

## 高维旋转曲面

李颖, 李志凤

(西北大学数学学院; 西北大学非线性科学研究中心, 陕西 西安 710127)

**摘要:** 本文考虑欧氏空间中一种余一维的高维旋转曲面, 通过发展出一种全新的复合映射、维数分解与分块矩阵递推法, 我们系统地研究了同它的面积和曲率有关的一系列问题. 当母函数是多元函数时, 这种高维旋转曲面的概念尚属首次提出. 我们给出了这种高维旋转曲面的面积公式以及它的一些简单应用. 我们发现: 在任一直径方向上, 单位球面的面积分布和低一维单位球体的体积分布完全相同, 并且当维数趋于无穷时它们的密度函数的极限都是狄拉克函数. 通过研究相应面积泛函的变分问题, 我们得到了所谓的极小旋转曲面方程. 我们证明了: 满足极小旋转曲面方程的母函数对应的旋转曲面的平均曲率等于零. 这种极小旋转曲面方程推广了传统的极小曲面方程, 并且为非参数极小曲面理论提供了新的更一般的研究框架; 通过计算径向对称解对应的常微分方程, 我们研究了它的一些简单的特解. 我们也简单讨论了相应的预定平均曲率和预定高斯曲率问题.

**关键词:** 高维旋转曲面; 极小旋转曲面方程; 单位球面的面积分布; 平均曲率; 极小曲面方程

MR(2010) 主题分类号: 14Q10; 53A10; 53A05; 53A07 中图分类号: O176.1; O175.29; O186.1; O172

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2023)04-0356-21

### 1 引言

本文在欧氏空间中引入几类余一维的高维旋转曲面的概念, 进而着重研究了同它们的面积和曲率有关的一系列问题; 其中许多结果可以很容易地推广到高余维情形, 为了叙述方便与讨论集中起见, 我们只讨论余一维的情形.

作为对一般三维空间中旋转曲面的推广, 我们引进了所谓的  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面和  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面, 其中后者可以视作前者的一种推广而囊括前者.

设  $I \subset \mathbb{R}$  是有界闭区间,  $f \in C^1(I, \mathbb{R}_+)$ , 所谓的  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面基本上就是指超曲面

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : f(x) = |y|, x \in I \subset \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}.$$

我们说  $S$  是函数  $f$  的图像在  $\mathbb{R}^n$  空间中绕着  $x$  轴旋转形成的曲面. 我们的第一个结果是计算出了  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面的面积公式

$$|S| = |\mathbb{S}^{n-2}| \int_I \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx,$$

其中  $|\mathbb{S}^{n-2}| = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$  表示  $n-2$  维单位球面的面积. 在计算旋转曲面面积时我们发展出了一种全新的复合映射、维数分解与分块矩阵递推法, 运用它们, 我们可以方便地写出相关曲面

\*收稿日期: 2022-10-15 接收日期: 2023-02-13

作者简介: 李颖 (1995-), 女, 河南, 研究生, 主要研究方向: 偏微分方程与微分几何.

通讯作者: 李志凤 (1984-), 男, 陕西, 副教授, 主要研究方向: 偏微分方程与微分几何.

的参数表达式, 并且可以比较清晰且容易地计算出相应的雅可比矩阵、雅可比行列式、第一、第二基本型、平均曲率以及高斯曲率等等, 这在本文是一种统一且行之有效的方法 (参见下文一般  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的面积和曲率的相关介绍部分). 应用该面积公式, 我们检验了像一般数学分析教科书里 (参见 [1-5]) 传统的三维空间中旋转曲面那样, 对  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面沿对称轴“分割 - 求和 - 取极限”用高维圆台侧面微元逼近求面积的可行性. 同时, 应用它, 我们也顺道计算出了等底等母线长的高维圆锥和高维圆柱的侧面积比是  $1 : n-1$ , 其中  $n$  是空间维数; 这其实对应我们熟悉的经典情形: 等底等高的圆锥和圆柱的体积比是  $1 : 3$ . 此外, 我们研究了高维旋转曲面在对称轴方向上的面积分布, 其中最有趣的情况是球面. 我们知道在三维空间中, 当球的半径固定时, 球冠或球台的表面积与其高成正比. 我们的计算表明, 这种分布只有当空间维数是三维时才是正比关系; 事实上, 单位球面在任一直径方向的面积分布当维数增加时呈现向中间聚集的趋势, 并且在维数趋于无穷时面积分布的密度函数的极限是狄拉克函数. 重要的是: 在任一直径方向上,  $n+1$  维单位球面的面积分布和  $n$  维单位球体的体积分布完全相同 (例如, 非常简单的例子, 二维球面的面积分布和一维“球体”/直线段的“体积”/长度分布都是恒同分布), 当维数趋于无穷时它们的密度函数的极限都是狄拉克函数.

一般来讲, 我们上述所谓的  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面, 其实是很容易想到的 (甚至人们通常也认为是唯一可能的) 一种对三维空间中经典旋转曲面的推广, 并且我们确实看到一些这样的文献. 例如, 在文章快要完成时, 我们发现文献 [6, 7] 均有涉及这样的几何体, 前者证明这种极小旋转曲面夹在两个超平面之间, 后者研究了常高斯曲率旋转曲面; 读者可以通过阅读对比, 体会我们计算方法的独有特点. 但实际上, 还可以构造出更广泛类型的高维旋转曲面. 比如, 正如本文后半部分所做的那样, 可以把旋转时所依据的母函数由一元函数推广到多元函数. 设  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ . 若  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  是开区域,  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$  是二阶连续可微的非负函数, 我们所谓的  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面基本上就是指超曲面

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : u(x) = |y|, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{n-k}\}.$$

可以认为曲面  $S$  是函数  $u$  的图像在  $\mathbb{R}^n$  空间中“绕着”它的  $k$  维线性子空间  $\mathbb{R}^k$  “旋转”  $n-k-1$  维形成的曲面. 同样借助上文所言的  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面情形我们发展出的复合映射、维数分解与分块矩阵递推法, 我们计算出了  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的面积公式

$$|S| = |\mathbb{S}^{n-k-1}| \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du(x)|^2} u^{n-k-1}(x) dx.$$

进一步地, 通过研究相应面积泛函的变分问题, 我们得到了与经典极小曲面方程对应的偏微分方程, 即我们所谓的极小旋转曲面方程

$$\operatorname{div} \left( \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du \right) - (n-k-1) \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-2} = 0.$$

显然, 当  $k = n-1$  时, 极小旋转曲面方程简化为经典的极小曲面方程. 在满足相同边值条件的母函数中, 面积最小的  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的母函数满足极小旋转曲面方程; 通过计算  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的第一第二基本型以及平均曲率易知, 满足极小旋转曲面方程的母函数对应的旋转曲面的平均曲率等于零, 即极小旋转曲面平均曲率为零. 这说明极小旋转

曲面方程是一种非常有研究价值的偏微分方程. 这里计算旋转曲面的第一第二基本型与曲率的方法, 与前面的计算一脉相承, 也是我们发展出的复合映射、维数分解与分块矩阵递推法; 读者可将其与文献 [7] 中相应的传统方法进行比较. 极小旋转曲面方程的解的存在唯一性、正则性以及刚性定理这些更重要的问题, 是本文力有不逮的地方; 我们其他一些初步的研究结果表明, 它比传统的极小曲面方程困难, 但是也遵循一些统一的原则. 通过计算径向对称解对应的常微分方程, 研究一些简单的特解, 本文最后简单讨论了相应的预定平均曲率和预定高斯曲率问题.

