Vol. 43 (2023)
No. 5

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

常微分方程周期脉冲控制问题的均方 turnpike 性质

闫奇姝, 赵　睿

(河北工业大学理学院, 天津 300401)

摘 要:　本文研究了一类常微分方程的最优控制问题, 其中控制以脉冲的形式周期地施加到系统中. 首先, 给出了该问题及其参考控制问题的最大值原理. 其次, 在控制系统能控的假设条件下, 证明了系统的能观性不等式. 最后, 利用最大值原理以及能观性不等式, 获得了两个最优控制问题的最优状态和最优控制在时间足够长时的收敛关系 — 均方 turnpike 性质.

关键词:　周期脉冲控制系统; turnpike 性质; 最大值原理

MR(2010) **主题分类号:**　49J15; 49K15　　　　**中图分类号:**　O231.1

文献标识码:　A　　　　**文章编号:**　0255-7797(2023)05-0447-12

1 引言

Turnpike 性质的研究源自于经济学领域. 简单来说, turnpike 性质就是我们可以根据系统所研究的最优控制问题来设置相应的参考系统及控制问题, 进而得到最优解的近似描述. 近些年来, 许多学者研究了连续控制系统的最优控制问题的 turnpike 性质. 例如, Porretta 和 Zuazua 在 [1] 中针对线性系统提出在能控和能观的假设条件下, 最优解在足够大的时间范围内保持指数接近于参考控制问题的最优解, 并把这种定量行为称作指数 turnpike 性质. 此外, 在 [2] 中, 作者提出在适当的能控性条件和其他的假设下, 可以建立非线性控制系统的有限维最优控制问题的局部指数 turnpike 性质. 在 [3] 中, 作者指出 [1] 和 [2] 中的参考问题需要满足一些稳定性条件, 为此作者放宽约束条件, 提出了松弛最优控制问题并证明了松弛最优控制问题的积分 turnpike 性质与均方 turnpike 性质.

脉冲控制是一种非常重要的控制方式. 在许多情况下, 脉冲控制可以提供一种有效的方法来处理无法承受连续控制输入的系统, 具有非常广泛的应用 (参考 [4]–[6]). 关于脉冲控制系统的一些常用理论可参考 [7]–[12]. 本文在已有理论的基础上, 针对一类常微分方程周期脉冲控制系统的最优控制问题, 提出了相应的控制问题作为参考, 并利用两个问题的最大值原理得到了最优控制问题的均方 turnpike 性质以及最优控制的近似估计.

1.1 控制问题

在本文中, 我们用 $\mathbb{N}^+$ 表示全体正整数的集合; $\mathbb{N}$ 表示全体自然数的集合; $M^\top$ 表示矩阵 M 的转置; $\sigma(M)$ 表示矩阵 M 的全体特征值的集合. 给定 $T_0>0$, $0<\tau<T_0$, 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$,

*收稿日期: 2022-09-29　　　**接收日期:** 2022-10-21

基金项目: 河北省自然科学基金资助 (A2020202033); 河北省研究生创新资助项目基金资助 (CXZZSS2022056).

作者简介: 闫奇姝 (1986–), 女, 吉林农安, 讲师, 主要研究方向: 微分方程的控制理论.

通讯作者: 赵睿 (1999–), 女, 吉林吉林, 研究生, 主要研究方向: 微分方程的控制理论.

$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ (其中 n, $m\in\mathbb{N}^+$). 本文考虑以 T_0 为周期的常微分方程脉冲控制系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dy(t)}{dt}=Ay(t), & t\in[0,+\infty]\backslash\{\tau+kT_0\}_{k\in\mathbb{N}},\\ y(\tau+kT_0)=y^-(\tau+kT_0)+Bu_k, & k\in\mathbb{N},\\ y(0)=y_0.\end{cases}\tag{1.1}$$

在该系统中, $y_0\in\mathbb{R}^n$ 是系统的初始状态, $u=(u_k)_{k\in\mathbb{N}}\in l^2(\mathbb{N};\mathbb{R}^m)$ 为系统的控制, 控制以脉冲的形式在时刻 $\tau+kT_0$ $(k\in\mathbb{N})$ 加入到系统中. 在这里以及本文中, 我们用 $y^-(t)$ 表示函数 $y(\cdot)$ 在 t 时刻的左极限, 将系统 (1.1) 的解记为 $y(\cdot;u)$.

