [\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{x}(s)], \quad (3.6)$$

进一步地, 根据 (3.3) 和 (3.4) 式, 我们有

$$\kappa'(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)] = \kappa_1(s) \kappa(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s)], \quad (3.7)$$

于是, 中心仿射曲率  $\kappa_1(s)$  和曲率  $\kappa(s)$  满足

$$\kappa_1(s) = \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} = (\log |\kappa(s)|)'. \quad (3.8)$$

**定理 3.2** 设  $\boldsymbol{x}(s)$  是  $\mathbb{A}^2$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $\boldsymbol{x}(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^2$  中的类空 (类时) 曲线, 且以  $s$  为弧长参数, 则曲线  $\boldsymbol{x}(s)$  在  $\mathbb{E}_1^2$  中的曲率  $\kappa(s)$  满足

$$\kappa(s) = C_2 e^{\int \sqrt{\kappa^2(s) - 2\varepsilon_0 \log |\kappa(s)| + C_1} ds}, \quad (\varepsilon_0 = \pm 1, C_1, 0 \neq C_2 \in \mathbb{R}).$$

证 根据定理 3.1 的证明, 在 (3.6) 式两端关于  $s$  求导, 有

$$\begin{aligned} & \kappa''(s) [\alpha(s), \beta(s)] + \kappa'(s) [\alpha'(s), \beta(s)] + \kappa'(s) [\alpha(s), \beta'(s)] \\ &= \varepsilon_0 \kappa'(s) [\beta(s), x(s)] + \varepsilon_0 \kappa(s) [\beta'(s), x(s)] + \varepsilon_0 \kappa(s) [\beta(s), x'(s)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

由引理 2.3, (3.9) 式可以化简为

$$\kappa''(s) [\alpha(s), \beta(s)] = \varepsilon_0 \kappa'(s) [\beta(s), x(s)] + \varepsilon_0 \kappa^2(s) [\alpha(s), x(s)] + \varepsilon_0 \kappa(s) [\beta(s), \alpha(s)], \quad (3.10)$$

此外, 根据 (3.3) 式和 (3.4) 式, 我们有

$$\kappa''(s) [\alpha(s), \beta(s)] = \frac{(\kappa'(s))^2 [\alpha(s), \beta(s)]}{\kappa(s)} + \kappa^3(s) [\alpha(s), \beta(s)] - \varepsilon_0 \kappa(s) [\alpha(s), \beta(s)], \quad (3.11)$$

由 (3.11) 式, 曲率  $\kappa(s)$  满足

$$\kappa''(s) = \frac{(\kappa'(s))^2}{\kappa(s)} + \kappa^3(s) - \varepsilon_0 \kappa(s),$$

即

$$(\log |\kappa(s)|)'' = \left( \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} \right)' = \kappa^2(s) - \varepsilon_0,$$

解上面的伯努利方程, 得

$$\kappa(s) = C_2 e^{\int \sqrt{\kappa^2(s) - 2\varepsilon_0 \log |\kappa(s)| + C_1} ds}, \quad (C_1, 0 \neq C_2 \in \mathbb{R}).$$

**推论 3.3** 设  $x(s)$  是  $\mathbb{A}^2$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $x(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^2$  中的类空 (类时) 曲线, 且以  $s$  为弧长参数, 则曲线  $x(s)$  的中心仿射标架和 Minkowski 空间中的正交标架之间满足

$$\begin{pmatrix} e_1(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon_0 (\log |\kappa(s)|)' & \varepsilon_0 \kappa(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \end{pmatrix}.$$

证 首先, 由已知条件, 显然  $e_1(s) = \alpha(s)$ . 其次, 由引理 2.1, 我们知道

$$\varepsilon_0 x(s) = x''(s) - \kappa_1(s) e_1(s),$$

由定理 3.1, 知  $\kappa_1(s) = (\log |\kappa(s)|)'$ . 于是, 我们有

$$\varepsilon_0 x(s) = \kappa(s) \beta(s) - (\log |\kappa(s)|)' \alpha(s),$$

即得曲线  $x(s)$  的中心仿射标架和 Minkowski 空间中的正交标架之间的关系.