**术语符号** 本文用  $\mathbb{R}^n$  表示  $n$  维欧式空间; 任给向量  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x|$  表示它的标准欧氏范数 (即所有分量平方和的开方);  $\det A$  表示矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  的行列式;  $I_k$  表示  $k$  阶恒等矩阵; 坐标向量一般均视作列向量; 向量或矩阵右上方的角标  $T$  表示其转置; 如果集合  $S \subset \mathbb{R}^n$  的豪斯多夫维数是  $s$  维, 则  $|S|$  表示集合  $S$  的  $s$  维豪斯多夫测度, 在特定场合我们也称之为体积或者面积;  $B_r^k = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < r\}$  表示球心在原点, 半径为  $r$  的  $k$  维开球;  $\mathbb{S}^k = \partial B_1^{k+1} = \{x \in \mathbb{R}^{k+1} : |x| = 1\}$  表示  $k$  维单位球面, 即  $\mathbb{R}^{k+1}$  中单位球  $B_1^{k+1}$  的边界曲面; 关于它们的体积或面积, 下述公式经常被用到 (其中  $\Gamma, B$  表示欧拉积分函数):

$$|B_1^k| = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{k}{2})}, \quad |\partial B_1^k| = k |B_1^k| = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})}, \quad |\mathbb{S}^k| = |\partial B_1^{k+1}| = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})};$$

并且我们会发现性质

$$\frac{|B_1^{n-1}|}{|B_1^{n-2}|} = \frac{|\mathbb{S}^n|}{|\mathbb{S}^{n-1}|} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

在本文中拥有一些奇妙的应用.

本文正文分为两大节: 第二节和第三节. 第二节主要讲  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面, 分为四个小节. 在第 2.1 小节, 我们首先给出一般参数曲面面积的一个确切定义, 然后引入  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面的概念, 最后用一种复合映射、维数分解与分块矩阵递推法推导它的面积公式; 应用这个公式, 我们在第 2.2 小节, 验证旋转曲面的面积沿轴分割用高维圆台侧面微元逼近的可行性; 在第 2.3 小节, 研究高维圆锥和圆柱的侧面积比; 最后在第 2.4 小节, 研究单位球面在直径方向上的面积分布情况及其相关问题. 第三节主要讲  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面, 分为三个小节. 在第 3.1 小节, 我们引入一种更广泛的  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的概念, 并且使用复合映射、维数分解与分块矩阵递推法推导它的面积公式; 在第 3.2 小节, 我们研究相应面积泛函的变分问题, 得到极小旋转曲面方程, 并且研究了它的径向对称解; 最后在第 3.3 小节, 我们使用复合映射、维数分解与分块矩阵递推法计算旋转曲面的平均曲率和高斯曲率, 证明了极小旋转曲面的平均曲率为零; 也初步研究了相应的曲率方程.

## 2 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$ 型旋转曲面

### 2.1 由一般参数曲面面积的定义, 到 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$ 型旋转曲面的定义以及它的面积

关于欧氏空间中一般曲面面积的定义, 通常的数学分析教科书 [1-4, 8, 9] 都是安排在多元函数积分学章节, 作为积分学的一部分, 由  $|S| = \int_S 1 \, dS$  定义, 再通过引入参数方程化曲

面积分为重积分来计算; 或者直接由后者来定义, 其本质是通过参数表达式计算曲面上每点处的一组自然的切向量所生成的平行体的体积微元, 然后再对其进行积分.

**定义 2.1** (参数曲面的面积) 设  $\mathbb{R}^n$  中的  $k$  维光滑曲面  $S$  的参数方程是一阶连续可导的单射  $\Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n, t \mapsto x$ , 则称

$$|S| := \int_{\Omega} \sqrt{\det(x_{t_i} \cdot x_{t_j})} dt = \int_{\Omega} \sqrt{\det[(D_t x)^T D_t x]} dt$$

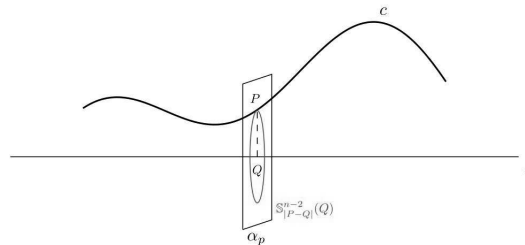
为曲面  $S$  的 ( $k$  维) 面积.

这样定义有很大的便利之处, 比如我们可以很容易用它来直接计算高维旋转曲面的面积. 三维空间中旋转曲面的概念是众所周知的, 高维的对应事物有哪些类型, 文献中论及的并不多, 我们首先给出一种常见的比较能够自然而然想到的旋转曲面的定义.

**定义 2.2** ( $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面) 设  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) 中的曲线  $c$  与直线  $l$  在  $\mathbb{R}^n$  中的同一个平面 (二维子空间) 上, 并且  $c$  在  $l$  的单侧. 若对任给的点  $P \in c$ , 都存在唯一的点  $Q \in l$ , 使得  $P, Q$  都在过  $P$  与  $l$  垂直的  $n-1$  维超平面  $\alpha_P$  上, 则在  $\alpha_P$  上与  $Q$  的距离同  $P$  与  $Q$  距离相等的点的集合, 是以  $Q$  为心, 以  $|P-Q|$  为半径的  $n-2$  维球面  $\mathbb{S}_{|P-Q|}^{n-2}(Q)$ . 我们称所有  $\mathbb{S}_{|P-Q|}^{n-2}(Q)$  的并集

$$S = \bigcup_{Q \in l} \mathbb{S}_{|P-Q|}^{n-2}(Q)$$

为  $\mathbb{R}^n$  中的一个  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面, 并称直线  $l$  为它的旋转轴, 称曲线  $c$  为它的旋转母线.



不失一般性, 下面我们只讨论  $\mathbb{R}^n$  空间中旋转轴是  $x_1$  轴 (或称  $x$  轴), 旋转母线是  $x_1$  轴上函数图像的旋转曲面. 我们的第一个结果是下面的  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面面积定理.

**定理 2.3** 设  $I \subset \mathbb{R}$  是有界闭区间,  $f \in C^1(I, \mathbb{R}_+)$ , 则  $\mathbb{R}^n$  空间中函数  $f$  的图像绕着  $x$  轴旋转形成的 (即以  $x$  轴为旋转轴, 以区间  $I$  上函数  $f$  的图像为旋转母线的)  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : f(x) = |y|, x \in I \subset \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$$

的面积为

$$|S| = |\mathbb{S}^{n-2}| \int_I \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx,$$

其中  $|\mathbb{S}^{n-2}| = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$  表示  $n-2$  维单位球面的面积.

**注** 高维旋转体的体积是简单的. 事实上, 我们可以利用球柱逼近由微元法得到对应的体积公式  $V = |B_1^{n-1}| \int_I f^{n-1}(x) dx$ .

证 我们根据参数曲面的面积定义 2.1 直接给出定理 2.3 的证明. 注意到  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面的拓扑结构正是  $I \times \mathbb{S}^{n-2}$ , 我们可以通过复合映射来得到它的参数表达式

$$I \times Q \rightarrow I \times \mathbb{S}^{n-2} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^n, \quad \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} x &\in I \subset \mathbb{R}, \\ Q &:= (0, 2\pi) \times (0, \pi) \times \cdots \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^{n-2}, \\ \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-2} \end{pmatrix} \in Q \subset \mathbb{R}^{n-2}, \quad v = v(\theta) &= \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \cdots \sin \theta_1 \\ \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-3} \cdots \cos \theta_1 \\ \vdots \\ \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-3} \\ \cos \theta_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}, \\ y &= f(x)v(\theta) \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{aligned}$$

根据定义, 我们需要计算雅可比矩阵

$$J := \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, \theta)} = D_{(x, \theta)} \begin{pmatrix} x \\ f(x)v(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x v & f Dv \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)},$$

其中  $Dv = D_\theta v \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-2)}$ , 则雅可比行列式

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(J^T J)} &= \sqrt{\det \left( \begin{pmatrix} 1 & f_x v^T \\ 0 & f(Dv)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_x v & f Dv \end{pmatrix} \right)} = \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + |v|^2 f_x^2 & f f_x v^T Dv \\ f f_x (Dv)^T v & f^2 (Dv)^T Dv \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} 1 + |v|^2 f_x^2 & 0 \\ 0 & f^2 (Dv)^T Dv \end{pmatrix}} = \sqrt{1 + f_x^2} f^{n-2} \sqrt{\det [(Dv)^T Dv]} \\ &= \sqrt{1 + f_x^2} f^{n-2} \sin^{n-3} \theta_{n-2} \sin^{n-4} \theta_{n-3} \cdots \sin \theta_2, \end{aligned}$$

其中我们用到了  $|v|^2 = 1$  和  $(Dv)^T v = 0$ , 后者是因为  $v \in \mathbb{S}^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\sum_{k=1}^{n-1} v_k^2 = |v|^2 = 1$ , 两边同时求导, 便有  $2 \sum_{k=1}^{n-1} v_k \partial_i v_k = 0$ ,  $(Dv)^T v = 0$ ; 另外,  $\sqrt{\det [(Dv)^T Dv]} = \sin^{n-3} \theta_{n-2} \sin^{n-4} \theta_{n-3} \cdots \sin \theta_2$  正是标准的  $n-2$  维球面坐标变换的雅可比行列式, 参见下面的注记 2.1.