首先, 我们介绍本文要考虑的长时间最优控制问题. 设 $z\in\mathbb{R}^n$. 任给 $T>T_0$, 记

$$N_T:=\max\{k\in\mathbb{N}\ :\ \tau+kT_0\le T\}\text{ 及 }\Lambda_T:=\{0,1,...,N_T\}.$$

对于任意的 $u=(u_k)_{k\in\Lambda_T}\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$, 我们将方程 (1.1) 限制在 $[0,T]$ 上的解仍记为 $y(\cdot;u)$. 设目标泛函 $J^T(\cdot):l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}$ 按照如下方式定义:

$$J^T(u):=\int_0^T\|y(t;u)-z\|^2_{\mathbb{R}^n}dt+\sum_{k=0}^{N_T}\|u_k\|^2_{\mathbb{R}^m},\ \ \forall\,u=(u_k)_{k\in\Lambda_T}\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m).$$

长时间最优控制问题 (P_T): 寻找最优控制 $u^T\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$, 使得 $J^T(u^T)=\inf_{u\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)}J^T(u)$. 相应地, 我们称 $y(\cdot;u^T)$ 是问题 (P_T) 的最优状态, 简记为 $y^T(\cdot)$.

其次, 我们介绍 $[0,T_0]$ 上的周期最优控制问题. 考虑系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t), & t\in[0,T_0]\backslash\{\tau\},\\ x(\tau)=x^-(\tau)+Bu,\\ x(0)=x(T_0),\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $u\in\mathbb{R}^m$ 是系统的控制. 在本文中, 我们假设系统 (1.2) 总有唯一的解, 记为 $x(\cdot;u)$(见注 1.2). 设目标泛函 $J^0(\cdot):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 按照如下方式定义:

$$J^0(u):=\int_0^{T_0}\|x(t;u)-z\|^2_{\mathbb{R}^n}dt+\|u\|^2_{\mathbb{R}^m},\ \ \forall\,u\in\mathbb{R}^m.$$

周期最优控制问题 (P_0): 寻找最优控制 $u^0\in\mathbb{R}^m$ 使得 $J^0(u^0)=\inf_{u\in\mathbb{R}^m}J^0(u)$. 相应地, 我们称 $x(\cdot;u^0)$ 是问题 (P_0) 的最优状态, 简记为 $x^0(\cdot)$.

1.2 主要结果

我们将问题 (P_0) 的最优状态 $x^0(\cdot)$ 以 T_0 为周期延拓至 $[0,+\infty)$ 上, 仍记为 $x^0(\cdot)$, 即它满足方程:

$$\begin{cases}\dfrac{dx^0(t)}{dt}=Ax^0(t), & t\in[0,T]\backslash\{\tau+kT_0\}_{k\in\mathbb{N}},\\ x^0(\tau+kT_0)=x^{0^-}(\tau+kT_0)+Bu^0, & k\in\mathbb{N},\\ x^0(kT_0)=x^0((k+1)T_0), & k\in\mathbb{N}.\end{cases}\tag{1.3}$$

本文的主要结果为下面的定理 1.1.

定理 1.1 假设

(i) 任给 $u \in \mathbb{R}^m$, 系统 (1.2) 都有唯一的解,

(ii) 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\operatorname{rank}\{e^{-A\tau}B, e^{-A(\tau+T_0)}B, \cdots, e^{-A(\tau+N_0T_0)}B\} = n$,

那么

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \|y^T(t) - x^0(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt = 0,$$

并且

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{N_T+1}\sum_{k=0}^{N_T} \|u_k^T - u^0\|_{\mathbb{R}^m}^2 = 0.$$

注 1.1 [4] 当 $T \to \infty$ 时, 若 $\frac{1}{T}\int_0^T \|y^T(t) - x^0(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt \to 0$, 我们就称问题 (P_T) 具有均方 turnpike 性质.

注 1.2 事实上, 我们可以给出一些条件, 使得任给 $u \in \mathbb{R}^m$, 系统 (1.2) 均有唯一的解. 例如, 假设任意 $\lambda \in \sigma(A)$, 均满足 $\mathrm{Re}\lambda < 0$, 并且 T_0 充分大. 此时, 我们考虑方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dz(t)}{dt} = Az(t), & t \in [0, T_0]\backslash\{\tau\}, \\ z(\tau) = z^-(\tau) + Bu, \\ z(0) = d_0, \end{cases} \tag{1.4}$$

任给 $d_0 \in \mathbb{R}^n$ 以及 $u \in \mathbb{R}^m$, 方程 (1.4) 均有唯一的解, 记为 $z(\cdot; u, d_0)$.