#### 4 三维 Minkowski 空间中类空和类时曲线的仿射性质

**定理 4.1** 设  $x(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $x(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数, 则曲线  $x(s)$  的中心仿射曲率  $\kappa_1(s)$ 、中心仿射挠率  $\kappa_2(s)$  和  $\mathbb{E}_1^3$  中的曲率  $\kappa(s)$ 、挠率  $\tau(s)$  之间满足

$$1. \kappa_1(s) = (\log |\kappa(s)\tau(s)|)' (\log |\frac{\tau(s)}{(\kappa(s)\tau(s))'}|)' - \varepsilon\tilde{\varepsilon}\kappa^2(s) + \varepsilon\tau^2(s);$$

$$2. \kappa_2(s) = (\log |\kappa^2(s)\tau(s)|)',$$

这里, 当  $\mathbf{x}(s)$  是第一类类空曲线时,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是第二类类空曲线时,  $\varepsilon = 1, \tilde{\varepsilon} = -1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是类时曲线时,  $\varepsilon = -1, \tilde{\varepsilon} = 1$ .

由于三维 Minkowski 空间中第一类类空曲线、第二类类空曲线和类时曲线的仿射性质证明过程十分相似, 下面仅以第一类类空曲线的仿射性质为例证明, 另外两种曲线的仿射性质不再另作说明.

**证** 首先, 由引理 2.2 和引理 2.4, 曲线  $\mathbf{x}(s)$  的中心仿射曲率  $\kappa_1(s)$  和中心仿射挠率  $\kappa_2(s)$  为

$$\kappa_1(s) = \frac{[\mathbf{x}'''(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s)]}{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s)]} = -\kappa^2(s) + \frac{\kappa(s)\tau(s) [\boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}(s)]}{[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}(s)]} \quad (4.1)$$

和

$$\kappa_2(s) = \frac{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}'''(s), \mathbf{x}(s)]}{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s)]} = \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} + \frac{\tau(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{x}(s)]}{[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}(s)]}, \quad (4.2)$$

且同时有

$$\varepsilon_0 = \frac{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'''(s)]}{[\mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}(s)]} = \frac{\kappa(s)\tau(s) [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)]}{[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}(s)]} = \pm 1. \quad (4.3)$$

由 (4.3) 式, 显然有下面的等式

$$\kappa(s)\tau(s)[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)] = \varepsilon_0[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}(s)], \quad (4.4)$$

在 (4.4) 式两端关于  $s$  求两次导, 有

$$\begin{aligned} & (\kappa(s)\tau(s))'[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)] + \kappa(s)\tau(s)([\boldsymbol{\alpha}'(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)] + [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}'(s), \boldsymbol{\gamma}(s)] + [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}'(s)]) \\ & = \varepsilon_0([\boldsymbol{\alpha}'(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}(s)] + [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}'(s), \mathbf{x}(s)] + [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}'(s)]) \end{aligned} \quad (4.5)$$

和

$$\begin{aligned} & (\kappa(s)\tau(s))''[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)] + (\kappa(s)\tau(s))' \{[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)]\}' \\ & = \varepsilon_0\tau'(s)[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{x}(s)] + \varepsilon_0\tau(s)([\boldsymbol{\alpha}'(s), \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{x}(s)] + [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\gamma}'(s), \mathbf{x}(s)] + [\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{x}'(s)]). \end{aligned} \quad (4.6)$$

利用引理 2.4, (4.5) 式和 (4.6) 式可以化简为

$$(\kappa(s)\tau(s))'[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)] = \varepsilon_0\tau(s)[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{x}(s)] \quad (4.7)$$

和

$$\begin{aligned} & (\kappa(s)\tau(s))''[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s)] \\ & = \varepsilon_0\tau'(s)[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{x}(s)] + \varepsilon_0\kappa(s)\tau(s)[\boldsymbol{\beta}(s), \boldsymbol{\gamma}(s), \mathbf{x}(s)] + \varepsilon_0\tau^2(s)[\boldsymbol{\alpha}(s), \boldsymbol{\beta}(s), \mathbf{x}(s)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

