Vol. 43 (2023)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

外三角范畴中的相对合冲对象

陈　铭, 张培雨
(安徽工程大学数理与金融学院, 安徽 芜湖 241000)

摘 要:　本文研究了外三角范畴中相对合冲对象和粘合 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 中相对合冲对象的保持问题. 利用相对同调的方法, 获得了相对合冲对象的一些性质和它的等价刻画, 推广了阿贝尔范畴和三角范畴中一些结果, 给出了相对投射维数的一个等价刻画. 主要证明了: 在满足一定条件时, $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的相对合冲对象可以诱导出 $\mathcal{A}$ 中的相对合冲对象. 反之, 对于 $\mathcal{A}$ 中的相对合冲对象也可以诱导出 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的相对合冲对象.

关 键 词:　外三角范畴; 相对合冲对象; 粘合
MR(2010) **主题分类号:**　16E05; 16E10; 18A40　　　　**中 图 分 类 号:**　O154.2
文 献 标 识 码:　A　　　　**文 章 编 号:**　0255-7797(2023)04-0323-13

1 引言

正合范畴和三角范畴是两个基本的代数结构, Nakao 和 Palu 为了统一正合范畴和三角范畴, 在 [1] 中提出了外三角范畴的概念, 给出了一个既不是正合范畴也不是三角范畴的外三角范畴的例子 ([1] 和 [2]), 同时证明了满足一定条件的余挠对与容许的模结构之间存在着一个双射. 关于外三角范畴的性质研究具体详见 [3–9] 等.

范畴的粘合（主要是三角范畴和阿贝尔范畴）概念提供了将一个范畴分解为两个子范畴、又将两个子范畴粘合成一个大的范畴的方法. 事实上, 这种分解和粘合是以极强的方式进行的, 而且其中存在着高度的对称. 它是由三个范畴和六个函子组成的一种特殊的代数结构, 是近年来代数学分支中热门的课题之一. 三角范畴的粘合最早由 Beilinson, Bernstein 和 Deligne[10] 在研究奇异空间 perverse 层的导出范畴时引入的. 其研究结果也是丰富的, 例如, 陈 [11] 给出了在一个三角范畴的粘合中如何从中间范畴中的余挠对诱导出两边范畴的余挠对, 以及从两边范畴的余挠对如何粘贴成中间范畴的余挠对. 马和黄在阿贝尔范畴的粘合中考虑了挠对 [12] 和倾斜模 [13] 的粘贴关系. 关于粘合的其他结论可参看 [14–18] 等.

类似于阿贝尔范畴和三角范畴的粘合, 汪等作者提出了外三角范畴粘合的概念, 并平行给出了许多 [11] 中的结论. 由于外三角范畴是三角范畴推广, 我们自然地考虑: 在外三角范畴的粘合中, 是否有类似于三角范畴粘合的结论? 在本篇论文中, 我们主要考虑外三角范畴中的 Gorenstein 合冲模 [19], 并称其为 Gorenstein 合冲对象 (或相对合冲对象), 以及它在外三角范畴粘合中的保持问题. 本文主要工作的概况如下: 在第 2 部分, 我们首先回忆一些定义和外三角范畴的性质. 主要给出了外三角范畴中 Gorenstein 合冲的定义和 Gorenstein 投射维数的一个等价刻画. 第 3 部分, 我们主要证明了: 在满足一定条件时, $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的 Gorenstein

*收稿日期: 2022-04-01　　　接收日期: 2022-05-30
基金项目: 2020 年安徽工程大学中青年拔尖人才项目基金资助.
作者简介: 陈铭 (1997–), 女, 黑龙江齐齐哈尔, 硕士研究生, 主要研究方向: 同调代数.
通讯作者: 张培雨 (1988–), 男, 安徽芜湖, 副教授，主要研究方向: 同调代数与代数表示理论.

合冲对象可以诱导出 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 合冲对象. 反之, 对于 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 合冲对象也可以诱导出 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 中的 Gorenstein 合冲对象. 在本文中, 我们总假设 $\mathcal{C}$ 为一个加法范畴.

2 相对合冲对象

首先我们回顾下 [1] 和 [5] 中的一些基本概念.

定义 2.1 ([1, 定义 2.1]) 假设 $\mathcal{C}$ 上有加法双函子 $\mathbb{E}$: $C^{op}\times C\longrightarrow \mathrm{Ab}$, 其中 Ab 表示阿贝尔群范畴. 对于任意两个对象 $A,C\in\mathcal{C}$, 称元素 $\delta\in\mathbb{E}(C,A)$ 是一个 $\mathbb{E}$- 扩张. 一般情况下, 一个 $\mathbb{E}$- 扩张通常用一个三元组 (A,δ,C) 表示. 如果 $\delta=0$, 我们则将其称为可裂的 $\mathbb{E}$- 扩张.

对于任意两个态射 $a\in\mathcal{C}(A,A')$ 和 $c\in\mathcal{C}(C',C)$, 我们有两个 $\mathbb{E}$- 扩张, 分别是 $\mathbb{E}(C,a)(\delta)\in\mathbb{E}(C,A')$ 和 $E(c,A)(\delta)\in\mathbb{E}(C',A)$, 简单地记为 $a_*\delta$ 和 $c^*\delta$. 两个 $\mathbb{E}$- 扩张之间的态射是一个态射对 (a,c): $\delta\longrightarrow\delta'$, 其中 $a\in\mathcal{C}(A,A')$ 和 $c\in\mathcal{C}(C,C')$ 且满足 $a_*\delta=c^*\delta'$.

定义 2.2 ([1, 定义 2.7]) 假设对任意 $A,C\in\mathcal{C}$. 如果存在一个同构 $b\in\mathcal{C}(B,B')$ 使得 $bx=x'$ 和 $y'b=y$ 成立, 那么称两序列 $A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C$ 和 $A\xrightarrow{x'}B'\xrightarrow{y'}C$ 是等价的, 并且用 $[\,A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\,]$ 表示与序列 $A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C$ 等价的类.