设 $S_u(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 按照如下方式定义:

$$S_u(d_0) := z(T_0; u, d_0), \ \ \forall\, u \in \mathbb{R}^m.$$

任取 d_1, $d_2 \in \mathbb{R}^n$, 令 $h(t) = z(t; u, d_1) - z(t; u, d_2)$, $\forall\, t \in [0, T_0]$, 则 $h(\cdot)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dh(t)}{dt} = Ah(t), & t \in [0, T_0], \\ h(0) = d_1 - d_2. \end{cases}$$

那么 $h(t) = e^{At}(d_1 - d_2)$, $\forall\, t \in [0, T_0]$. 设 $\lambda_1 = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. 由假设可知, $\lambda_1 < 0$, 那么存在 $C > 0$, 使得

$$\|e^{At}d\|_{\mathbb{R}^n} \le Ce^{\frac{\lambda_1}{2}t}\|d\|_{\mathbb{R}^n}, \ \ \forall\, d \in \mathbb{R}^n.$$

因此, 只要 $T_0 > \max\{0, -\frac{2\ln C}{\lambda_1}\}$, 就有

$$\|S_u(d_1) - S_u(d_2)\|_{\mathbb{R}^n} = \|h(T_0)\|_{\mathbb{R}^n} \le \delta\|d_1 - d_2\|_{\mathbb{R}^n},$$

其中 $\delta = Ce^{\frac{\lambda_1}{2}T_0} < 1$. 根据压缩映射原理可知, 存在唯一的 $d_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $x(T_0; u, d_0) = d_0$. 故系统 (1.2) 在 $[0, T_0]$ 上有唯一解.

注 1.3 条件 (ii): 存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得 $\operatorname{rank}\{e^{-A\tau}B, e^{-A(\tau+T_0)}B, \cdots, e^{-A(\tau+N_0T_0)}B\} = n$. 一般称为能控性条件, 详情可参见 [13].

1.3 文章安排

本文剩余部分安排如下: 第 2 节介绍两个最优控制问题的最大值原理, 第 3 节给出定理 1.1 的证明.

2 问题 (P_T) 与问题 (P_0) 的最大值原理

定理 2.1 给定 $T > T_0$. 假设问题 (P_T) 的最优状态, 最优控制分别为 $y^T(\cdot)$ 和 $u^T = (u_k^T)_{k\in\Lambda_T}$, 那么存在伴随状态 $p^T(\cdot) \in C^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dp^T(t)}{dt} = -A^\top p^T(t) + y^T(t) - z, \quad t \in [0,T], \\ p^T(T) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

并且

$$u_k^T = B^\top p^T(\tau + kT_0), \ \ \forall\, k \in \Lambda_T. \tag{2.2}$$

证 由于 u^T 是问题 (P_T) 的最优控制, 因此对于任意的 $u = (u_k)_{k\in\Lambda_T} \in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$ 都有

$$\frac{J^T(u^T+\lambda u) - J^T(u^T)}{\lambda} \geq 0, \ \ \forall\, \lambda > 0,$$

即

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda}\int_0^T \left(\|y(t;u^T+\lambda u) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|y^T(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2\right) dt \\ &+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{N_T}\left(\|u_k^T + \lambda u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \|u_k^T\|_{\mathbb{R}^m}^2\right) \geq 0, \ \ \forall\, \lambda > 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

任意给定 $u = (u_k)_{k\in\Lambda_T} \in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$, 令

$$Y(t) = \frac{y(t;u^T+\lambda u) - y^T(t)}{\lambda}, \ \ \forall\, t \in [0,T],$$

则 $Y(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dY(t)}{dt} = AY(t), & t \in [0,T]\backslash\{\tau + kT_0\}_{k\in\Lambda_T}, \\ Y(\tau+kT_0) = Y^-(\tau+kT_0) + Bu_k, & k \in \Lambda_T, \\ Y(0) = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

将 $Y(t)$ 代入到 (2.3) 中可得

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^T \left(\|y^T(t) + \lambda Y(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2 - \|y^T(t) - z\|_{\mathbb{R}^n}^2\right) dt + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{N_T}\left(\|u_k^T + \lambda u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \|u_k^T\|_{\mathbb{R}^m}^2\right) \geq 0, \quad \forall\, \lambda > 0.$$

进一步计算可得

$$\int_0^T \left(\lambda\|Y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2+2\left\langle Y(t),y^T(t)-z\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\right)dt+\sum_{k=0}^{N_T}\left(\lambda\|u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2+2\left\langle u_k,u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\right)\geq 0,\forall\,\lambda>0.$$

令 $\lambda\to 0^+$, 则

$$\int_0^T \left\langle Y(t),y^T(t)-z\right\rangle_{\mathbb{R}^n}dt+\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle u_k,u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\geq 0.$$