把 (4.4) 式和 (4.7) 式代入到 (4.8) 式, 我们有

$$\varepsilon_0[\beta(s), \gamma(s), x(s)] = \left\{ \frac{(\kappa(s)\tau(s))''}{\kappa(s)\tau(s)} - \frac{\tau'(s)}{\tau(s)} \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\kappa(s)\tau(s)} - \tau^2(s) \right\} [\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)]. \quad (4.9)$$

把 (4.4), (4.7) 和 (4.9) 式代入 (4.1) 和 (4.2) 式中, 得到

$$\begin{aligned} \kappa_1(s) &= - \left[ \frac{(\kappa(s)\tau(s))''}{\kappa(s)\tau(s)} - \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\kappa(s)\tau(s)} \frac{\tau'(s)}{\tau(s)} + \kappa^2(s) - \tau^2(s) \right], \\ &= (\log |\kappa(s)\tau(s)|)' (\log |\frac{\tau(s)}{(\kappa(s)\tau(s))'}|)' - \kappa^2(s) + \tau^2(s) \end{aligned} \quad (4.10)$$

和

$$\kappa_2(s) = \frac{\kappa'(s)}{\kappa(s)} + \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\kappa(s)\tau(s)} = (\log |\kappa^2(s)\tau(s)|)'. \quad (4.11)$$

**定理 4.2** 设  $x(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $x(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数, 则曲线  $x(s)$  在  $\mathbb{E}_1^3$  中的曲率  $\kappa(s)$ , 挠率  $\tau(s)$  满足

$$\varepsilon \tilde{\varepsilon} \kappa^2(s) (\log |\kappa(s)\tau(s)|)' + [(\log |\kappa(s)\tau(s)|)' (\log |\frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\tau(s)}|)']' - \varepsilon (\tau^2(s))' = \varepsilon_0, (\varepsilon_0 = \pm 1)$$

这里, 当  $x(s)$  是第一类类空曲线时,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$ ; 当  $x(s)$  是第二类类空曲线时,  $\varepsilon = 1, \tilde{\varepsilon} = -1$ ; 当  $x(s)$  是类时曲线时,  $\varepsilon = -1, \tilde{\varepsilon} = 1$ .

**证** 由定理 4.1 的证明, 在 (4.9) 式两端关于  $s$  求导, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \{ [\beta'(s), \gamma(s), x(s)] + [\beta(s), \gamma'(s), x(s)] + [\beta(s), \gamma(s), x'(s)] \} = \\ \left\{ \frac{(\kappa(s)\tau(s))''}{\kappa(s)\tau(s)} - \frac{\tau'(s)}{\tau(s)} \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\kappa(s)\tau(s)} - \tau^2(s) \right\}' [\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)] + \\ \left\{ \frac{(\kappa(s)\tau(s))''}{\kappa(s)\tau(s)} - \frac{\tau'(s)}{\tau(s)} \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\kappa(s)\tau(s)} - \tau^2(s) \right\} \{ [\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)] \}' . \end{aligned} \quad (4.12)$$

利用引理 2.4, (4.12) 式可以化简为

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} (\kappa(s)\tau(s))' - [\tau^2(s)]' + \left[ \frac{(\kappa(s)\tau(s))''}{\kappa(s)\tau(s)} - \frac{\tau'(s)}{\tau(s)} \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\kappa(s)\tau(s)} \right]' = \varepsilon_0, \quad (4.13)$$

即

$$\kappa^2(s) (\log |\kappa(s)\tau(s)|)' + [(\log |\kappa(s)\tau(s)|)' (\log |\frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\tau(s)}|)']' - (\tau^2(s))' = \varepsilon_0, \quad (\varepsilon_0 = \pm 1). \quad (4.14)$$