因此,  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面的侧面积

$$\begin{aligned}
 |S| &= \int_{I \times Q} \sqrt{\det(J^T J)} d(\theta, x) \\
 &= \int_I \int_Q \sqrt{1 + f_x^2} f^{n-2} \sqrt{\det[(Dv)^T Dv]} d\theta dx \\
 &= \int_Q \sqrt{\det[(Dv)^T Dv]} d\theta \int_I \sqrt{1 + f_x^2} f^{n-2} dx \\
 &= \int_{\mathbb{S}^{n-2}} dS \int_I \sqrt{1 + f_x^2} f^{n-2} dx \\
 &= |\mathbb{S}^{n-2}| \int_I \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx.
 \end{aligned}$$

注 2.1 计算  $\sqrt{\det((Dv)^T Dv)}$ . 因为  $v = v(\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-2} \tilde{v}(\tilde{\theta}) \\ \cos \theta_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ , 其中

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{n-3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-3}, \quad \tilde{v}(\tilde{\theta}) = \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-3} \cdots \sin \theta_1 \\ \sin \theta_{n-3} \cdots \cos \theta_1 \\ \vdots \\ \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-4} \\ \cos \theta_{n-3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-2},$$

所以

$$\begin{aligned}
 Dv &= \frac{\partial(v_1, \cdots, v_{n-1})}{\partial(\theta_1, \cdots, \theta_{n-2})} = D_{(\tilde{\theta}, \theta_{n-2})} \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-2} \tilde{v}(\tilde{\theta}) \\ \cos \theta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-2} D\tilde{v} & \cos \theta_{n-2} \tilde{v} \\ 0 & -\sin \theta_{n-2} \end{pmatrix} \\
 &\in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-2)},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (Dv)^T Dv &= \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-2} (D\tilde{v})^T & 0 \\ \cos \theta_{n-2} \tilde{v}^T & -\sin \theta_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-2} D\tilde{v} & \cos \theta_{n-2} \tilde{v} \\ 0 & -\sin \theta_{n-2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_{n-2} (D\tilde{v})^T D\tilde{v} & \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-2} (D\tilde{v})^T \tilde{v} \\ \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-2} \tilde{v}^T D\tilde{v} & \cos^2 \theta_{n-2} \tilde{v}^T \tilde{v} + \sin^2 \theta_{n-2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_{n-2} (D\tilde{v})^T D\tilde{v} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sin^2 \theta_{n-2} \cdots \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta_{n-2} \cdots \sin^2 \theta_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sin^2 \theta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\in \mathbb{R}^{(n-2) \times (n-2)},
 \end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{\det [(Dv)^T Dv]} = \sin^{n-3} \theta_{n-2} \sin^{n-4} \theta_{n-3} \cdots \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2,$$

以及

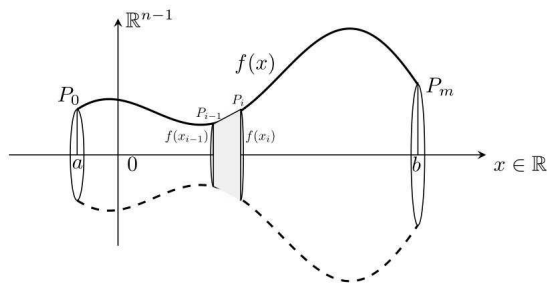
$$\begin{aligned} & \int_Q \sqrt{\det [(Dv)^T Dv]} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \sin^{n-3} \theta_{n-2} \cdots \sin^2 \theta_3 \sin \theta_2 d\theta_{n-2} \cdots d\theta_3 d\theta_2 d\theta_1 \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \cdots \int_0^\pi \sin^{n-3} \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \\ &= 2\pi \prod_{i=1}^{n-3} B\left(\frac{i+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\pi \prod_{i=1}^{n-3} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} = |\mathbb{S}^{n-2}| = \int_{\mathbb{S}^{n-2}} dS, \end{aligned}$$

其中我们使用了欧拉函数的定义和转换关系

$$B(p, q) = \int_0^\pi \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta, \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

## 2.2 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$ 型旋转曲面的面积沿轴分割用高维圆台侧面微元逼近的可行性

在上一小节, 我们按照定义计算了  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面的面积, 即直接计算参数曲面的雅可比行列式, 然后积分; 这种方法的本质其实是切空间体积微元法. 回顾三维空间中旋转曲面面积的计算, 在一般的数学分析教科书 (参见 [1-4]) 中, 这些内容都是出现在一元函数定积分的应用章节. 在那里, 人们把旋转曲面的旋转轴分割成若干段, 每一段上用一个小圆台的侧面去近似原曲面的相应片段, 并且不加证明地认为: 如果这个逼近的极限存在, 那它就是该旋转曲面的面积. 我们不禁要问, 这样做一般来讲正确吗? 即这种方法对于相应的高维情形, 例如我们所谓的  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面, 也成立吗? 答案是肯定的, 我们这一小节就主要来讨论这个问题.



如上图, 考虑区间  $I := [a, b]$  的任意一个分割  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = b$ . 对每一个  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ , 记  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ , 记  $P_i := (x_i, f(x_i))$  为各分点处函数  $f$  的图像上对应的点, 并用  $l_i$  表示直线段  $\overline{P_{i-1}P_i}$  的长度, 用  $s_i$  表示沿着函数图像的曲线段  $\widetilde{P_{i-1}P_i}$  的长度. 显然, 区间  $[a, b]$  之间函数  $f$  的图像曲线的总长度  $s = \sum_{i=1}^m s_i$ . 人们通常用  $l_i$  来近似  $s_i$ , 并用它们的有限和的极限  $\lim_{\max\{\Delta x_i: 1 \leq i \leq m\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m l_i$  来计算或者定义曲线总长度  $s$  (如果这样可行

就称其为可求长曲线). 将直线段  $\overline{P_{i-1}P_i}$  绕  $x$  轴“旋转”, 得到的曲面是一个“高维圆台”(可以参考我们定义 2.2 给出的高维旋转曲面的定义) 的侧面, 记其为  $T_i$ . 同上述曲线弧长的情形类似, 我们有

**命题 2.4** 极限  $\lim_{\max\{\Delta x_i: 1 \leq i \leq m\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m |T_i|$  存在, 并且等于旋转曲面  $S$  的面积.

证明该命题, 需要下面这个引理.