由上式及 (2.1) 和 (2.4) 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left\langle Y(t),\frac{dp^T(t)}{dt}+A^\top p^T(t)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}dt+\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle u_k,u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\\
=&\ -\left\langle Y(0),p^T(0)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}+\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle Y^-(\tau+kT_0)-Y(\tau+kT_0),p^T(\tau+kT_0)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}\\
&+\left\langle Y(T),p^T(T)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}+\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle u_k,u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\\
=&\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle -Bu_k,p^T(\tau+kT_0)\right\rangle_{\mathbb{R}^n}+\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle u_k,u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\\
=&\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle u_k,-B^\top p^T(\tau+kT_0)+u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\\
\geq&\ 0.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

取 $v=(v_k)_{k\in\Lambda_T}=-u$, 由于 $u\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$ 是任取的, 故在上式中用 v 代替 u, 不等号仍成立, 即 $\sum\limits_{k=0}^{N_T}\left\langle v_k,-B^\top p^T(\tau+kT_0)+u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\geq 0$, 也即

$$\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle u_k,-B^\top p^T(\tau+kT_0)+u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}\leq 0.\tag{2.6}$$

由 (2.5) 及 (2.6) 可得, 对于任意的 $u=(u_k)_{k\in\Lambda_T}\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$ 都有

$$\sum_{k=0}^{N_T}\left\langle u_k,-B^\top p^T(\tau+kT_0)+u_k^T\right\rangle_{\mathbb{R}^m}=0,$$

故

$$u_k^T=B^\top p^T(\tau+kT_0),\ \ \forall\,k\in\Lambda_T.$$

定理 2.1 证明完毕.

定理 2.2 假设任给 $u\in\mathbb{R}^m$, 系统 (1.2) 均有唯一的解. 设问题 (P_0) 的最优状态, 最优控制分别为 $x^0(\cdot)$ 和 u^0, 那么存在伴随状态 $p^0(\cdot)\in C^1([0,T_0];\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{dp^0(t)}{dt}=-A^\top p^0(t)+x^0(t)-z, & t\in[0,T_0],\\ p^0(0)=p^0(T_0),\end{cases}\tag{2.7}$$

并且 $u^0 = B^\top p^0(\tau)$.

证 由于 u^0 是问题 (P_0) 的最优控制, 因此对于任意的 $u \in \mathbb{R}^m$ 都有

$$\frac{J^0(u^0+\lambda u)-J^0(u^0)}{\lambda} \geq 0, \ \ \forall\, \lambda > 0. \tag{2.8}$$

任意给定 $u \in \mathbb{R}^m$, 令

$$X(t) = \frac{x(t;u^0+\lambda u)-x^0(t)}{\lambda}, \ \ \forall\, t \in [0,T_0],$$

则 $X(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = AX(t), & t \in [0,T_0]\backslash\{\tau\}, \\ X(\tau) = X^-(\tau)+Bu, \\ X(0) = X(T_0). \end{cases} \tag{2.9}$$

将 $X(t)$ 代入到 (2.8) 中整理并令 $\lambda \to 0^+$ 可得

$$\int_0^{T_0} \left\langle X(t), x^0(t)-z \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \left\langle u, u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0,$$

又由 (2.7), (2.9) 及上式可知

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \left\langle X(t), \frac{dp^0(t)}{dt} + A^\top p^0(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \left\langle u, u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ = & -\left\langle X(0), p^0(0) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle X^-(\tau)-X(\tau), p^0(\tau) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle X(T_0), p^0(T_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle u, u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ = & \left\langle -Bu, p^0(\tau) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \left\langle u, u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ = & \left\langle u, -B^\top p^0(\tau)+u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \\ \geq & \ 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

取 $v = -u$, 由于 $u \in \mathbb{R}^m$ 是任取的, 故在上式中用 v 代替 u, 不等号仍成立, 即 $\left\langle v, -B^\top p^0(\tau)+u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0$, 也即

$$\left\langle u, -B^\top p^0(\tau)+u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} \leq 0. \tag{2.11}$$

由 (2.10) 及 (2.11) 可得, 对于任意的 $u \in \mathbb{R}^m$ 都有 $\left\langle u, -B^\top p^0(\tau)+u^0 \right\rangle_{\mathbb{R}^m} = 0$, 故

$$u^0 = B^\top p^0(\tau).$$

定理 2.2 证明完毕.

3 定理 1.1 的证明

为了证明定理 1.1, 我们先证明以下三个引理.