定义 2.3 ([1, 定义 2.8]) (1) 对于任意 $A,C\in\mathcal{C}$, 记 $0=[\,A\xrightarrow{(1,0)}A\bigoplus C\xrightarrow{(0,1)}C\,]$.

(2) 对于两个等价类 $[\,A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\,]$ 和 $[\,A'\xrightarrow{x'}B'\xrightarrow{y'}C'\,]$, 记

$$[A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C]\bigoplus[A'\xrightarrow{x'}B'\xrightarrow{y'}C']=[A\bigoplus A'\xrightarrow{x\oplus x'}B\bigoplus B'\xrightarrow{y\oplus y'}C\bigoplus C'].$$

定义 2.4 ([1, 定义 2.9]) 设 $\mathfrak{s}$ 是一个映射: $\mathbb{E}(C,A)\longrightarrow[\,A\longrightarrow X\longrightarrow C\,]$, 如果它满足条件 $(*)$, 那么把 $\mathfrak{s}$ 叫做 $\mathbb{E}$ 的实现. 若 $\mathfrak{s}(\delta)=[\,A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\,]$, 则称等价类

$$[\,A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\,]$$

为 δ 的一个实现.

$(*)$ 假设 $\delta\in\mathbb{E}(C,A)$ 和 $\delta'\in\mathbb{E}(C',A')$ 是两个 $\mathbb{E}$- 扩张, 且 $\mathfrak{s}(\delta)=[\,A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\,]$ 和 $\mathfrak{s}(\delta')=[\,A'\xrightarrow{x'}B'\xrightarrow{y'}C'\,]$. 如果对任意态射 (a,c): $\delta\longrightarrow\delta'$, 均存在 $b\in\mathcal{C}(B,B')$ 使得 $bx=x'a$ 和 $y'b=cy$. 在这种情况下, 称 (a,b,c) 是 (a,c) 的一个实现.

定义 2.5 ([1, 定义 2.10]) 称 $\mathbb{E}$ 的一个实现 $\mathfrak{s}$ 是可加的, 如果它满足下面两个条件:

(1) 对于任意的 $A,C\in\mathcal{C}$, 可裂 $\mathbb{E}$- 扩张 $0\in\mathbb{E}(C,A)$ 有 $\mathfrak{s}(0)=0$.

(2) 对于任意一对 $\mathbb{E}$- 扩张 δ 和 δ', 有 $\mathfrak{s}(\delta\oplus\delta')=\mathfrak{s}(\delta)\oplus\mathfrak{s}(\delta')$.

定义 2.6 ([1, 定义 2.12]) 我们称一个三元组 $(\mathcal{C},\mathbb{E},\mathfrak{s})$(简单地记为 $\mathcal{C}$) 是一个外三角范畴. 如果它满足以下四个条件:

(ET1) $\mathbb{E}$:$C^{op}\times C\longrightarrow \mathrm{Ab}$ 为一个加法函子.

(ET2) $\mathbb{E}$ 的实现 $\mathfrak{s}$ 是可加的.

(ET3) 对任意 $\delta\in\mathbb{E}(C,A)$ 和 $\delta'\in\mathbb{E}(C',A')$, 如果 $\mathfrak{s}(\delta)=[\,A\xrightarrow{x}B\xrightarrow{y}C\,]$ 和

$\mathfrak{s}(\delta') = [\ A' \xrightarrow{x'} B' \xrightarrow{y'} C'\ ]$, 那么对于下面交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, "y"] \arrow[d, "b"] & C \\ A' \arrow[r, "x'"] & B' \arrow[r, "y'"] & C' \end{tikzcd}$$

都存在一个的态射 (a, c): $\delta \longrightarrow \delta'$ 使得 (a, b, c) 是 (a, c) 的一个实现.

(ET3)$^{\mathrm{op}}$ (ET3) 的对偶.

(ET4) 设 $\mathfrak{s}(\delta) = [\ A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f'} D\ ]$, $\mathfrak{s}(\delta') = [\ B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{g'} F\ ]$, 则存在对象 $E \in \mathcal{C}$, 使得下图是可交换的.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & B \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g"] & D \arrow[d, "d"] \\ A \arrow[r, "h"] & C \arrow[r, "h'"] \arrow[d, "g'"] & E \arrow[d, "e"] \\ & F \arrow[r, equal] & F \end{tikzcd}$$

且有以下结论成立：

(1) $\mathfrak{s}(\delta'') = [\ A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{h'} E\ ]$;

(2) $\mathfrak{s}(\mathbb{E}(F, f')(\delta')) = [\ D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F\ ]$;

(3) $\mathbb{E}(d, A)(\delta'') = \delta$;

(4) $\mathbb{E}(E, f)(\delta'') = \mathbb{E}(e, B)(\delta')$, (f, id_C, e) 是 (f, e) 的一个实现.

(ET4)$^{\mathrm{op}}$ (ET4) 的对偶.

在定义 2.6 中, 如果序列 $\delta \in \mathbb{E}(C, A)$ 的实现为 $[\ A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C\ ]$, 我们称 $(\ A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C\ , \delta)$ 为一个 $\mathbb{E}$- 三角, 并简单地记作

$$A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C \overset{\delta}{\dashrightarrow} .$$

此时称序列 $A \xrightarrow{x} B \xrightarrow{y} C$ 是一个 conflation, x 是一个 inflation, y 是一个 deflation.

定义 2.7 ([1, 推论 3.12]) 假设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴. 对于任意一个 $\mathbb{E}$- 三角 $A \longrightarrow B \longrightarrow C \overset{\delta}{\dashrightarrow}$, 下列自然变换的序列是正合的.

$$\mathcal{C}(C, -) \longrightarrow \mathcal{C}(B, -) \longrightarrow \mathcal{C}(A, -) \longrightarrow \mathbb{E}(C, -) \longrightarrow \mathbb{E}(B, -) \longrightarrow \mathbb{E}(A, -)\ ,$$

$$\mathcal{C}(-, A) \longrightarrow \mathcal{C}(-, B) \longrightarrow \mathcal{C}(-, C) \longrightarrow \mathbb{E}(-, A) \longrightarrow \mathbb{E}(-, B) \longrightarrow \mathbb{E}(-, C)\ .$$

此后, 我们总假设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴. 下面条件详见 [1, Condition 5.8].