**引理 2.5** 设  $n$  维圆台  $T$  的上下底半径分别为  $\alpha$  和  $\beta$ , 母线长为  $l$ , 则  $T$  的侧面积

$$|T| = \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1} \cdot \frac{l(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha}.$$

**证** 易知高  $h := \sqrt{l^2 - (\beta - \alpha)^2}$ , 因为高维圆台侧面可以看成以直线段

$$f(x) = \frac{\beta - \alpha}{h}x + \alpha \quad (x \in [0, h])$$

为旋转母线, 以  $x$  轴为旋转轴的旋转曲面, 根据旋转曲面面积公式, 即定理 2.3, 知侧面积

$$\begin{aligned} |T| &= |\mathbb{S}^{n-2}| \int_0^h \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx \\ &= |\mathbb{S}^{n-2}| \sqrt{1 + \frac{(\beta - \alpha)^2}{h^2}} \int_0^h \left( \frac{\beta - \alpha}{h}x + \alpha \right)^{n-2} dx \\ &= |\mathbb{S}^{n-2}| \frac{l}{h} \frac{h}{(n-1)(\beta - \alpha)} \left( \frac{\beta - \alpha}{h}x - \alpha \right)^{n-1} \Big|_{x=0}^{x=h} \\ &= \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1} \cdot \frac{l(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha}. \end{aligned}$$

下面证明命题 2.4.

**证** 接着本节开始部分的设定与记号继续进行论证. 对于任给的  $i = 1, 2, \dots, m$ , 由  $f, f^{n-1} \in C^1(I)$ , 对  $f$  在小区间  $(x_{i-1}, x_i)$  上应用拉格朗日中值定理可知, 存在  $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使得  $\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} = f'(\eta_i)$ , 以及对  $f$  和  $f^{n-1}$  在小区间  $(x_{i-1}, x_i)$  上应用柯西中值定理可知, 存在  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使得

$$\frac{f^{n-1}(x_i) - f^{n-1}(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} = \frac{(n-1)f^{n-2}(\xi_i)f'(\xi_i)}{f'(\xi_i)} = (n-1)f^{n-2}(\xi_i).$$

现在我们将第  $i$  个高维圆台的上下底半径  $\alpha_i = f(x_{i-1})$  和  $\beta_i = f(x_i)$ , 以及母线长

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2},$$

这些数据代入引理 2.5, 并且使用上述中值定理结论, 可知第  $i$  个高维圆台的侧面积

$$\begin{aligned} |T_i| &= \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1} \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \cdot \frac{f^{n-1}(x_i) - f^{n-1}(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \\ &= |\mathbb{S}^{n-2}| \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i f^{n-2}(\xi_i) \\ &= |\mathbb{S}^{n-2}| \sqrt{1 + f'(\eta_i)^2} f^{n-2}(\xi_i) \Delta x_i \\ &= |\mathbb{S}^{n-2}| \sqrt{1 + f'(\eta_i)^2} f^{n-2}(\eta_i) \Delta x_i \\ &\quad + |\mathbb{S}^{n-2}| \sqrt{1 + f'(\eta_i)^2} (f^{n-2}(\xi_i) - f^{n-2}(\eta_i)) \Delta x_i. \end{aligned}$$

由  $f^{n-2}(x)$  的一致连续性知, 对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - y| \leq \delta$  时,  $|f^{n-2}(x) - f^{n-2}(y)| \leq \varepsilon$ . 又因为  $\xi_i, \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ , 所以当  $\max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq m\} \leq \delta$  时, 我们有  $|\xi_i - \eta_i| \leq |x_{i-1} - x_i| = \Delta x_i \leq \delta$ , 以及

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sqrt{1 + f'(\eta_i)^2} (f^{n-2}(\xi_i) - f^{n-2}(\eta_i)) \Delta x_i &\leq \varepsilon \max_{x \in I} \sqrt{1 + f'(x)^2} \sum_{i=1}^m \Delta x_i \\ &= \varepsilon \max_{x \in I} \sqrt{1 + f'(x)^2} (b - a) \\ &\rightarrow 0 \quad (\max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq m\} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{\max\{\Delta x_i : 1 \leq i \leq m\} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m |T_i| = |\mathbb{S}^{n-2}| \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx = |S|.$$

**注** 进一步地, 对于空间曲线或者曲面, 是否存在一种方便计算与检验的更为广泛的统一的面积定义, 能够同时囊括: 曲线“分割 - 求和 - 取极限”折线逼近微元法, 参数曲面切平面局部近似面积微元法, (高维) 旋转曲面对称轴分割 (高维) 圆台侧面积逼近微元法, 以及作为空间曲面的豪斯多夫测度型面积定义的球体、方体或者某类标准几何体“覆盖 - 求和 - 取确界”等方法, 是一个非常有意思的问题, 这其实也是本文最先研究与写作的一部分动机.

### 2.3 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$ 型旋转曲面面积公式的一个应用: 高维圆锥和圆柱的侧面积比

众所周知, 等底等高的圆锥和圆柱的体积比是  $1:3$ , 其实它们的侧面积也有一定的比例关系. 在上一节中, 我们利用高维旋转曲面公式计算了高维圆台的侧面积; 对于一般维数, 也有圆锥与圆柱的概念, 高维圆锥的母线是与旋转轴相交的直线段, 高维圆柱的母线是与旋转轴平行的直线段, 它们都是特殊的高维圆台; 易知等底等高时它们的体积比是  $1:n$ ; 根据引理 2.5, 我们也可以计算它们的侧面积, 观察它们侧面积的比例关系.

**推论 2.6** 在  $\mathbb{R}^n$  中, 等底等母线长的高维圆锥  $S_{\text{锥}}$  和高维圆柱  $S_{\text{柱}}$  的侧面积比为

$$\frac{|S_{\text{锥}}|}{|S_{\text{柱}}|} = \frac{1}{n-1}.$$

**证** 设高维圆柱和高维圆锥的母线长都是  $l$ , 下底面半径都是  $\beta$ . 由于高维圆锥的上底半径可以视为 0, 而高维圆柱的上下底半径相同, 都是  $\beta$ , 因此, 根据引理 2.5, 可得高维圆锥和

高维圆柱的侧面积分别为

$$|S_{\text{锥}}| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1} \cdot \frac{l(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha} = \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1} \cdot l\beta^{n-2},$$

$$|S_{\text{柱}}| = \lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1} \cdot \frac{l(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})}{\beta - \alpha} = |\mathbb{S}^{n-2}| l\beta^{n-2}.$$

因此, 它们的侧面积比为

$$\frac{|S_{\text{锥}}|}{|S_{\text{柱}}|} = \frac{1}{n-1}.$$

**推论 2.7** 在  $\mathbb{R}^n$  中, 等底等高 (底面半径为  $\beta$ , 高为  $h$ ) 的高维圆锥  $S_{\text{锥}}$  和高维圆柱  $S_{\text{柱}}$  的侧面积的比为

$$\frac{|S_{\text{锥}}|}{|S_{\text{柱}}|} = \frac{1}{n-1} \frac{\sqrt{h^2 + \beta^2}}{h}.$$

**证** 易知高维圆锥的母线长  $l = \sqrt{h^2 + \beta^2}$ , 而高维圆柱的母线与高相同, 都是  $h$ , 根据引理 2.5 并参考上一个推论, 它们的侧面积分别为

$$|S_{\text{锥}}| = \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1} \cdot \sqrt{h^2 + \beta^2} \cdot \beta^{n-2}, \quad |S_{\text{柱}}| = |\mathbb{S}^{n-2}| h\beta^{n-2},$$

侧面积比为

$$\frac{|S_{\text{锥}}|}{|S_{\text{柱}}|} = \frac{\sqrt{h^2 + \beta^2}}{h(n-1)}.$$

## 2.4 $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$ 型旋转曲面面积公式的另一个应用: 单位球面在直径方向上的面积分布

在三维空间中, 球冠的表面积是  $S = 2\pi rh$ , 其中  $r$  是球的半径,  $h$  是球冠的高, 可见, 当球的半径固定时, 球冠或球台的表面积与其高成正比. 换句话说, 等间距的两个平行平面, 如果都与某个球面相交, 不论它处于怎样的位置, 它们中间所夹该球面部分 (球冠, 或球台) 的面积一样大. 在一般  $n$  维欧氏空间中, 当球的半径固定时, “球冠” 的表面积与 “高” 还保持这样的关系吗? 事实上, 我们将看到只有三维时是正比关系, 其他维数下单位球面上的面积分布当维数增加时呈现向中间聚集的趋势, 并且在维数趋于无穷时面积分布的密度函数的极限是狄拉克函数.