引理 3.1 假设存在 $N_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$\operatorname{rank}\{e^{-A\tau}B, e^{-A(\tau+T_0)}B, \cdots, e^{-A(\tau+N_0T_0)}B\} = n, \tag{3.1}$$

那么存在一个常数 $C_1>0$, 使得

$$\|p_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 \le C_1 \sum_{j=0}^{N_0} \|B^\top e^{-A^\top(\tau+jT_0)} p_0\|_{\mathbb{R}^m}^2, \ \ \forall\, p_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

证 反证法. 假设对于任意的 $k\in\mathbb{N}^+$, 存在 $p_k\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\|p_k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \ge k\sum\limits_{j=0}^{N_0}\|B^\top e^{-A^\top(\tau+jT_0)}p_k\|_{\mathbb{R}^m}^2$. 令 $\tilde{p}_k=\frac{p_k}{\|p_k\|_{\mathbb{R}^n}}$, 由上述不等式可得

$$\frac{1}{k}\|\tilde{p}_k\|_{\mathbb{R}^n}^2 \ge \sum_{j=0}^{N_0}\|B^\top e^{-A^\top(\tau+jT_0)}\tilde{p}_k\|_{\mathbb{R}^m}^2. \tag{3.3}$$

因为 $\|\tilde{p}_k\|_{\mathbb{R}^n}=1,\ \ \forall\, k\in\mathbb{N}^+$, 所以存在 $\{\tilde{p}_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$ 的子序列 (仍记为 $\{\tilde{p}_k\}_{k\in\mathbb{N}^+}$) 以及 $\tilde{p}_0\in\mathbb{R}^n$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\tilde{p}_k=\tilde{p}_0, \tag{3.4}$$

且 $\|\tilde{p}_0\|_{\mathbb{R}^n}=1$. 在 (3.3) 中令 $k\to\infty$, 由 (3.4) 可得

$$\sum_{j=0}^{N_0}\|B^\top e^{-A^\top(\tau+jT_0)}\tilde{p}_0\|_{\mathbb{R}^m}^2=0,$$

则

$$\tilde{p}_0^\top e^{-A(\tau+jT_0)}B=0,\ \ \forall\, j\in\{0,...,N_0\}.$$

结合 (3.1) 可知 $\tilde{p}_0=0$, 这与 $\|\tilde{p}_0\|_{\mathbb{R}^n}=1$ 矛盾. 因此 (3.2) 成立.

引理 3.1 证明完毕.

引理 3.2 假设存在 $N_0\in\mathbb{N}$, 使得 $\operatorname{rank}\{e^{-A\tau}B, e^{-A(\tau+T_0)}B,\cdots,e^{-A(\tau+N_0T_0)}B\}=n$, 那么存在一个常数 $C_2>0$, 使得对于任意的 $f(\cdot)\in L^2(0,\tau+N_0T_0;\mathbb{R}^n)$ 及 $p_0\in\mathbb{R}^n$, 均有

$$\|p_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 \le C_2\left(\sum_{j=0}^{N_0}\|B^\top p(\tau+jT_0)\|_{\mathbb{R}^m}^2+\int_0^{\tau+N_0T_0}\|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt\right) \tag{3.5}$$

成立, 其中 $p(\cdot)\in C^1([0,\tau+N_0T_0];\mathbb{R}^n)$ 是方程

$$\begin{cases}\dfrac{dp(t)}{dt}=-A^\top p(t)+f(t),\ \ t\in[0,\tau+N_0T_0],\\ p(0)=p_0\end{cases} \tag{3.6}$$

的解.

证 任意给定 $f(\cdot)\in L^2(0,\tau+N_0T_0;\mathbb{R}^n)$ 及 $p_0\in\mathbb{R}^n$, 设 $p(\cdot)$ 是方程 (3.6) 的解. 令 $p_1(\cdot)$ 满足方程:

$$\begin{cases}\dfrac{dp_1(t)}{dt}=-A^\top p_1(t),\quad t\in[0,\tau+N_0T_0],\\ p_1(0)=p_0,\end{cases} \tag{3.7}$$

$p_2(\cdot)$ 满足方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_2(t)}{dt} = -A^\top p_2(t) + f(t), \quad t \in [0, \tau + N_0 T_0], \\ p_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

显然,

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t), \ \ \forall\, t \in [0, \tau + N_0 T_0]. \tag{3.9}$$

余下的证明分为三步.

第一步. 我们证明存在一个独立于 p_0 的常数 $C_1' > 0$, 使得

$$\|p_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C_1' \sum_{j=0}^{N_0} \|B^\top p_1(\tau + jT_0)\|_{\mathbb{R}^m}^2. \tag{3.10}$$

由 (3.7) 可知 $p_1(\tau + jT_0) = e^{-A^\top(\tau + jT_0)} p_0, \ \ \forall\, j \in \{0, 1, ..., N_0\}$, 故由假设条件及引理 3.1 可知 (3.10) 成立.