定义 2.8 (WIC) 假设 $\mathcal{C}$ 是一个外三角范畴, f 和 g 是 $\mathcal{C}$ 中两个可复合的态射, 并且满足下列条件.

(1) 如果 gf 为一个 inflation, 则 f 也为一个 inflation.

(2) 如果 gf 为一个 deflation, 则 g 也为一个 deflation.

在本文中, 我们总假设 [5] 中 $\mathbb{E}$- 三角的真类是指外三角范畴中所有的 $\mathbb{E}$- 三角.

定义 2.9 ([5, 定义 4.1]) 称对象 $P\in\mathcal{C}$ 是投射的, 如果对任意 $\mathbb{E}$- 三角 $A\longrightarrow B\longrightarrow C\overset{\delta}{\dashrightarrow}$ 诱导的阿贝尔群序列 $0\longrightarrow\mathcal{C}(P,\ A)\longrightarrow\mathcal{C}(P,\ B)\longrightarrow\mathcal{C}(P,\ C)\longrightarrow 0$ 是正合的. 对偶地, 我们可定义内射对象.

我们记 $\mathcal{P}(\mathcal{C})(\mathcal{I}(\mathcal{C}))$ 为 $\mathcal{C}$ 中所有投射 (内射) 对象组成的类. 称外三角范畴 $\mathcal{C}$ 是有足够多投射的, 如果对任意对象 $A\in\mathcal{C}$, 都存在 $\mathbb{E}$- 三角 $B\longrightarrow P\longrightarrow A\dashrightarrow$, 其中 $P\in\mathcal{P}(\mathcal{C})$. 对偶地, 我们可定义 $\mathcal{C}$ 是有足够多内射的.

定义 2.10 ([5, 定义 4.4]) 设 $\mathbf{X}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个无界复形

$$\mathbf{X}:\ \cdots\longrightarrow X_1\xrightarrow{d_1}X_0\xrightarrow{d_0}X_{-1}\xrightarrow{d_{-1}}\cdots$$

若对于任意的正整数 n 都存在 $\mathbb{E}$- 三角 $K_{n+1}\xrightarrow{g_n}X_n\xrightarrow{f_n}K_n\overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$ 使得 $d_n=g_{n-1}f_n$, 则称复形 $\mathbf{X}$ 是一个正合复形.

定义 2.11 ([5, 定义 4.5]) 设 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象类. 一个 $\mathbb{E}$- 三角 $A\longrightarrow B\longrightarrow C\dashrightarrow$ 称为 $\mathcal{C}(-,\ \mathcal{W})$- 正合的, 如果它诱导的阿贝尔群序列 $0\longrightarrow\mathcal{C}(C,\ W)\longrightarrow\mathcal{C}(B,\ W)\longrightarrow\mathcal{C}(A,\ W)\longrightarrow 0$ 是正合的, 其中 $W\in\mathcal{W}$.

定义 2.12 ([5, 定义 4.6]) 设 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象类, $\mathbf{X}$ 是一个正合复形.

$$\mathbf{X}:\ \cdots\longrightarrow X_1\xrightarrow{d_1}X_0\xrightarrow{d_0}X_{-1}\xrightarrow{d_{-1}}\cdots\ .$$

如果对每一个 $\mathbb{E}$- 三角 $K_{n+1}\xrightarrow{g_n}X_n\xrightarrow{f_n}K_n\overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$ 都是 $\mathcal{C}(-,\ \mathcal{W})$- 正合的, 那么复形 $\mathbf{X}$ 称为 $\mathcal{C}(-,\ \mathcal{W})$- 正合的.

对偶地, 我们可以定义 $\mathcal{C}(\mathcal{W},-)$- 正合的 $\mathbb{E}$- 三角和 $\mathcal{C}(\mathcal{W},-)$- 正合的复形. 如果一个正合复形既是 $\mathcal{C}(-,\ \mathcal{W})$- 正合的又是 $\mathcal{C}(\mathcal{W},-)$- 正合的, 则我们称这个复形 $\mathbf{X}$ 是完全 $\mathcal{W}$- 正合的复形.

定义 2.13 ([5, 定义 4.7]) 称复形 $\mathbf{P}$ 是一个完全投射分解,

$$\mathbf{P}:\ \cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}P_{-1}\xrightarrow{d_{-1}}\cdots\ .$$

如果每个 P_i 都是投射的且 $\mathbf{P}$ 是完全 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$- 正合的.

定义 2.14 ([5, 定义 4.8]) 设复形 $\mathbf{P}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的一个完全投射分解,

$$\mathbf{P}:\ \cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{d_1}P_0\xrightarrow{d_0}P_{-1}\xrightarrow{d_{-1}}\cdots$$

i.e., 所有的 $\mathbb{E}$- 三角 $K_{n+1}\xrightarrow{g_n}P_n\xrightarrow{f_n}K_n\overset{\delta_n}{\dashrightarrow}$ 都是完全 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$- 正合的, 此时称 K_n 为是一个 Goren-stein 投射对象. 我们用 $\mathcal{GP}(\mathcal{C})$ 来表示 $\mathcal{C}$ 中所有的 Gorenstein 投射对象构成的类.

接下来我们将给出外三角范畴中 Gorenstein 合冲对象的定义.

定义 2.15 设 n 是一个正整数. 如果在 $\mathcal{C}$ 中存在下面的一个正合复形

$$0\longrightarrow N\longrightarrow G_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow G_2\longrightarrow G_1\longrightarrow M\longrightarrow 0,$$

其中所有的 $G_i\in\mathcal{GP}(\mathcal{C})$, 那么称 N 是 M 的一个 n-Gorenstein 合冲对象 (或相对合冲对象).