$\mathbb{R}^n$  中的单位球面在某条直径方向上的面积分布情况, 是我们在对高维球面作平行剖分时发现了几何现象. 事实上, 由定理 2.3 知任意高维旋转曲面的面积在旋转轴方向上的分布函数 (即从负无穷到某个有限值  $t$  上相应旋转曲面的面积占总面积  $|S|$  的比例) 为

$$G_n(t) = \frac{|\mathbb{S}^{n-2}| \int_{-\infty}^t \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx}{|S|} = \frac{\int_{-\infty}^t \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx}, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

由分布函数和密度函数的关系  $g_n(t) = G'_n(t)$  知

$$g_n(t) = \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{|S|} \sqrt{1 + f'(t)^2} f^{n-2}(t) = \frac{\sqrt{1 + f'(t)^2} f^{n-2}(t)}{\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx}, \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (2.1)$$

由此我们有以下结果.

**命题 2.8**  $\mathbb{R}^n$  中的  $n-1$  维单位球面  $\mathbb{S}^{n-1}$  的面积在直径方向上分布的密度函数为

$$g_n(x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}, \quad x \in [-1, 1],$$

且在广义函数意义下  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \delta_0$ , 即对任意的  $\phi \in C_c^\infty[-1, 1]$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 g_n(x) \phi(x) dx = \phi(0)$ ; 其中  $B(\cdot, \cdot)$  表示欧拉贝塔函数,  $\delta_0$  表示支集在原点的狄拉克函数.

**证** 设单位球以函数  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  的图像为旋转母线, 以  $x$ -轴为旋转轴, 则将

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{和} \quad \sqrt{1+f'(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

代入上面的公式 (2.1), 知单位球面面积分布的密度函数是

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \sqrt{1+f'(x)^2} f^{n-2}(x) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}/\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}+\frac{n-2}{2}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}} = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}. \end{aligned}$$

下面证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \delta_0$ . 由于  $\int_{-1}^1 g_n(x) dx = 1$ , 所以只需证明对任意的  $\phi \in C_c^\infty[-1, 1]$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 g_n(x) (\phi(x) - \phi(0)) dx = 0.$$

定义函数

$$\eta(x) := \begin{cases} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}, & x \neq 0, \\ \phi'(0), & x = 0. \end{cases}$$

显然有  $\eta \in C^\infty([-1, 0) \cup (0, 1])$ ; 此外, 由

$$\begin{aligned} \eta'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta(x) - \eta(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \eta(0)x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(0) - \phi'(0)x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi'(x) - \phi'(0)}{2x} = \frac{\phi''(0)}{2}, \end{aligned}$$

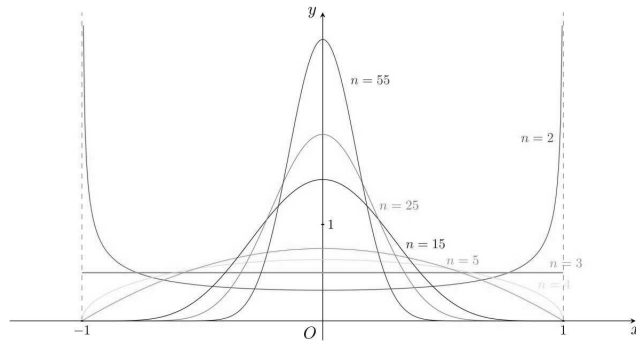
和

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \eta'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi'(x)x - \phi(x) + \phi(0)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi''(x)x + \phi'(x) - \phi'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi''(x)}{2} = \frac{\phi''(0)}{2}, \end{aligned}$$

可得  $\eta$  在 0 处连续可导, 则  $\eta \in C^1[-1, 1]$ . 因此我们有

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-1}^1 g_n(x)(\phi(x) - \phi(0))dx \right| \\
 &= \left| \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{n-3}{2}}(\phi(x) - \phi(0))dx \right| \\
 &= \left| \frac{1}{-(n-1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 \left((1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}\right)' \eta(x)dx \right| \\
 &= \left| \frac{1}{(n-1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} \eta'(x)dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} |\eta'(x)| dx \\
 &\leq \frac{1}{(n-1)B\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^1 |\eta'(x)| dx \\
 &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)}} \int_{-1}^1 |\eta'(x)| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),
 \end{aligned}$$

其中, 最后一个等式我们使用了分部积分公式, 最后一行我们使用了连续函数  $\eta'$  在有界闭区间上的有界性, 以及  $\lim_{k \rightarrow \infty} B\left(\frac{1}{2}, k\right) / \sqrt{\frac{\pi}{k}} = 1$  ( $k \rightarrow \infty$ ), 这是斯特林公式的简单推论.



由上面命题, 我们观察到  $\mathbb{R}^n$  中的  $n-1$  维单位球面  $\mathbb{S}^{n-1}$  的面积在任意直径方向上分布的密度函数  $g_n(x)$  和  $t$  分布的密度函数类似, 并且从图像上看和正态分布也很类似, 很自然地, 我们好奇是否存在函数使得对应的高维旋转曲面在其旋转轴方向上的面积分布正好是  $t$  分布或者正态分布. 这等价于求解相应的方程.

**注** 考虑以函数  $f \in C^1(I, \mathbb{R}_+)$  的图像为旋转母线的  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型旋转曲面  $S_f$ . 若  $S_f$  的面积在旋转轴方向上的分布服从  $t$  分布, 则  $f$  满足积分微分方程

$$\frac{\sqrt{1+f'(t)^2} f^{n-2}(t)}{\int_I \sqrt{1+f'(x)^2} f^{n-2}(x) dx} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

若  $S_f$  的面积在旋转轴方向上的分布服从正态分布, 则  $f$  满足积分微分方程

$$\frac{\sqrt{1+f'(t)^2}f^{n-2}(t)}{\int_I \sqrt{1+f'(x)^2}f^{n-2}(x)dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

我们也很容易有下面的观察:

注 欧氏空间中  $n$  维单位球  $B_1^n$  的体积在直径方向上分布的密度函数

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{|B_1^{n-1}| \int_{-\infty}^x f^{n-1}(t)dt}{|V|} \right) = \frac{|B_1^{n-1}|}{|V|} f^{n-1}(x) = \frac{|B_1^{n-1}|}{|B_1^n|} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} \\ &= \frac{1}{B(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2})} (1-x^2)^{\frac{n-1}{2}} = g_{n+2}(x), \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

其中  $g_{n+2}(x)$  是  $n+1$  维单位球面  $S^{n+1}$  的面积在直径方向上分布的密度函数. 也就是说, 在直径方向上,  $n+1$  维单位球面的面积分布和  $n$  维单位球体的体积分布完全相同 (这里可以举一个非常简单的例子, 二维球面的面积分布和一维“球体”/直线段的“体积”/长度分布都是恒同分布). 因此, 当维数趋于无穷时它们的密度函数的极限也都是狄拉克函数, 即在广义函数意义下

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \delta_0.$$

鉴于单位球的体积和单位球面的面积都会随着维数增加迅速地趋于零, 本节叙述的这种向中心聚集、极限是狄拉克函数的面积/体积分布特征.

### 3 $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$ 型旋转曲面

#### 3.1 $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$ 型旋转曲面的定义以及它的面积

可以设想的其他类型的高维旋转曲面还有很多, 鉴于篇幅, 本文我们仅再给出如下的  $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$  型旋转曲面, 它是我们定义 2.2 给出的  $\mathbb{R} \times S^{n-2}$  型旋转曲面的某种直接推广.