第二步. 我们证明存在一个独立于 $f(\cdot)$ 常数 $C_2' > 0$, 使得

$$\|p_2(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq C_2' \int_0^{\tau + N_0 T_0} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt, \ \ \forall\, t \in [0, \tau + N_0 T_0]. \tag{3.11}$$

我们将 (3.8) 中的第一个式子的左右两边同时与 $p_2(t)$ 作内积可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p_2(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 &= -\left\langle A^\top p_2(t), p_2(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle p_2(t), f(t) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \|A\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \|p_2(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \frac{1}{2} \|p_2(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \frac{1}{2} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2, \end{aligned}$$

从而

$$\frac{d}{dt} \|p_2(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq (2\|A\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} + 1) \|p_2(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2.$$

已知 $p_2(0) = 0$, 由 Gronwall 不等式可知, 存在一个与 $f(\cdot)$ 无关的常数 $C_2' > 0$, 使得 (3.11) 成立.

第三步. 我们证明 (3.5) 成立.

由 (3.9), (3.10), (3.11) 可得

$$\begin{aligned} \|p_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 &\leq C_1' \sum_{j=0}^{N_0} \|B^\top p_1(\tau + jT_0)\|_{\mathbb{R}^m}^2 \\ &\leq 2C_1' \sum_{j=0}^{N_0} \|B^\top p(\tau + jT_0)\|_{\mathbb{R}^m}^2 + 2C_1' \sum_{j=0}^{N_0} \|B^\top p_2(\tau + jT_0)\|_{\mathbb{R}^m}^2. \\ &\leq 2C_1' \sum_{j=0}^{N_0} \|B^\top p(\tau + jT_0)\|_{\mathbb{R}^m}^2 + 2C_1' N_0 C_2' \|B^\top\|_{\mathbb{R}^{m \times n}}^2 \int_0^{\tau + N_0 T_0} \|f(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt. \end{aligned}$$

取 $C_2 = \max\{2C_1', 2C_1' N_0 C_2' \|B^\top\|_{\mathbb{R}^{m \times n}}^2\}$, 则 (3.5) 成立.

引理 3.2 证明完毕.

注 3.1 引理 3.1 和引理 3.2 可以看作脉冲控制系统 (1.1) 的能观性不等式.

引理 3.3 存在常数 $C_3>0$, 使得对于任意的 $T>T_0$ 及 $u=(u_k)_{k\in\Lambda_T}\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$, 均有

$$\|y(T;u)\|_{\mathbb{R}^n}^2\le C_3\left(\int_0^T\|y(t;u)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt+\sum_{k=0}^{N_T}\|u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2\right) \tag{3.12}$$

成立.

证 固定 $T>T_0$ 及 $u=(u_k)_{k\in\Lambda_T}\in l^2(\Lambda_T;\mathbb{R}^m)$, 将系统 (1.1) 限制在 $[0,T]$ 上的解简记为 $y(\cdot)$. 注意到, $y(\cdot)$ 在 $[T-T_0,T]$ 上满足方程:

$$\begin{cases}\dfrac{dy(t)}{dt}=Ay(t), & t\in[T-T_0,T]\backslash\{\tau+N_TT_0\},\\ y(\tau+N_TT_0)=y^-(\tau+N_TT_0)+Bu_{N_T}.\end{cases}$$

那么当 $t\in[\tau+N_TT_0,T]$ 时, $y(t)=e^{A(t-T)}y(T)$, 从而

$$y(T)=e^{A(T-t)}y(t). \tag{3.13}$$

而当 $t\in[T-T_0,\tau+N_TT_0)$ 时, $y(t)=e^{A(t-T)}y(T)-e^{A(t-\tau-N_TT_0)}Bu_{N_T}$, 从而

$$y(T)=e^{A(T-t)}y(t)+e^{A(T-\tau-N_TT_0)}Bu_{N_T}. \tag{3.14}$$

由 (3.13) 可得

$$\int_{\tau+N_TT_0}^T\|y(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt=\int_{\tau+N_TT_0}^T\|e^{A(T-t)}y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt.$$

由 (3.14) 可得

$$\begin{aligned}\int_{T-T_0}^{\tau+N_TT_0}\|y(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt\le{}&2\int_{T-T_0}^{\tau+N_TT_0}\|e^{A(T-t)}y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt\\&+2\int_{T-T_0}^{\tau+N_TT_0}\|e^{A(T-\tau-N_TT_0)}Bu_{N_T}\|_{\mathbb{R}^n}^2dt.\end{aligned}$$

将上述两式相加可得

$$T_0\|y(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2\le2\int_{T-T_0}^T\|e^{A(T-t)}y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt+2\int_{T-T_0}^{\tau+N_TT_0}\|e^{A(T-\tau-N_TT_0)}Bu_{N_T}\|_{\mathbb{R}^n}^2dt.$$