在上述定义中, 如果对于任意的 i, $G_i \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$, 则我们把对象 N 叫做 M 的 n- 合冲对象. 下面我们给出外三角范畴 (既不是阿贝尔范畴也不是三角范畴) 中 n-Gorenstein 合冲对象的一个例子. 详细请参看 [8, 例 3.5].

例 2.16 设 A 是箭图: $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ 对应的路代数, $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 是相应的上三角矩阵代数. 记 $\mathrm{mod}B$ 是有限生成的 B- 模范畴. 那么对任意的 B- 模都可以写成 $\binom{X}{Y}_f$ 这种形式, 其中 f: $X \longrightarrow Y$ 是一个 A- 模同态. 则 B 的 AR 箭图如下：

$$\begin{tikzcd}
 & \binom{P_1}{0} \arrow[dr] & & \binom{0}{S_2} \arrow[dr] & & \binom{S_1}{S_1}_1 \arrow[dr] & \\
\binom{S_2}{0} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \binom{P_1}{S_2}_\varphi \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \binom{P_1}{P_1}_1 \arrow[r] & \binom{S_1}{P_1}_\psi \arrow[ur] \arrow[dr] & & \binom{0}{S_1} \\
 & \binom{S_2}{S_2}_1 \arrow[ur] & & \binom{S_1}{0} \arrow[ur] & & \binom{0}{P_1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

令 $\mathcal{X} = \mathrm{add}(\binom{S_2}{0} \bigoplus \binom{P_1}{0} \bigoplus \binom{S_1}{0} \bigoplus \binom{P_1}{P_1} \bigoplus \binom{S_1}{P_1} \bigoplus \binom{S_1}{S_1} \bigoplus \binom{0}{P_1} \bigoplus \binom{0}{S_1})$, 那么 $\mathcal{X}$ 就是一个外三角范畴, 既不是阿贝尔范畴也不是三角范畴 [8]. 我们在 $\mathcal{X}$ 中考虑下面的正合列:

$$0 \longrightarrow \binom{P_1}{0} \longrightarrow \binom{P_1}{P_1} \longrightarrow \binom{0}{P_1} \longrightarrow 0,$$

根据 [20, 引理 3.1], $\binom{P_1}{P_1}$ 是投射的. 由于 $\mathrm{mod}B$ 是整体维数有限的, 所以 Gorenstein 投射模和投射模是一致的, 因此 $\binom{P_1}{P_1}$ 也是 Gorenstein 投射模. 所以 $\binom{P_1}{0}$ 就是 $\binom{0}{P_1}$ 的 1-Gorenstein 合冲对象.

引理 2.17 设 M, $N \in \mathcal{C}$ 且 N 是 M 的一个 2-Gorenstein 合冲对象. 则我们可获得下面两个正合复形

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

和

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P_2 \longrightarrow H_2 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $P_1,\ P_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 和 $H_1,\ H_2 \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$.

证 由于 N 是 M 的一个 2-Gorenstein 合冲对象, 所以存在一个正合复形

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中 $G_1, G_1 \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$. i.e., 我们可以得到两个 $\mathbb{E}$- 三角

$$N \longrightarrow G_1 \longrightarrow K \dashrightarrow$$

和

$$K \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \dashrightarrow \cdot$$

因为 $G_0 \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$, 所以存在一个 $\mathbb{E}$- 三角 $G_0' \longrightarrow P_1 \longrightarrow G_0 \dashrightarrow$, 其中 $G_0' \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$. 由 (ET4)$^{\rm op}$, 我们有下列两个交换图.

$$\begin{tikzcd}
G_0' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_0' \arrow[d] & \\
L \arrow[r, "y"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & {} \\
K \arrow[r] \arrow[d, dashed] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & M \arrow[r, dashed] & {} \\
{} & {} & &
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
 & G_0' \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_0' \arrow[d] & \\
N \arrow[r] \arrow[d, equal] & H_1 \arrow[r, "x"] \arrow[d] & L \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
N \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & K \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
 & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

在第二个交换图中, 由于 $\mathcal{GP}(\mathcal{C})$ 在扩张下是封闭的 [5, 定理 4.16], 所以 $H_1 \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$. 从上面的两个交换图中, 我们可以得到第一个所求的正合复形:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H_1 \xrightarrow{yx} P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

另一个正合复形的证明是类似的.

下面我们将给出 n-Gorenstein 合冲对象的一个等价刻画.

定理 2.18 假设 n 是一个正整数且 $N \in \mathcal{C}$. 则下列命题等价:

(1) N 是 M 的 n-Gorenstein 合冲对象. 即存在一个正合复形

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0\ ,$$

其中所有的 $G_i \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$.

(2) 在 $\mathcal{C}$ 中存在一个态射 f: $L \longrightarrow G$ 是 $deflation$, 且使得 N 是一个 L 的 n- 合冲对象, $G \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$.

证 (2) $\Rightarrow$ (1) 由于 $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{GP}(\mathcal{C})$, 所以 (1) 是显然的.

(1) $\Rightarrow$ (2) 我们对 n 进行数学归纳. 当 $n = 1$ 时, 由于 $G_0 \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$, 所以存在一个 $\mathbb{E}$- 三角 $G_0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow G \dashrightarrow$, 其中 $P_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 且 $G \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$. 因此我们可以得到下面的 $\mathbb{E}$-

三角交换图:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r] \arrow[d, equal] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
N \arrow[r] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
& G \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed] & G \arrow[d, dashed] & \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}$$

从上图的第二行和第三列可证 (2) 是成立的.