**定义 3.1** ( $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$  型旋转曲面) 设  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k \leq n-1$ ) 中的曲面  $\sigma$  与  $k$  维子空间  $V$  在  $\mathbb{R}^n$  的同一个  $k+1$  维子空间里, 并且在其中  $\sigma$  在  $V$  的单侧. 若对任给的点  $P \in \sigma$ , 都存在唯一的点  $Q \in V$ , 和过  $P, Q$  点与曲面  $V$  垂直的  $n-k$  维子空间  $\alpha_P$ , 则在  $\alpha_P$  上与  $Q$  的距离同  $P$  与  $Q$  距离相等的点的集合, 是以  $Q$  为心, 以  $|P-Q|$  为半径的  $n-k-1$  维球面  $S_{|P-Q|}^{n-k-1}(Q)$ . 我们称所有  $S_{|P-Q|}^{n-k-1}(Q)$  的并集

$$S = \bigcup_{Q \in V} S_{|P-Q|}^{n-k-1}(Q)$$

为  $\mathbb{R}^n$  中的一个  $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$  型旋转曲面, 并称子空间  $V$  为它的轴空间, 称曲面  $\sigma$  为它的母曲面.

不失一般性, 下面我们只讨论空间  $\mathbb{R}^n$  中轴空间是由前  $k$  个坐标轴  $x_1, x_2, \dots, x_k$  张成的  $k$  维线性子空间  $\mathbb{R}^k$ , 母曲面是定义在开区域  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  上函数  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$  的图像的  $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$  型旋转曲面; 为简单起见, 下文我们将称其为以函数  $u$  为母函数的  $\mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$  型旋转曲面. 同之前类似, 我们首先得到下面的  $\mathbb{R}^k \times S^{n-2}$  型旋转曲面面积定理.



其中  $Dv = D_\theta v \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k-1)}$ ,  $Du = D_x u \in \mathbb{R}^k$ , 则雅可比行列式

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(J^T J)} &= \sqrt{\det \left( \begin{pmatrix} I_k & Duv^T \\ 0 & u(Dv)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ v(Du)^T & uDv \end{pmatrix} \right)} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} I_k + |v|^2 Du(Du)^T & uDuv^T Dv \\ u(Dv)^T v(Du)^T & u^2 (Dv)^T Dv \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} I_k + Du(Du)^T & 0 \\ 0 & u^2 (Dv)^T Dv \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-1} \sqrt{\det [(Dv)^T Dv]} \\ &= \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-1} \sin^{n-k-2} \theta_{n-k-1} \sin^{n-k-3} \theta_{n-k-2} \cdots \sin \theta_2, \end{aligned}$$

其中我们用到了  $|v|^2 = 1$  和  $(Dv)^T v = 0$ , 后者是因为  $v \in \mathbb{S}^{n-k-1} \subset \mathbb{R}^{n-k}$ ,  $\sum_{i=1}^{n-k} v_i^2 = |v|^2 = 1$ ,

两边同时求导, 便有  $2 \sum_{i=1}^{n-k} v_i \partial_j v_i = 0$ ,  $(Dv)^T v = v^T Dv = 0$ ; 另外,

$$\sqrt{\det [(Dv)^T Dv]} = \sin^{n-k-2} \theta_{n-k-1} \sin^{n-k-3} \theta_{n-k-2} \cdots \sin \theta_2$$

正是标准的  $n-k-1$  维球面坐标变换的雅可比行列式, 参见上面的注记 2.1.

因此,  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面  $S$  的面积为

$$\begin{aligned} |S| &= \int_{\Omega \times Q} \sqrt{\det(J^T J)} d(\theta, x) \\ &= \int_{\Omega} \int_Q \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-1} \sqrt{\det [(Dv)^T Dv]} d\theta dx \\ &= \int_Q \sqrt{\det [(Dv(\theta))^T Dv(\theta)]} d\theta \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du(x)|^2} u^{n-k-1}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-k-1}} dS \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-1} dx \\ &= |\mathbb{S}^{n-k-1}| \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-1} dx. \end{aligned}$$

### 3.2 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$ 型极小旋转曲面与极小旋转曲面方程

我们知道悬链面是三维空间中唯一的非平坦的旋转极小曲面, 它是由欧拉于 1744 年发现, 并由梅斯尼埃 (J. B. Meusnier) 于 1776 年证明其极小性 [10]. 本节我们来研究类似的高维问题. 事实上, 在上节得到了  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的面积公式后, 人们自然而然会想到研究相应面积泛函的变分问题.

设  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  是开区域,  $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ . 对任给的

$$v \in \mathcal{S} := \left\{ v : \Omega \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}_+ : v = \varphi \text{ 于 } \partial\Omega \right\}$$

考虑

$$I[v] := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Dv(x)|^2} v^{n-k-1}(x) dx.$$

我们可以很容易得到定理 3.3.

**定理 3.3** 若存在  $u \in \mathcal{S}$  满足  $I[u] = \inf_{v \in \mathcal{S}} I[v]$ , 则

$$\operatorname{div} \left( \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du \right) - (n-k-1) \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-2} = 0$$

于  $\Omega$ . 这其实是相应变分问题的欧拉 - 拉格朗日方程, 我们称其为极小旋转曲面方程.

**证** 对于任给的  $\psi \in C_0^2(\Omega)$  以及任给的  $t \in \mathbb{R}$ , 我们有  $u + t\psi \in \mathcal{S}$ , 且  $f(t) := I[u + t\psi]$  满足  $f \in C^1(\mathbb{R})$  和  $I[u] = f(0) = \inf_{t \in \mathbb{R}} f(t)$ , 则由费马原理知  $f'(0) = 0$ , 即

$$\begin{aligned} 0 = f'(0) &= \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du + tD\psi|^2} (u + t\psi)^{n-k-1} dx \right) \Big|_{t=0} \\ &= \int_{\Omega} \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du \cdot D\psi + (n-k-1) \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-2} \psi dx \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left( \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du \right) \psi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \psi Du \cdot NdS \\ &\quad + \int_{\Omega} (n-k-1) \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-2} \psi dx \\ &= \int_{\Omega} \left( - \operatorname{div} \left( \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du \right) + (n-k-1) \sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-2} \right) \psi dx. \end{aligned}$$

由  $\psi$  的任意性即得所证.

我们这样得到的极小旋转曲面方程是一个比较复杂的非线性方程. 为了加深对它的理解, 我们先观察它的径向对称解.

**命题 3.4** 设  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\Omega = B_R^k \subset \mathbb{R}^k$  是半径为  $R > 0$  的  $k$  维开球. 若存在  $\phi : [0, R] \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}_+$ , 使得  $u(x) = \phi(|x|)$  满足上述的极小旋转曲面方程, 则  $\phi(r)$  满足二阶常微分方程

$$\frac{\phi\phi_{rr}}{1 + \phi_r^2} + \frac{(k-1)\phi\phi_r}{r} = n-k-1 \quad (3.1)$$

或等价地

$$r\phi\phi_{rr} + (1 + \phi_r^2) ((k-1)\phi\phi_r - (n-k-1)r) = 0.$$

**证** 记  $m := n-k-1$ . 因为

$$Du(x) = \phi'(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad 1 + |Du|^2 = 1 + \phi_r^2,$$

所以

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{div} \left( \frac{u^m}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \right) - m\sqrt{1+|Du|^2} u^{m-1} \\
&= \operatorname{div} \left( \frac{\phi^m \phi_r}{r\sqrt{1+\phi_r^2}} x \right) - m\sqrt{1+\phi_r^2} \phi^{m-1} \\
&= r \left( \frac{\phi^m \phi_r}{r\sqrt{1+\phi_r^2}} \right)_r + \frac{k\phi^m \phi_r}{r\sqrt{1+\phi_r^2}} - m\sqrt{1+\phi_r^2} \phi^{m-1} \\
&= r \left( \frac{m\phi^{m-1}\phi_r^2 + \phi^m \phi_{rr}}{r\sqrt{1+\phi_r^2}} - \frac{\phi^m \phi_r (1+\phi_r^2 + r\phi_r \phi_{rr})}{r^2(1+\phi_r^2)^{3/2}} \right) + \frac{k\phi^m \phi_r}{r\sqrt{1+\phi_r^2}} - m\sqrt{1+\phi_r^2} \phi^{m-1} \\
&= \frac{\phi^{m-1}}{\sqrt{1+\phi_r^2}} \left( \frac{\phi \phi_{rr}}{1+\phi_r^2} + \frac{(k-1)\phi \phi_r}{r} - m \right) \\
&= \frac{\phi^{m-1}}{r(1+\phi_r^2)^{3/2}} (r\phi \phi_{rr} + (1+\phi_r^2)((k-1)\phi \phi_r - (n-k-1)r),
\end{aligned}$$