取 $M=\max_{t\in[0,T_0]}\{\|e^{At}\|_{\mathbb{R}^{n\times n}}\}$, 则

$$\begin{aligned}\|y(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2&\le2\frac{M^2}{T_0}\int_{T-T_0}^T\|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt+2M^2\|B\|_{\mathbb{R}^{n\times m}}^2\|u_{N_T}\|_{\mathbb{R}^m}^2\\&\le2\frac{M^2}{T_0}\int_{T-T_0}^T\|y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt+2M^2\|B\|_{\mathbb{R}^{n\times m}}^2\sum_{k=0}^{N_T}\|u_k\|_{\mathbb{R}^m}^2.\end{aligned}$$

取 $C_3=\max\{2\frac{M^2}{T_0},2M^2\|B\|_{\mathbb{R}^{n\times m}}^2\}$, 故 (3.12) 成立.

引理 3.3 证明完毕.

为了得到定理 1.1, 我们将问题 (P_0) 的伴随状态 $p^0(\cdot)$ 以 T_0 为周期延拓至 $[0,+\infty)$ 上, 仍记为 $p^0(\cdot)$, 即 $p^0(\cdot)$ 满足方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dp^0(t)}{dt} = -A^\top p^0(t) + x^0(t) - z, & t \in [0,+\infty), \\ p^0(kT_0) = p^0((k+1)T_0), & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.15}$$

并且

$$u^0 = B^\top p^0(\tau + kT_0), \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

定理 1.1 的证明 任意给定 $T > \tau + N_0T_0$. 为了方便起见, 在下面的证明中我们记 $\bar{y}(t) = y^T(t) - x^0(t)$, $\bar{p}(t) = p^T(t) - p^0(t), \forall t \in [0,T]$, 及 $\bar{u}_k = u_k^T - u^0, \forall k \in \Lambda_T$. 由 (1.1), (1.3), (2.1), (2.2) 以及 (3.15) 和 (3.16), 我们有

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}(t)}{dt} = A\bar{y}(t), & t \in [0,T]\backslash\{\tau + kT_0\}_{k\in\Lambda_T}, \\ \bar{y}(\tau + kT_0) = \bar{y}^-(\tau + kT_0) + B\bar{u}_k, & k \in \Lambda_T, \\ \dfrac{d\bar{p}(t)}{dt} = -A^\top \bar{p}(t) + \bar{y}(t), & t \in [0,T], \\ \bar{u}_k = B^\top \bar{p}(\tau + kT_0), & k \in \Lambda_T. \end{cases} \tag{3.17}$$

将 (3.17) 的第三个式子的左右两边同时与 $\bar{y}(t)$ 作内积, 并在 $[0,T]$ 上做积分可得

$$\int_0^T \|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt = \int_0^T \left\langle \bar{y}(t), \frac{d\bar{p}(t)}{dt} \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt + \int_0^T \left\langle \bar{y}(t), A^\top \bar{p}(t) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} dt.$$

进一步, 由 (3.17) 可知

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt =& -\langle \bar{y}(0), \bar{p}(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \sum_{k=0}^{N_T} \left\langle \bar{y}^-(\tau + kT_0) - \bar{y}(\tau + kT_0), \bar{p}(\tau + kT_0) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} \\ & + \langle \bar{y}(T), \bar{p}(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ =& -\langle \bar{y}(0), \bar{p}(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \sum_{k=0}^{N_T} \langle B\bar{u}_k, \bar{p}(\tau + kT_0) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \bar{y}(T), \bar{p}(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ =& -\langle \bar{y}(0), \bar{p}(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \sum_{k=0}^{N_T} \|\bar{u}_k\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \langle \bar{y}(T), \bar{p}(T) \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 dt + \sum_{k=0}^{N_T} \|\bar{u}_k\|_{\mathbb{R}^n}^2 =& \ \langle \bar{y}(T), \bar{p}(T) \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \bar{y}(0), \bar{p}(0) \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ \le& \ \|\bar{y}(T)\|_{\mathbb{R}^n} \|\bar{p}(T)\|_{\mathbb{R}^n} + \|\bar{y}(0)\|_{\mathbb{R}^n} \|\bar{p}(0)\|_{\mathbb{R}^n} \\ \le& \ \varepsilon_1 \|\bar{y}(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + C(\varepsilon_1)\|p^0(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \varepsilon_2 \|\bar{p}(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ & + C(\varepsilon_2)\|y_0 - x^0(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2, \end{aligned} \tag{3.18}$$