**推论 4.3** 设  $x(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $x(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数, 则曲线  $x(s)$  的中心仿射标架和 Minkowski 空间中的正交标架之间满足

$$\begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ x(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon_0 [(\log |\tau(s)|)' (\log |\kappa(s)\tau(s)|)' + \varepsilon \tau^2(s)] & -\varepsilon_0 \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\tau(s)} & \varepsilon_0 \kappa(s)\tau(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ \beta(s) \\ \gamma(s) \end{pmatrix},$$

这里  $\kappa(s)$ ,  $\tau(s)$  为曲线  $\mathbf{x}(s)$  的曲率和挠率. 其中, 当  $\mathbf{x}(s)$  是第一类 (第二类) 类空曲线时,  $\varepsilon = 1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是类时曲线时,  $\varepsilon = -1, \varepsilon_0 = \pm 1$ .

证 首先, 由已知条件, 显然  $\mathbf{e}_1(s) = \boldsymbol{\alpha}(s)$ . 其次, 由引理 2.2, 有

$$\mathbf{e}_2(s) = \mathbf{x}''(s) = \kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s).$$

最后, 由引理 2.2 和定理 4.1, 有

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}'''(s) - \kappa_1(s)\mathbf{e}_1(s) - \kappa_2(s)\mathbf{e}_2(s), \\ &= \mathbf{x}'''(s) - \kappa_1(s)\mathbf{x}'(s) - \kappa_2(s)\mathbf{x}''(s), \\ &= \left(-\frac{(\tau(s))'}{\tau(s)} \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\kappa(s)\tau(s)} - \tau^2(s)\right)\boldsymbol{\alpha}(s) - \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\tau(s)}\boldsymbol{\beta}(s) + \kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s), \\ &= -[(\log |\tau(s)|)'(\log |\kappa(s)\tau(s)|)' + \tau^2(s)]\boldsymbol{\alpha}(s) - \frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\tau(s)}\boldsymbol{\beta}(s) + \kappa(s)\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s), \end{aligned}$$

即得曲线  $\mathbf{x}(s)$  的中心仿射标架和 Minkowski 空间中正交标架之间满足的关系.

进一步地, 根据定理 4.2 得到的结论, 讨论当曲线  $\mathbf{x}(s)$  的曲率和挠率满足

$$\tau(s) = a\kappa^\lambda(s), (a \neq 0, \lambda \in \mathbb{R})$$

时, 第一类 (第二类) 类空或类时曲线的曲率  $\kappa(s)$  所满足的微分方程.

**定理 4.4** 设  $\mathbf{x}(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $\mathbf{x}(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数. 当  $\tau(s) = a\kappa^\lambda(s)$ , ( $a \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ) 时, 曲线  $\mathbf{x}(s)$  的曲率  $\kappa(s)$  满足如下两种情况

1. 当  $\lambda \neq -1$  时, 曲率  $\kappa(s)$  满足

$$\kappa''(s) + \frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{2}\kappa^3(s) - \frac{\varepsilon a^2}{\lambda+1}\kappa^{2\lambda+1}(s) - \frac{\varepsilon_0}{\lambda+1}s\kappa(s) = 0.$$

2. 当  $\lambda = -1$  时, 曲率  $\kappa(s)$  满足

$$\kappa^2(s) = \frac{a^2}{s}.$$

其中, 当  $\mathbf{x}(s)$  是第一类类空曲线时,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是第二类类空曲线时,  $\varepsilon = 1, \tilde{\varepsilon} = -1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是类时曲线时,  $\varepsilon = -1, \tilde{\varepsilon} = 1, \varepsilon_0 = \pm 1$ .

证 由定理 4.2 知道, 当  $\mathbf{x}(s)$  作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数时, 曲线  $\mathbf{x}(s)$  的曲率  $\kappa(s)$  和挠率  $\tau(s)$  满足

$$\varepsilon\tilde{\varepsilon}\kappa^2(s)(\log |\kappa(s)\tau(s)|)' + \left[(\log |\kappa(s)\tau(s)|)'(\log \left|\frac{(\kappa(s)\tau(s))'}{\tau(s)}\right|)'\right]' - \varepsilon(\tau^2(s))' = \varepsilon_0, \quad (4.15)$$

其中, 当  $\mathbf{x}(s)$  是第一类类空曲线时,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是第二类类空曲线时,  $\varepsilon = 1, \tilde{\varepsilon} = -1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是类时曲线时,  $\varepsilon = -1, \tilde{\varepsilon} = 1, \varepsilon_0 = \pm 1$ .