假设结论对于 $n-1(n \geq 2)$ 是成立的. 现证明结论对于 n 仍然成立. 因为 N 是 n-Gorenstein 合冲对象, 所以存在下面的正合复形

$$(*1): \ 0 \longrightarrow K_{n-2} \xrightarrow{g_{n-3}} G_{n-3} \xrightarrow{d_{n-3}} \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

和一个 $\mathbb{E}$- 三角

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow G_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} K_{n-2} \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $d_{n-2} = g_{n-3}f_{n-2}$. 由引理 2.17, 我们可以得到下面的正合复形

$$(*2): \qquad 0 \longrightarrow N \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} G'_{n-2} \xrightarrow{f'_{n-2}} K_{n-2} \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $P_{n-1} \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 且 $G'_{n-2} \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$. 从正合复形 $(*1)$ 和 $(*2)$, 我们可以得到下面的正合复形

$$(*3): \ 0 \longrightarrow N \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d'_{n-1}} G'_{n-2} \xrightarrow{d'_{n-2}} G_{n-3} \xrightarrow{d_{n-3}} \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $d'_{n-2} = g_{n-3}f'_{n-2}$. 由复形 $(*3)$, 我们可以得到下面的正合复形

$$0 \longrightarrow K'_{n-1} \xrightarrow{g'_{n-1}} G'_{n-2} \xrightarrow{d'_{n-2}} G_{n-3} \xrightarrow{d_{n-3}} \cdots \longrightarrow G_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0$$

和一个 $\mathbb{E}$- 三角

$$(*4): \qquad N \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{f'_{n-1}} K'_{n-1} \dashrightarrow\ ,$$

其中 $d'_{n-1} = g'_{n-1}f'_{n-1}$. 由归纳假设, 我们可知 K'_{n-1} 是某个对象 L 的一个 $(n-1)$- 合冲对象. 即我们可以得到下面的正合复形

$$(*5): \ 0 \longrightarrow K'_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow L \longrightarrow 0\ .$$

从序列 $(*4)$ 和 $(*5)$, 我们可以得出 N 是 L 的一个 n- 合冲对象. 而 G 存在性的证明类似于 $n=1$ 的情况. 所以结论对于 n 也是成立的.

下面我们将给出对象 M 的 Gorenstein 投射维数 [5](简记为: Gpd$M$, 也称相对投射维数) 的定义. 若 $M \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$, 则定义 Gpd$M=0$. 如果存在一个 $\mathbb{E}$- 三角 $N \longrightarrow G \longrightarrow M \dashrightarrow$ 使得 $G \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$ 并且 Gpd$N \leq n-1$, 那么定义 Gpd$M \leq n$. 接下来我们将给出一个 Gorenstein 投射维数的一个等价刻画.

定理 2.19 设在 $M \in \mathcal{C}$, n 是一个正整数. 则 Gpd$M \leq n$ 当且仅当存在一个正合复形

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

使得对于任意的 $i \neq s$, $X_i \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 且 $X_s \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$, 其中 $0 \leq s \leq n$.

证 ($\Leftarrow$) 显然成立.

($\Rightarrow$) 我们对 n 进行数学归纳.

当 $n=1$ 时, 由引理 2.17, 结论显然成立.

假设结论对于 $n-1 (n \geq 2)$ 是成立的. 现证明结论对于 n 仍然成立. 设 Gpd$M \leq n$, 则存在正合复形

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{d_1} G_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0\,,$$

其中所有 $G_i \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$. 因此我们可以得到下面两个正合复形

$$(\sharp 1): \qquad 0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow G_2 \xrightarrow{f_2} K_2 \longrightarrow 0$$

和

$$(\sharp 2): \qquad 0 \longrightarrow K_2 \xrightarrow{g_1} G_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\,,$$

有 $d_2 = g_1 f_2$. 由序列 ($\sharp$2), 可以知道 K_2 是 2-Gorenstein 合冲对象, 根据引理 2.17, 我们可以得到下列正合复形

$$(\sharp 3): \qquad 0 \longrightarrow K_2 \xrightarrow{g_1'} G \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0\,,$$

其中 $G \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$ 并且 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. 所以, 由 ($\sharp$1) 和 ($\sharp$3), 我们可以得到下面的正合复形

$$(\sharp 4): \ 0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow G_2 \xrightarrow{d_2'} G \xrightarrow{d_1'} P \longrightarrow M \longrightarrow 0\,,$$

其中 $d_2' = g_1' f_2$. 根据序列 ($\sharp$4), 我们可以得到下面的正合复形

$$0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow G_2 \longrightarrow G \xrightarrow{f_1'} K_1' \longrightarrow 0$$

和一个 $\mathbb{E}$- 三角

$$(\sharp 5): \qquad K_1' \xrightarrow{g_0'} P \longrightarrow M \dashrightarrow\,,$$

其中 $d_1' = g_0' f_1'$. 注意到 Gpd$K_1' \leq n-1$, 由归纳假设和 ($\sharp$5) 可知: 结论对 $s \neq 0$ 都是成立的. 下面我们仅需证明对于 $s=0$ 时结论成立即可.

因为 $\mathrm{Gpd}M \leq n$, 我们考虑下面的正合复形

$$(\natural 1): \qquad 0 \longrightarrow G_n \longrightarrow G_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow G_1 \xrightarrow{f_1} K_1 \longrightarrow 0$$

和 $\mathbb{E}$- 三角

$$(\natural 2): \qquad 0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{g_0} G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $d_1 = g_0 f_1$. 由归纳假设, 我们可得下面的正合复形

$$(\natural 3): \qquad 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\sigma_2} G_1' \xrightarrow{f_1''} K_1 \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $P_i \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 和 $G_1' \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$. 由 ($\natural$2) 和 ($\natural$3), 我们有下列正合复形

$$(\natural 4): \ 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\sigma_2} G_1' \xrightarrow{g_0 f_1''} G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

因此可以得到下列两个正合复形

$$(\natural 5): \qquad 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{f_2''} K_2'' \longrightarrow 0$$

和

$$(\natural 6): \qquad 0 \longrightarrow K_2'' \xrightarrow{g_1''} G_1' \xrightarrow{g_0 f_1''} G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

这里 $\sigma_2 = g_1'' f_2''$. 由序列 ($\natural$6) 可知, K_2'' 是 2-Gorenstein 合冲对象. 由引理 2.17, 我们可以得到下列正合复形

$$(\natural 7): \qquad 0 \longrightarrow K_2'' \longrightarrow P'' \longrightarrow G'' \longrightarrow M \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $G'' \in \mathcal{GP}(\mathcal{C})$ 和 $P'' \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$. 由此可知, 结论对于 $s = 0$ 也是成立的.