其中 ε_1, ε_2 是任意常数, $C(\varepsilon_1)$, $C(\varepsilon_2)$ 分别是只依赖于 ε_1, ε_2 的常数. 由引理 3.2, 引理 3.3 及 (3.17) 可知, 存在与 T 无关的常数 C_2, $C_3>0$, 使得

$$\begin{aligned}\|\bar{p}(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 &\le C_2\left(\sum_{k=0}^{N_T}\|B^\top\bar{p}(\tau+kT_0)\|_{\mathbb{R}^m}^2+\int_0^T\|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt\right)\\ &= C_2\left(\sum_{k=0}^{N_T}\|\bar{u}_k\|_{\mathbb{R}^m}^2+\int_0^T\|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt\right),\end{aligned}\tag{3.19}$$

以及

$$\|\bar{y}(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2\le C_3\left(\sum_{k=0}^{N_T}\|\bar{u}_k\|_{\mathbb{R}^m}^2+\int_0^T\|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt\right).\tag{3.20}$$

在 (3.18) 中取 $\varepsilon_1=\frac{1}{4C_2}$, $\varepsilon_2=\frac{1}{4C_3}$, 将 (3.19), (3.20) 代入到 (3.18) 中可得

$$\int_0^T\|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt+\sum_{k=0}^{N_T}\|\bar{u}_k\|_{\mathbb{R}^m}^2\le 2C(\varepsilon_1)\|p^0(T)\|_{\mathbb{R}^n}^2+2C(\varepsilon_2)\|y_0-x^0(0)\|_{\mathbb{R}^n}^2,\ \ \forall\, T>0.$$

因此当 $T\to\infty$ 时 $\frac{1}{T}\int_0^T\|\bar{y}(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2dt\to 0$, 且 $\frac{1}{T}\sum\limits_{k=0}^{N_T}\|\bar{u}_k\|_{\mathbb{R}^n}^2\to 0$, 结合上式及 N_T 的定义可知

$$\frac{1}{N_T+1}\sum_{k=0}^{N_T}\|\bar{u}_k\|_{\mathbb{R}^n}^2\to 0.$$

定理 1.1 证明完毕.

参 考 文 献

[1] Porretta A, Zuazua E. Long time versus steady state optimal control[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2013, 51(6): 4242–4273.

[2] Trelat E, Zuazua E. The turnpike property in infinte-dimensional nonlinear optimal control[J]. Journal of Differential Equations, 2015, 258(1): 81–114.

[3] Lou H, Wang W. Turnpike properties of optimal relaxed control problems[J]. ESAIM: Control Optimisation and Calculus of Variations, 2018, 16(5): 84–96.

[4] Trelat E, Wang L, Zhang Y. Impulse and sampled-data optimal control of heat equations and error estimates[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2015, 54(5): 2787–2819.

[5] Yong J, Zhang P. Necessary conditions of optimal impulse controls for distributed parameter systems[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 1992, 45(2): 305–326.

[6] Yang T. Impulse control theory, lecture notes in control and information sciences[M]. Berlin: Springer, 2001.

[7] Bensoussan A, Lions J L. Impulse control and quasi-variational inequalities[J]. Fruit Growing Research, 1984, 9(27): 62–71.

[8] Guan Z H, Qian T H, Yu X. Controllability and observability of linear time-varying impulsive systems[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I Fundamental Theory & Applications, 2002, 49(8): 1198–1208.

[9] Guan Z H, Qian T H, Yu X. On controllability and observability for a class of impulsive systems[J]. Systems & Control Letters, 2002, 47(3): 247–257.

[10] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of impulsive differential equations[J]. Aequationes Mathematicae, 1989, 56(2): 131–195.

[11] Liu X. Impulsive control and optimization[J]. Applied Mathematics & Computation, 1995, 73(1): 77–98.

[12] Medina E A, Lawrence D A. State feedback stabilization of linear impulsive systems[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1476–1480.

[13] Qin S, Wang G. Controllability of impulse controlled system of heat equations coupled by constant matrices[J]. Journal of Differential Equations, 2017, 263(10): 6456–6493.

MEAN SQUARE TURNPIKE PROPERTY OF PERIODIC IMPULSIVE CONTROL PROBLEMS FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

YAN Qi-shu, ZHAO Rui

(*School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China*)

Abstract: In this paper, we study the optimal control problem of a class of ordinary differential equations, in which the control periodically acts into the system in the form of impulses. Firstly, we give the maximum principles of the optimal control problem and the reference control problem, respectively. Secondly, under the assumption that the control system is controllable, the observability inequality of the system is proved. Finally, by using the maximum principles and the observability inequality, the convergence relationship of the optimal states and optimal controls between two optimal control problems is obtained when the time range is large enough—the mean square turnpike property.

Keywords: periodic impulse control system; turnpike property; maximum principle

2010 MR Subject Classification: 49J15; 49K15