当  $\tau(s) = a\kappa^\lambda(s)$  时, (4.15) 式可以进一步整理为

$$\varepsilon\tilde{\varepsilon}\frac{\lambda+1}{2}(\kappa^2(s))' - a^2\varepsilon(\kappa^{2\lambda}(s))' + (\lambda+1)\left(\frac{\kappa''(s)}{\kappa(s)}\right)' = \varepsilon_0. \quad (4.16)$$

在 (4.16) 式两端关于弧长  $s$  积分, 可得

$$-a^2\varepsilon\kappa^{2\lambda}(s) + (\lambda+1)\left\{\varepsilon\tilde{\varepsilon}\frac{\kappa^2(s)}{2} + \frac{\kappa''(s)}{\kappa(s)}\right\} = \varepsilon_0s + c, (c \in \mathbb{R}).$$

经过适当的平移变换, 即  $\varepsilon_0s + c \rightarrow \varepsilon_0s$ , 可得如下两种情况

1. 当  $\lambda \neq -1$  时, 曲率  $\kappa(s)$  满足

$$\kappa''(s) + \frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{2}\kappa^3(s) - \frac{\varepsilon a^2}{\lambda+1}\kappa^{2\lambda+1}(s) - \frac{\varepsilon_0}{\lambda+1}s\kappa(s) = 0. \quad (4.17)$$

2. 当  $\lambda = -1$  时, 曲率  $\kappa(s)$  满足

$$\kappa^2(s) = \frac{a^2}{s}. \quad (4.18)$$

**推论 4.5** 设  $\mathbf{x}(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $\mathbf{x}(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类(第二类)类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数. 当  $\kappa(s)\tau(s) = a$ , ( $a \neq 0$ ) 时, 有如下结论

1.  $\mathbf{x}(s)$  是从切曲线.

2.  $\mathbf{x}(s)$  的中心仿射曲率  $\kappa_1(s)$  和中心仿射挠率  $\kappa_2(s)$  分别为

$$\kappa_1(s) = \frac{-\varepsilon\tilde{\varepsilon}a^2}{s} + \varepsilon s, \quad \kappa_2(s) = -\frac{1}{2s},$$

其中, 当  $\mathbf{x}(s)$  是第一类类空曲线时,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是第二类类空曲线时,  $\varepsilon = 1, \tilde{\varepsilon} = -1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是类时曲线时,  $\varepsilon = -1, \tilde{\varepsilon} = 1$ .

**证** 首先, 当  $\kappa(s)\tau(s) = a$ , ( $a \neq 0$ ) 时, 由 (4.18) 式知曲率  $\kappa(s)$  和挠率  $\tau(s)$  满足

$$\kappa(s) = \pm as^{-\frac{1}{2}}, \tau(s) = \pm s^{\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

此时, 显然有

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = a^{-1}s,$$

由参考文献 [7,8] 知曲线  $\mathbf{x}(s)$  是从切曲线.

其次, 将 (4.18) 式代入到定理 4.1 的表达式中, 我们有

$$\kappa_1(s) = (\log |\kappa(s)\tau(s)|)' (\log |\frac{\tau(s)}{\kappa(s)\tau(s)}|)' - \varepsilon\tilde{\varepsilon}\kappa^2(s) + \varepsilon\tau^2(s) = -\varepsilon\tilde{\varepsilon}a^2s^{-1} + \varepsilon s \quad (4.20)$$

和

$$\kappa_2(s) = (\log |\kappa^2(s)\tau(s)|)' = -\frac{1}{2}s^{-1}, \quad (4.21)$$

其中, 当  $\mathbf{x}(s)$  是第一类类空曲线时,  $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} = 1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是第二类类空曲线时,  $\varepsilon = 1, \tilde{\varepsilon} = -1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是类时曲线时,  $\varepsilon = -1, \tilde{\varepsilon} = 1$ .