其中第三个等式我们使用了下面的求散度的公式:

$$\operatorname{div}(f(|x|)x) = \sum_{i=1}^k \partial_{x_i}(f(|x|)x_i) = \sum_{i=1}^k \left( f'(|x|) \frac{x_i}{|x|} x_i + f(|x|) \right) = |x|f'(|x|) + kf(|x|) = rf_r + kf,$$

其中  $f: I \subset \mathbb{R} \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ ,  $r = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}^k$ . 即得所证.

注 另外一种算法是先展开散度, 然后代入径向函数的各阶导数. 即

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{div} \left( \frac{u^m}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \right) - m\sqrt{1+|Du|^2} u^{m-1} \\
&= \frac{mu^{m-1}|Du|^2 + u^m \Delta u}{\sqrt{1+|Du|^2}} - \frac{u^m (Du)^T D^2 u Du}{(1+|Du|^2)^{3/2}} - m\sqrt{1+|Du|^2} u^{m-1} \\
&= \frac{u^m}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left( \Delta u - \frac{(Du)^T D^2 u Du}{1+|Du|^2} - \frac{m}{u} \right) \tag{3.2} \\
&= \frac{\phi^m}{\sqrt{1+\phi_r^2}} \left( \phi_{rr} + (k-1) \frac{\phi_r}{r} - \frac{\phi_r \frac{x^T}{|x|} \left( \frac{\phi_r}{r} I_k + \left( \phi_{rr} - \frac{\phi_r}{r} \right) \frac{xx^T}{|x|^2} \right) \phi_r \frac{x}{|x|}}{1+\phi_r^2} - \frac{m}{\phi} \right) \\
&= \frac{\phi^m}{\sqrt{1+\phi_r^2}} \left( \phi_{rr} + \frac{(k-1)\phi_r}{r} - \frac{\phi_r^2 \phi_{rr}}{1+\phi_r^2} - \frac{m}{\phi} \right) \\
&= \frac{\phi^{m-1}}{\sqrt{1+\phi_r^2}} \left( \frac{\phi \phi_{rr}}{1+\phi_r^2} + \frac{(k-1)\phi \phi_r}{r} - m \right),
\end{aligned}$$

其中第四个等式我们使用了

$$\begin{aligned} u(x) &= \phi(|x|), \quad r = |x|, \quad Du = \phi'(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad 1 + |Du|^2 = 1 + \phi_r^2, \\ D^2u &= \phi''(|x|) \frac{xx^T}{|x|^2} + \phi'(|x|) \frac{I_k}{|x|} - \phi'(|x|) \frac{xx^T}{|x|^3} = \frac{\phi_r}{r} I_k + \left( \phi_{rr} - \frac{\phi_r}{r} \right) \frac{xx^T}{|x|^2}, \\ \Delta u &= \phi_{rr} + \frac{(k-1)\phi_r}{r}. \end{aligned}$$

注 当  $n = 3, k = 1$  时, 方程 (3.1) 化简为  $\phi\phi_{rr} - \phi_r^2 = 1$ , 容易解得  $\phi(r) = C \cosh \frac{r}{C}$  ( $C$  为常数), 这正是经典的悬链面的情形. 进一步地, 对于任给的  $n \geq 2$ , 当  $k = 1$  时 (这其实就是  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}$  型极小旋转曲面), 方程 (3.1) 化简为  $\phi\phi_{rr} = (n-2)(1 + \phi_r^2)$ , 该方程可以降阶求解, 对于该类情形, 文献中是有一些结论的, 参见 [6].

### 3.3 $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$ 型旋转曲面的平均曲率与高斯曲率

我们知道, 若函数  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  的图像, 在满足给定边界条件的所有函数类中, 面积最小, 则  $u$  满足极小曲面方程

$$\operatorname{div} \left( \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0,$$

而这又等价于  $u$  的图像在  $\mathbb{R}^{n+1}$  中的平均曲率等于零. 这一节我们来说明极小旋转曲面也有类似的性质. 首先, 我们来计算一般  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的平均曲率.

**定理 3.5** 设  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq n-1$ , 则以函数  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}_+$  为母函数的  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面在  $\mathbb{R}^n$  中关于单位法向量的平均曲率

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{(n-1)\sqrt{1 + |Du|^2}} \left[ \frac{(1 + |Du|^2)\Delta u - (Du)^T D^2u Du}{1 + |Du|^2} - \frac{n-k-1}{u} \right] \\ &= \frac{1}{(n-1)u^{n-k-1}} \left[ \operatorname{div} \left( \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du \right) - (n-k-1)\sqrt{1 + |Du|^2} u^{n-k-2} \right]. \end{aligned}$$

证 采用同定理 3.2 完全一样的设定与记号, 我们有

$$J := \frac{\partial(x, y)}{\partial(x, \theta)} = D_{(x, \theta)} \begin{pmatrix} x \\ u(x)v(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ v(Du)^T & uDv \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)}, \quad J^T = \begin{pmatrix} I_k & Du v^T \\ 0 & u(Dv)^T \end{pmatrix},$$

则我们可以计算第一基本型和它的逆分别为

$$\begin{aligned} G &= J^T J = \begin{pmatrix} I_k + Du(Du)^T & 0 \\ 0 & u^2(Dv)^T Dv \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}, \\ G^{-1} &= \begin{pmatrix} I_k - \frac{Du(Du)^T}{1 + |Du|^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2} ((Dv)^T Dv)^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中我们使用了  $v^T v = 1$ . 因为  $J^T \begin{pmatrix} -Du \\ v \end{pmatrix} = 0$ , 所以我们不妨先考虑法向量  $N := \begin{pmatrix} -Du(x) \\ v(\theta) \end{pmatrix}$  对应的第二基本型. 由于  $D_{(x,\theta)} N = \begin{pmatrix} -D^2u & 0 \\ 0 & Dv \end{pmatrix}$ , 因此, 对应于  $N$  的第二基本型

$$H_N = -J^T D_{(x,\theta)} N = \begin{pmatrix} D^2u & 0 \\ 0 & -u(Dv)^T Dv \end{pmatrix},$$

其中我们使用了  $v^T Dv = 0$ . 综上可得

$$G^{-1}H_N = \begin{pmatrix} \frac{(1+|Du|^2)I_k - Du(Du)^T}{1+|Du|^2} D^2u & 0 \\ 0 & -\frac{I_{n-k-1}}{u} \end{pmatrix}.$$

因此, 对应于法向量  $N = \begin{pmatrix} -Du \\ v \end{pmatrix}$  的平均曲率

$$\mathcal{H}_N = \frac{\text{tr}(G^{-1}H_N)}{n-1} = \frac{1}{n-1} \left[ \frac{(1+|Du|^2)\Delta u - (Du)^T D^2u Du}{1+|Du|^2} - \frac{n-k-1}{u} \right].$$

由公式  $H_N = \frac{\partial^2(x,y)}{\partial(x,\theta)^2} N = (\partial_{ij}(x,y)^T N)$  知, 同法向量  $fN = f(x,\theta)N(x,\theta)$  对应的第二基本型和平均曲率分别为  $H_{fN} = fH_N$  和  $\mathcal{H}_{fN} = f\mathcal{H}_N$ . 因此,

$$\mathcal{H}_{N/|N|} = \frac{1}{(n-1)\sqrt{1+|Du|^2}} \left[ \frac{(1+|Du|^2)\Delta u - (Du)^T D^2u Du}{1+|Du|^2} - \frac{n-k-1}{u} \right].$$

注 (1) 对应于法向量

$$\tilde{N} = (n-1)u^{n-k-1} \frac{N}{|N|} = \frac{(n-1)u^{n-k-1}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \begin{pmatrix} -Du \\ v \end{pmatrix}$$

的平均曲率

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\tilde{N}} &= \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left( \frac{(1+|Du|^2)\Delta u - (Du)^T D^2u Du}{1+|Du|^2} - \frac{n-k-1}{u} \right) \\ &= \text{div} \left( \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \right) - (n-k-1)\sqrt{1+|Du|^2} u^{n-k-2}, \end{aligned}$$

这正是我们由变分法计算出来的极小旋转曲面方程的左端, 可以参照 (3.2).