3 粘合

设 $(\mathcal{A}, \mathbb{E}_{\mathcal{A}}, \mathfrak{s}_{\mathcal{A}})$ 和 $(\mathcal{B}, \mathbb{E}_{\mathcal{B}}, \mathfrak{s}_{\mathcal{B}})$ 是两个外三角范畴, 函子 F: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 和 G: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ 是两个加法共变函子. 对于任意 $X \in \mathcal{A}$ 和 $Y \in \mathcal{B}$, 如果存在个同构 $\sigma_{X,Y}$: $\mathcal{B}(FX, Y) \cong \mathcal{A}(X, GY)$, 那么我们称 ($F$, G) 为一个伴随对. 若存在另外一个函子 H: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 使得 (G, H) 也是一个伴随对, 则我们称 (F, G, H) 为一个伴随三元组. 称加法共变函子 F 是正合的, 如果它保持 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角, 即将 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角变成 $\mathcal{B}$ 中的 $\mathbb{E}$- 三角. 对于左 (右) 正合函子, 左 (右) 正合的 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}$- 三角序列的定义, 请参考 [8]. 由于这些定义在本论文中没有使用, 所以这里没有给出. 下面我们给出外三角范畴中粘合的定义.

定义 3.20 ([8, 定义 3.1]) 设 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ 是三个外三角范畴. 一个粘合 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是指下图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{A} \arrow[l, bend right, "i^*"'] \arrow[l, bend left, "i^!"] \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{A}'' \arrow[l, bend right, "j_!"'] \arrow[l, bend left, "j_*"] \end{tikzcd}$$

其中 i_*, j^* 为两个正合函子, i^*, $j_!$ 为两个右正合函子, $i^!$, j_* 为两个左正合函子, 同时满足下列五个条件:

($R1$) $(i^*, i_*, i^!)$ 和 $(j_!, j^*, j_*)$ 是两个伴随三元组;

($R2$) 三个函子 i_*, $j_!$, 和 j_* 都是全忠实的;

($R3$) $\mathrm{Im} i_* = \mathrm{Ker} j^*$;

($R4$) 对于任意 $X \in \mathcal{A}$, 都存在一个 $A' \in \mathcal{A}'$ 和下面的左正合 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}$- 三角序列

$$i_*i^!X \longrightarrow X \longrightarrow j_*j^*X \longrightarrow i_*A';$$

($R5$) 对于任意 $X \in \mathcal{A}$, 都存在一个 $A'_1 \in \mathcal{A}'$ 和下面的左正合 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}$- 三角序列

$$i_*A'_1 \longrightarrow j_!j^*X \longrightarrow X \longrightarrow i_*i^*X.$$

注 3.21 (1) 如果 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 都是阿贝尔范畴, 则定义 3.20 与阿贝尔范畴粘合 [12, 14, 17] 的定义一致.

(2) 如果 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{A}''$ 是三角范畴, 则定义 3.20 与三角范畴粘合 [10] 的定义一致.

下面我们将整理一些关于外三角范畴粘合的性质 [8], 这些性质在接下来的文章中是非常有用的.

命题 3.22 假设 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 是一个外三角范畴的粘合. 则我们有下列性质.

(1) $i^*j_! = 0$ 和 $i^!j_* = 0$;

(2) i^*, $j_!$ 均保持投射对象;

(3) 这些自然变换 $i^*i_* \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{A}'}, \mathrm{Id}_{\mathcal{A}'} \longrightarrow i^!i_*, j^*j_* \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{A}''}, \mathrm{Id}_{\mathcal{A}''} \longrightarrow j^*j_!$ 都是自然同构;

(4) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象, 则 $\mathcal{A}'$ 有足够多的投射对象并且 $\mathcal{P}(\mathcal{A}') = \mathrm{add}(i^*(\mathcal{P}(\mathcal{A})))$;

(5) 如果 $\mathcal{A}$ 有足够多的投射对象并且 j_* 是正合的, 则 $\mathcal{A}''$ 有足够多的投射对象, $\mathcal{P}(\mathcal{A}'') = \mathrm{add}(j^*(\mathcal{P}(\mathcal{A})))$.

称加法共变函子 F 满足 $(\star)$ 条件 [20, Definition 3.3], 如果对于 $\mathcal{B}$ 中任意的完全投射分解 $P^\bullet$, $\mathcal{B}(P^\bullet, FQ)$ 也是正合的, 其中 $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. 为了证明这部分的主要结果, 我们需要用到下列两个性质.

命题 3.23 在 $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ 中, 设 X 是 $\mathcal{A}$ 中的一个 Gorenstein 投射对象.

(1) 如果 j_* 为一个正合函子, 则 $j^*X \in \mathcal{GP}(\mathcal{A}'')$.

(2) 如果 i^* 为一个正合函子且 i_* 满足 $(\star)$ 条件, 则 $i^*X \in \mathcal{GP}(\mathcal{A}')$.

证 (1) 因为 X 是 $\mathcal{A}$ 中的 Gorenstein 投射对象, 所以存在一个 $\mathcal{A}(-, \mathcal{P}(\mathcal{A}))$- 正合的 $\mathbb{E}$- 三角序列 $X_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow X_n \dashrightarrow$, 其中所有的 $P_i \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ 和 $X_0 = X$, 对任意的 $0 \leq i \leq n$. 根据命题 3.22, 对于任意的 $P'' \in \mathcal{P}(\mathcal{A}'')$, 我们有下列交换图.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}''(j^*X_n,\ P'') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{A}''(j^*P_n,\ P'') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{A}''(j^*X_{n+1},\ P'') \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{A}''(j^*X_n,\ j^*j_!P'') \arrow[r] & \mathcal{A}''(j^*P_n,\ j^*j_!P'') \arrow[r] & \mathcal{A}''(j^*X_{n+1},\ j^*j_!P'')
\end{tikzcd}$$

由命题 3.22, 我们知道 $j_!P'' \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. 则下面序列是一个短正合列.