**推论 4.6** 设  $\mathbf{x}(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $\mathbf{x}(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数. 当  $\kappa(s)\tau^2(s) = a^2$ , ( $a \neq 0$ ) 时, 曲率  $\kappa(s)$  满足的方程可以转化为第二 Painlevé 方程

$$y''(t) = 2y^3(t) + ty(t) - \frac{\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 a^2}{2}.$$

证 当  $\kappa(s)\tau^2(s) = a^2$ , ( $a \neq 0$ ) 时, (4.17) 式即为

$$\kappa''(s) + \frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{2}\kappa^3(s) - 2\varepsilon_0 s\kappa(s) - 2\varepsilon a^2 = 0. \quad (4.22)$$

对 (4.22) 式作如下变换

$$\kappa(s) = -2^{\frac{4}{3}}\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}y(t), \quad s = 2^{-\frac{1}{3}}\varepsilon_0 t.$$

即可得第二 Painlevé 方程 [9], 2.8.1-1.2, p448, 即

$$y''(t) = 2y^3(t) + ty(t) - \frac{\tilde{\varepsilon}\varepsilon_0 a^2}{2},$$

其中, 当  $\mathbf{x}(s)$  是第一类类空曲线和类时曲线时,  $\tilde{\varepsilon} = 1$ ; 当  $\mathbf{x}(s)$  是第二类类空曲线时,  $\tilde{\varepsilon} = -1$ ,  $\varepsilon_0 = \pm 1$ .

**推论 4.7** 设  $\mathbf{x}(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $\mathbf{x}(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数. 当  $\tau(s) = a$ , ( $a \neq 0$ ) 时, 曲率  $\kappa(s)$  满足的方程可以转化为第二 Painlevé 方程

$$y''(t) + 2t^3 + ty(t) = 0.$$

证 当  $\tau(s) = a$ , ( $a \neq 0$ ) 时, (4.17) 式即为

$$\kappa''(s) + \frac{\varepsilon\tilde{\varepsilon}}{2}\kappa^3(s) - (a^2\varepsilon + \varepsilon_0 s)\kappa(s) = 0. \quad (4.23)$$

对 (4.23) 式作如下变换

$$\kappa(s) = 2\varepsilon\tilde{\varepsilon}y(t), \quad t = \varepsilon_0 s - a^2\varepsilon.$$

即可得第二 Painlevé 方程 [9], 2.8.1-1.2, p448, 为

$$y''(t) + 2t^3 + ty(t) = 0.$$

**推论 4.8** 设  $\mathbf{x}(s)$  是  $\mathbb{A}^3$  中以  $s$  为中心仿射弧长的曲线. 如果  $\mathbf{x}(s)$  同时作为  $\mathbb{E}_1^3$  中的第一类 (第二类) 类空或类时曲线, 且以  $s$  为弧长参数. 当  $\tau(s) = a\kappa(s)$ , ( $a \neq 0$ ) 时, 曲率  $\kappa(s)$  满足的方程可以转化为第二 Painlevé 方程

$$\begin{cases} y_1''(t) = ty_1(t) \pm 2y_1^3(t), \\ y_2''(t) = -ty_2(t) \pm 2y_2^3(t). \end{cases}$$

证 当  $\tau(s) = a\kappa(s)$  时, (4.17) 式即为

$$\kappa''(s) + \frac{\varepsilon}{2} (\tilde{\varepsilon} - a^2) \kappa^3(s) - \frac{\varepsilon_0}{2} s\kappa(s) = 0. \quad (4.24)$$

对 (4.24) 式作如下变换

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \frac{\mp 2^{\frac{4}{3}} \varepsilon_0 \varepsilon}{\sqrt{\tilde{\varepsilon} - a^2}} y_1(t), & s &= 2^{-\frac{1}{3}} \varepsilon_0 t. \\ \kappa(s) &= \frac{\mp 2^{\frac{4}{3}} \varepsilon_0 \varepsilon}{\sqrt{\tilde{\varepsilon} - a^2}} y_2(t), & s &= -2^{-\frac{1}{3}} \varepsilon_0 t. \end{aligned}$$