(2) 对应于单位法向量  $N/|N|$  的高斯曲率

$$\mathcal{K}_{N/|N|} = \det(G^{-1}H_{N_0}) = \frac{(-1)^{n-k-1}}{u^{n-k-1}(1+|Du|^2)^{(n+1)/2}} \det D^2u.$$

(3) 显然, 当  $k = n - 1$  时, 我们将得到经典的函数图像类型的预定平均曲率方程 (包括极小曲面方程) 和预定高斯曲率方程.

极小旋转曲面方程推广了传统的极小曲面方程, 并且为非参数极小曲面理论提供了新的更一般的研究框架; 上述几种退化椭圆方程的解的存在唯一性、正则性与刚性问题是很有价值的问题, 它们和与之对应的经典问题有所类似但是也很不同; 由于篇幅问题, 对此本文不再展开.

然后, 我们很容易得到下述推论.

**推论 3.6** 函数  $u: \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}_+$  满足极小旋转曲面方程

$$\operatorname{div} \left( \frac{u^{n-k-1}}{\sqrt{1+|Du|^2}} Du \right) - (n-k-1) \sqrt{1+|Du|^2} u^{n-k-2} = 0,$$

当且仅当以  $u$  为母函数的  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面在  $\mathbb{R}^n$  中的平均曲率恒为零.

**推论 3.7** 以径向函数  $u(x) = \phi(|x|)$  为母函数的  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型常高斯曲率 ( $\mathcal{K} \equiv \kappa_0$ , 对应于上述单位法向量  $N/|N|$ , 在此  $N = (-\phi'(|x|)x^T/|x|, v^T(\theta))^T$ ) 旋转曲面满足下述以  $\phi(r)$  为未知函数的二阶常微分方程

$$\phi_r^{k-1} \phi_{rr} - (-1)^{n-k-1} \kappa_0 r^{k-1} \phi^{n-k-1} (1 + \phi_r^2)^{(n+1)/2} = 0. \quad (3.3)$$

**注** 我们知道, 嵌入在三维欧氏空间的常高斯曲率的二维曲面, 球面、环面、平面、伪球面或称曳物面, 都是旋转曲面. 与此类似, 上述推论刻画了以径向函数为母函数的常高斯曲率  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k-1}$  型旋转曲面的存在性.

(1) 设  $R > 0$  是一个常数, 不难验证: 当  $\kappa_0 = (-1)^{n-1}/R^{n-1}$  时,  $\phi(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$  满足方程 (3.3) (对应法向量  $-N/|N|$  的高斯曲率则为  $\mathcal{K}_{-N/|N|} \equiv 1/R^{n-1}$ ).

(2) 当高斯曲率  $\kappa_0 = 0$  时,  $\phi(r) = ar + b$  满足方程 (3.3), 其中  $a, b$  为任意常数.

(3) 当高斯曲率  $\kappa_0 < 0$  时, 对于一般偶数维 (即  $n-1 > 2$  是偶数) 是否也存在类似伪球面一样的解, 鉴于方程 (3.3) 的高度非线性, 目前我们不是很清楚.

**证** 由简单的计算可得

$$\begin{aligned} Du(x) &= \phi'(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad 1 + |Du|^2 = 1 + \phi_r^2, \\ D^2u &= \phi''(|x|) \frac{xx^T}{|x|^2} + \phi'(|x|) \frac{I_k}{|x|} - \phi'(|x|) \frac{xx^T}{|x|^3} = \frac{\phi_r}{r} I_k + \left( \phi_{rr} - \frac{\phi_r}{r} \right) \frac{xx^T}{|x|^2}, \quad \det D^2u = \frac{\phi_{rr} \phi_r^{k-1}}{r^{k-1}}, \\ \kappa_0 \equiv \mathcal{K} &= \frac{(-1)^{n-k-1}}{u^{n-k-1} (1 + |Du|^2)^{(n+1)/2}} \det D^2u = \frac{(-1)^{n-k-1} \phi_{rr} \phi_r^{k-1}}{r^{k-1} \phi^{n-k-1} (1 + \phi_r^2)^{(n+1)/2}}. \end{aligned}$$

## 参 考 文 献

- [1] 陈纪修, 金路, 於崇华. 数学分析 (上册) [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [2] 李成章, 黄玉民. 数学分析 (下册) [M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2007.
- [3] 徐森林, 薛春华. 数学分析 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [4] Zorich V A. Mathematical analysis II [M]. Vancouver: Springer, 2016.
- [5] 朱士信, 唐烁, 查看清. 高等数学 (下册) [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [6] 姜磊. 关于欧氏空间中旋转对称的极小超曲面 [J]. 北京: 数学的实践与认识, 1989 (1): 92-94.

- [7] Liu Y H, Dai Y C. Rotational hypersurfaces with constant Gauss-Kronecker curvature[J]. Shanghai: Chinese Annals of Mathematics, Series B, 2022, 43(3): 343–358.
- [8] Fitzpatrick P. Advanced calculus [M]. Providence Rhode Island: American Mathematical Society, 2009.
- [9] Rudin W. Principles of mathematical analysis [M]. New York: McGraw-Hill Education, 1976.
- [10] Colding T H, Minicozzi W. A course in minimal surfaces [M]. Providence Rhode Island: American Mathematical Society, 2011.

## HIGH-DIMENSIONAL SURFACE OF REVOLUTION

LI Ying, LI Zhi-su

*(School of Mathematics & Center for Nonlinear Studies,  
Northwest University, Xi'an 710127, China)*

**Abstract:** In this paper, we consider a co-dimensional one high-dimensional surface of revolution in Euclidean space. By developing a new kind of function composition, dimensional decomposition and block matrix recursion argument, we study systematically a series of problems related to the area and curvature of this new kind of surface. While the generating function is multi-variable, the concept of this high-dimensional surface of revolution is proposed for the first time. We give the area formula of the high-dimensional surface of revolution and some of its simple applications. We find that, along with the direction of any diameter, the area distribution of the unit sphere is exactly as the same as the volume distribution of the one-dimensional lower unit sphere, and the limit of their density functions is the Dirac function when the dimension tends to infinity. By studying the variational problem of the corresponding area functional, we obtain the so-called minimal surface of revolution equation. We prove that the mean curvature of a surface of revolution corresponding to the generating function satisfying the minimal surface of revolution equation is equal to zero. The minimal surface of revolution equation is a generalization of the traditional minimal surface equation, which provides a new and more general research framework for the theory of the nonparametric minimal surface; by calculating the ordinary differential equation corresponding to the radially symmetric solution, we study some of its simple special solutions. We also briefly discuss the corresponding prescribed mean curvature and prescribed Gaussian curvature problems.

**Keywords:** high-dimensional surface of revolution; minimal surface of revolution equation; the area distribution of the unit sphere; mean curvature; minimal surface equations

**2010 MR Subject Classification:** 14Q10; 53A10; 53A05; 53A07