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}''(X_n,\ j_!P'') \longrightarrow \mathcal{A}''(P_n,\ j_!P'') \longrightarrow \mathcal{A}''(X_{n+1},\ j_!P'') \longrightarrow 0$$

因为 j^* 为一个正合函子, 所以

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}''(j^*X_n,\ j^*j_!P'') \longrightarrow \mathcal{A}''(j^*P_n,\ j^*j_!P'') \longrightarrow \mathcal{A}''(j^*X_{n+1},\ j^*j_!P'') \longrightarrow 0$$

也是一个短正合列, 即上述交换图的第一行也是正合的. 根据命题 3.22 和 j_* 是一个正合函子, 则 $j^*P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A}'')$. 故 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}''}$- 三角

$$j^*X_{n+1} \longrightarrow j^*P_n \longrightarrow j^*X_n \dashrightarrow$$

是 $\mathcal{A}''(-,\mathcal{P}(\mathcal{A}''))$- 正合的. 所以, $j^*X \in \mathcal{GP}(\mathcal{A}'')$.

(2) 类似于上述讨论, 对任意的 $P' \in \mathcal{GP}(\mathcal{A}')$, 我们有下面的交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}'(i^*X_n,\ P') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{A}'(i^*P_n,\ P') \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{A}'(i^*X_{n+1},\ P') \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{A}(X_n,\ i_*P') \arrow[r] & \mathcal{A}(P_n,\ i_*P') \arrow[r] & \mathcal{A}(X_{n+1},\ i_*P')
\end{tikzcd}$$

由于 i_* 满足 $(\star)$ 条件, 所以上述交换图中的第二行是正合的. 故第一行也是正合的, 即 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}'}$-三角 $i^*X_{n+1} \longrightarrow i^*P_n \longrightarrow i^*X_n \dashrightarrow$ 是 $\mathcal{A}'(-,\mathcal{P}(\mathcal{A}'))$- 正合的, 此处需要 i^* 是正合的. 根据命题 3.22, $i^*P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')$, 因此 $i^*X \in \mathcal{GP}(\mathcal{A}')$.

引理 3.24 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为两个阿贝尔范畴, 函子 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ 是正合的且是忠实的. 则在 $\mathcal{A}$ 中序列

$$L^\bullet =: \ \cdots \longrightarrow L_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} L_0 \xrightarrow{d_0} L_1 \longrightarrow \cdots$$

是正合的当且仅当 $F(L^\bullet)$ 是正合的.

证 ($\Rightarrow$) 由于 F 是正合的, 所以必要性是显然的.

($\Leftarrow$) 因为 $F(L^\bullet) =: \ \cdots \longrightarrow FL_{-1} \xrightarrow{Fd_{-1}} FL_0 \xrightarrow{Fd_0} FL_1 \longrightarrow \cdots$, $F(L^\bullet)$ 为正合的, 则

$$0 = \mathrm{H}_i(F(L^\bullet)) = \mathrm{Ker}Fd_i/\mathrm{Im}Fd_{i-1} \cong F(\mathrm{Ker}d_i/\mathrm{Im}d_{i-1}).$$

众所周知: 正合函子 F 是忠实的当且仅当它将非零对象变为非零对象. 所以 $\mathrm{Ker}d_i/\mathrm{Im}d_{i-1} = 0$. 即, $L^\bullet$ 是正合的.

下面引理的证明是常规的, 详细的证明留给读者.

引理 3.25 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个外三角范畴, $(F,\ G,\ H)$ 为一个伴随三元组, 其中 F, H: $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, G: $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$. 如果 H 是一个正合函子, 那么 G 保持投射对象.

命题 3.26 设 $R(\mathcal{A}',\ \mathcal{A},\ \mathcal{A}'')$ 是一个外三角范畴的粘合, X', X'' 分别是 $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ 中的两个 Gorenstein 投射对象. 那么我们有如下两个结论.

(1) 若 $i^!$, i^* 是正合函子并且 i^* 是忠实的, 则 $i_*X' \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})$.

(2) 若 $j_!$ 和 j_* 是正合函子, 则 $j_!X'' \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})$.

证 (1) 因为 X' 是 $\mathcal{A}'$ 中的一个 Gorenstein 投射对象, 所以存在一些 $\mathcal{A}'(-,\mathcal{P}(\mathcal{A}'))$- 正合的 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}'}$- 三角序列 $X'_{n+1} \longrightarrow P'_n \longrightarrow X'_n \dashrightarrow$, 其中每个 $P'_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A}')$ 且 $X'_0 = X'$. 对于任意 $P \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, 可获得下面的复形

$$(\ddagger):\ 0 \longrightarrow \mathcal{A}(i_*X'_n, P) \longrightarrow \mathcal{A}(i_*P'_n,\ P) \longrightarrow \mathcal{A}(i_*X'_{n+1},\ P) \longrightarrow 0\ .$$

根据命题 3.22, $i^*P \in \mathcal{GP}(\mathcal{A}')$, 所以下列复形是正合的.

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X'_n, i^*P) \longrightarrow \mathcal{A}(P'_n,\ i^*P) \longrightarrow \mathcal{A}(X'_{n+1},\ i^*P) \longrightarrow 0\ .$$

由引理 3.24, 我们有序列 (‡) 是正合的. 由引理 3.25, $i_*P_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. 综上所述, $i_*X' \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})$.