即可得第二 Painlevé 方程 [9], 2.4.2-103, p357, 为

$$\begin{cases} y_1''(t) = ty_1(t) \pm 2y_1^3(t), \\ y_2''(t) = -ty_2(t) \pm 2y_2^3(t). \end{cases}$$

特别地, 当  $a=1$  时,  $\kappa(s) = \tau(s)$ , 若  $\mathbf{x}(s)$  为三维 Minkowski 空间中的第一类类空曲线或者类时曲线, 则有  $\tilde{\varepsilon} = 1$ , 那么 (4.24) 式为

$$\kappa''(s) + \frac{1}{2} s\kappa(s) = 0.$$

此时方程的解如下

$$\kappa(s) = \begin{cases} c_1 \sqrt{s} J_{\frac{1}{3}} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} s^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 \sqrt{s} Y_{\frac{1}{3}} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} s^{\frac{3}{2}} \right), \\ c_1 \sqrt{s} I_{\frac{1}{3}} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} s^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 \sqrt{s} K_{\frac{1}{3}} \left( \frac{\sqrt{2}}{3} s^{\frac{3}{2}} \right). \end{cases}$$

这里,  $J_{\frac{1}{3}}(s)$ ,  $Y_{\frac{1}{3}}(s)$ ,  $I_{\frac{1}{3}}(s)$ ,  $K_{\frac{1}{3}}(s)$  分别是第一类, 第二类, 改进后的第一类, 改进后的第二类 Bessel 函数 [9], 2.1.2-7, p237.

### 参 考 文 献

- [1] Michael Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry(V.II & III)[M]. Wilmington, Delaware: Publish or Perish, 1979.
- [2] Nadjafikhah M, Shirayeh A M. Affine classification of n-curves[J]. Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 2007, 13(2): 66-73.
- [3] Nadjafikhah M, Shirayeh A M. Classification of curves in affine geometry[J]. Journal Of Differential Geometry, 2011, 13: 191-200.
- [4] Liu Hui Li. Curves in Affine and Semi-Euclidean spaces[J]. Results in Mathematics, 2014, 65(1-2): 235-249.
- [5] 邓爽. 三维空间中的一些特殊曲线 [D]. 东北大学, 2016.
- [6] Qian J, Kim Y H. Directional associated curves of a null curve in Minkowski 3-space[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(1): 183-200.
- [7] Chen B Y. When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane[J]. The American Mathematical Monthly, 2003, 110(2): 147-152.

- [8] Ilarslan K, Nesovic E, Petrovic-Torgasev M. Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space[J]. Novi Sad Journal of Mathematics, 2003, 33(2): 23–32.
- [9] Polyanin A D, Zaitsev V F. Handbook of ordinary differential equations: exact solutions, methods, and problems[M]. CRC Press, 2017.

## AFFINE PROPERTIES OF SPACELIKE AND TIMELIKE CURVES

ZHAO Xin-ming, WANG Yi-meng, LIU Hui-li, QIAN Jin-hua

(College of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

**Abstract:** In this paper, we mainly study the problem of the centroaffine curvature, the centroaffine torsion, the curvature and torsion of the curve and the relationship between the orthogonal frame and affine frame of two classes of curves. Based on the fundamental curve theories in affine space and Minkowski space, the affine properties of spacelike and timelike curves are discussed when the arclength of spacelike and timelike curves are same as the affine arclength. According to the obtained conclusions, the special differential equations which are satisfied by the curvature of spacelike and timelike curves are discussed through variable substitution when the curvature  $\kappa(s)$  and torsion  $\tau(s)$  satisfying  $\tau(s) = a\kappa^\lambda(s)$ , ( $a \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ ).

**Keywords:** affine space; Minkowski space; arclength; curvature; torsion

**2010 MR Subject Classification:** 53A15; 53C50; 34A05