(2) 因为 X'' 是 $\mathcal{A}''$ 中的一个 Gorenstein 投射对象, 这里存在一些 $\mathcal{A}''(-,\mathcal{P}(\mathcal{A}''))$- 正合的 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}''}$- 三角 $X''_{n+1} \longrightarrow P''_n \longrightarrow X''_n \dashrightarrow$, 其中 $P''_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A}'')$ 和 $X''_0 = X''$. 对于任意的 $P \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})$, 我们考虑下面交换图.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(j_!X''_n,\ P) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{A}(j_!P''_n,\ P) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathcal{A}(j_!X''_{n+1},\ P) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathcal{A}''(X''_n,\ j^*P) \arrow[r] & \mathcal{A}''(P''_n,\ j^*P) \arrow[r] & \mathcal{A}''(X''_{n+1},\ j^*P)
\end{tikzcd}$$

由引理 3.25, $j^*P \in \mathcal{P}(\mathcal{A}'')$. 所以上述交换图的第二行是一个短正合列, 即第一行也是正合的. 因此 $\mathbb{E}_{\mathcal{A}}$- 三角 $j_!X''_{n+1} \longrightarrow j_!P''_n \longrightarrow j_!X''_n \dashrightarrow$ 是 $\mathcal{A}(-,\mathcal{P}(\mathcal{A}))$- 正合的. 由命题 3.22 可得, $j_!P''_n \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$. 所以 $j_!X'' \in \mathcal{GP}(\mathcal{A})$.

由命题 3.23 和命题 3.26, 我们可以获得本部分的主要定理.

定理 3.27 在一个粘合 $R(\mathcal{A}',\ \mathcal{A},\ \mathcal{A}'')$ 中, 设 $X,\ X',\ X''$ 分别是 $\mathcal{A},\ \mathcal{A}',\ \mathcal{A}''$ 中的三个 n-Gorenstein 合冲对象.

(1) 如果 j_* 是一个正合函子, 则 j^*X 是 $\mathcal{A}''$ 中的 n-Gorenstein 合冲对象.

(2) 如果 i^* 为一个正合函子且 i_* 满足 $(\star)$ 条件, 则 i^*X 是 $\mathcal{A}'$ 中的 n-Gorenstein 合冲对象.

(3) 如果 $i^!$, i^* 是正合函子且 i^* 是忠实的, 则 i_*X' 是 $\mathcal{A}$ 中的 n-Gorenstein 合冲对象.

(4) 如果 $j_!$ 和 j_* 是正合函子, 则 $j_!X''$ 是 $\mathcal{A}$ 中的 n-Gorenstein 合冲对象.

参 考 文 献

[1] Nakaoka H, Palu Y. Extriangulated categories, Hovey twin cotorsion pairs and model structures[J]. Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques, 2019, 60(2): 117–193.

[2] Zhou P Y, Zhu B. Triangulated quotient categories revisited[J]. Journal of Algebra, 2018, 502(4): 196–232.

[3] Gu W, Ma X, Tang X. Homological dimensions of extriangulated categories and Recollements[J]. arXiv preprint arXiv: 2104.06042v1.

[4] Hu Y G, Zhou P Y. Recollements arising from cotorsion pairs on extriangulated categories[J]. arXiv preprint arXiv: 1912.05928v1.

[5] Hu J S, Zhang D D, Zhou P Y. Proper classes and Goensteinness in extriangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2020, 55(1): 23–60.

[6] Hu J S, Zhang D D, Zhou P Y. Two new classes of n-exangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2021, 568: 1–21.

[7] Liu Y, Nakaoka H. Hearts of twin cotorsion pairs on extriangulated categories[J]. Journal of Algebra, 2019, 528: 96–149.

[8] Wang L, Wei J Q, Zhang H C. Recollements of extriangulated categories[J]. Colloquium Mathematicum, 2022, 167(2): 239–259.

[9] Zhu B, Zhuang X. Tilting subcategories in extriangulated categories[J]. arXiv preprint arXiv: 1907.00747v1.

[10] Beǐlinson A, Bernstein J, Deligne P. Faisceaux pervers[J]. Soc. Math. France, Paris, 1982, 100(1): 5–171.

[11] Chen J. Cotorsion pairs in a recollement of triangulated categories[J]. Comm. Algebra, 2013, 41(8): 2903–2915.

[12] Ma X, Huang Z Y. Torsion pairs in recollements of abelian categories[J]. Front. Math. China, 2018, 13(4): 875–892.

[13] 马欣, 黄兆泳. 粘合倾斜模 [J]. 中国科学: 数学, 2018, 48(11): 1729–1738.

[14] Franjou V, Pirashvili T. Comparison of abelian categories recollements[J]. Doc. Math., 2004, 9(1): 41–56.

[15] Gillespie J. Gorenstein complexes and recollements from cotorsion pairs[J]. Advances in Mathematics, 2016, 291(1), 859–911.

[16] Lin Y N, Wang M X. From recollement of triangulated categories to recollement of abelian categories[J]. Science China Mathematics, 2010, 53(4): 1111–1116.

[17] Psaroudakis C. Homological theory of recollements of abelian categories[J]. Journal of Algebra, 2014, 398(1): 63–110.

[18] Psaroudakis C, Vitória J. Recollements of module categories[J]. Appl. Categ. Structures, 2014, 22(4): 579–593.

[19] Huang C H, Huang Z Y. Gorenstein syzygy modules[J]. Journal of Algebra, 2010, 324(2): 3408–3419.

[20] Peng Y Y, Zhu R, Huang Z Y. Gorenstein projective objects in comma catgories[J]. Periodica Mathematica Hungarica, 2022, 84(2): 186–202.

GORENSTEIN SYZYGY OBJECTS IN EXTRIANGULATED CATEGORIES

CHEN Ming, ZHANG Pei-yu

(*School of Mathematics-Physics and Finances, Anhui Polytechnic University, Wuhu 241000, China*)

Abstract: In this paper, we study the Gorenstein syzygy objects and Recollements of the Extriangulated categories. Using the relative homological methods, we get its some properties and a characterization, and a characterization of Gorenstein projective dimesions. For a recollement $R(\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ of extriangulated categories, we mainly show that Gorenstein syzygy objects in $\mathcal{A}'$ and $\mathcal{A}''$ induce Gorenstein syzygy objects in $\mathcal{A}$ under certain conditions, and prove that Gorenstein syzygy objects in $\mathcal{A}$ induce Gorenstein syzygy objects in $\mathcal{A}'$ and $\mathcal{A}''$ under certain conditions.

Keywords: extriangulated categories; gorenstein syzygy objects; recollements

2010 MR Subject Classification: 16E05; 16E10; 18A40