Vol. 43 (2023)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

李超代数 $\tilde{P}(2)$ 到奇 Hamilton 超代数 HO 的低维上同调

霍雪童 [1], 孙丽萍 [1], 刘文德 [2]

(1. 哈尔滨理工大学理学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

(2. 海南师范大学数学与统计学院, 海南 海口 571158)

摘 要: 本文在特征 $p>3$ 的域上, 采用将典型李超代数 $\tilde{P}(2)$ 嵌入到奇 Hamilton 超代数 HO 的零阶化分支的方法, 使得在伴随表示的意义下, HO 成为 $\tilde{P}(2)$- 模. 通过对 HO 进行子模分解和权空间分解, 得到了 $\tilde{P}(2)$ 到 HO 的低维上同调.

关 键 词: 同构; 分解; 导子; 上同调

MR(2010) **主题分类号:** 17B50; 17B05 **中图分类号:** O152.5

文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2023)04-0288-09

1 引言

李超代数在数学、物理等多个领域都有着广泛的应用. 但至今模李超代数 (素特征域上的李超代数) 的分类工作还没有完成, 其中 Cartan 型模李超代数成为分类问题的关键, 也取得了很多丰硕的成果 [1−8]. 我们知道, 上同调对于李超代数扩张以及其模扩张的研究具有重大作用, 如 [9−11]. 其中特殊线性李超代数到 Cartan 型模李超代数 W、S 和 H 的低维上同调已经被计算 [12−14]. 因奇 Hamilton 超代数 HO 的零阶化分支中包含典型李超代数 $\tilde{P}(2)$, 故在伴随表示意义下, HO 可视为 $\tilde{P}(2)$- 模. 本文通过对 HO 进行适当的 $\tilde{P}(2)$- 子模分解和相应的权空间计算, 并利用权导子 (保持权不变的导子), 计算了 $\tilde{P}(2)$ 到 HO 的零维和一维上同调.

2 准备

令 $\mathbb{N}$ 与 $\mathbb{N}_0$ 分别表示正整数集与非负整数集, $\mathbb{F}$ 表示特征 $p>3$ 的域, $\mathbb{Z}_2:=\{\bar{0},\bar{1}\}$ 表示整数模 2 的剩余类环, $|x|$ 表示 $\mathbb{Z}_2$- 阶化向量空间中齐次元素 x 的 $\mathbb{Z}_2$- 次数, $\mathrm{zd}(x)$ 表示 $\mathbb{Z}$- 阶化向量空间中齐次元素 x 的 $\mathbb{Z}$- 次数. 记 $\langle x_1,x_2,\cdots,x_k\rangle$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 在数域 $\mathbb{F}$ 上线性生成的向量空间. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in\mathbb{N}_0^m$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\in\mathbb{N}_0^m$, 定义 $\binom{\alpha}{\beta}:=\prod_{i=1}^m\binom{\alpha_i}{\beta_i}$. 令 $\mathcal{U}(x)$ 是具有生成元集 $\{x^{(\alpha)}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_m^{\alpha_m}|\alpha\in\mathbb{N}_0^m\}$ 的 $\mathbb{F}$ 上的除幂代数, 乘法运算为 $x^{(\alpha)}x^{(\beta)}=\binom{\alpha+\beta}{\beta}x^{(\alpha+\beta)}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^m$. $\Lambda(n)$ 是由变元 $x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{m+n}$ 生成 $\mathbb{F}$ 上的外代数, 基元素用 x^u 表示. 令

$$\Lambda(m,n)=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)=\langle x^{(\alpha)}x^u|\alpha\in\mathbb{N}_0^m\rangle,$$

其中 $x^{(\alpha)}\otimes x^u$ 简记为 $x^{(\alpha)}x^u$, 称为除外代数. $\mathcal{U}(m)$ 的平凡的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化和 $\Lambda(n)$ 的自然的 $\mathbb{Z}_2$-阶化诱导了 $\Lambda(m,n)$ 的一个 $\mathbb{Z}_2$- 阶化:

*收稿日期: 2021-09-19 接收日期: 2022-05-10

基金项目: 国家自然科学基金 (12061029); 黑龙江省自然科学基金项目 (A2015017; QC2018006).

作者简介: 霍雪童 (1997 –), 女, 山西临县, 硕士研究生, 主要研究方向: 李 (超) 代数.

通讯作者: 孙丽萍 (1970 –), 女, 黑龙江哈尔滨, 教授, 主要研究方向: 李 (超) 代数.

$$\Lambda(m,n)_{\bar{0}}=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)_{\bar{0}},\ \Lambda(m,n)_{\bar{1}}=\mathcal{U}(m)\otimes\Lambda(n)_{\bar{1}},$$

从而 $\Lambda(m,n)$ 是一个结合超代数. 令 $\mathrm{zd}(x_i)=1,\ i=1,2,\cdots,m+n$, 则 $\Lambda(m,n)$ 有一个自然的 $\mathbb{Z}$- 阶化:

$$\Lambda(m,n)=\bigoplus_{i=0}^{m(p-1)+n}\Lambda(m,n)_i.$$

令 $\mathrm{Y}_0=\{1,2,\cdots,m\}$, $\mathrm{Y}_1=\{m+1,\cdots,m+n\}$, $\mathrm{Y}=\mathrm{Y}_0\bigcup\mathrm{Y}_1$. 设 $\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_2,\cdots,\mathrm{D}_s$ 是 $\Lambda(m,n)$ 的线性变换, 并满足

$$\mathrm{D}_i(x^{(\alpha)}x^u)=\begin{cases}x^{(\alpha-\varepsilon_i)}x^u, & \forall i\in\mathrm{Y}_0,\\ x^{(\alpha)}\partial_i(x^u), & \forall i\in\mathrm{Y}_1.\end{cases}$$

其中 $\varepsilon_i=(\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{im}),i\in\mathrm{Y}_0$; ∂_i 是 $\Lambda(n)$ 的特殊导子, $\forall i\in\mathrm{Y}_1$. 则 $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\bar{0}}(\Lambda(m,n))$, $\forall i\in\mathrm{Y}_0$; $\mathrm{D}_i\in\mathrm{Der}_{\bar{1}}(\Lambda(m,n)),\forall i\in\mathrm{Y}_1$.

令 $\mathrm{W}(m,n)=\{\sum_{i=1}^{m+n}f_i\mathrm{D}_i|\ f_i\in\Lambda(m,n),\ \forall i\in\mathrm{Y}\}$, 则 $\mathrm{W}(m,n)$ 是 $\mathrm{Der}(\Lambda(m,n))$ 的子代数, 称为 **Witt 超代数**.

设 $\mathrm{T_H}:\Lambda(n,n)\to\mathrm{W}(n,n)$ 是线性映射, 使得 $\mathrm{T_H}(f)=\sum_{i=1}^{2n}(-1)^{\tau(i)|f|}\partial_i(f)\partial_{i'}$, 这里

$$i'=\begin{cases}i+n, & i=1,2,\cdots,n,\\ i-n, & i=n+1,\cdots,2n.\end{cases}$$

$$\tau(i)=\begin{cases}\bar{0}, & i=1,2,\cdots,n,\\ \bar{1}, & i=n+1,\cdots,2n.\end{cases}$$

易见 $\mathrm{zd}(\mathrm{T_H})=-2,\ |\mathrm{T_H}|=\bar{1}$. 令 $\mathrm{HO}(n,n):=\{\mathrm{T_H}(f)|\ f\in\Lambda(n,n)\}$, 它是 $\mathrm{W}(n,n)$ 的子代数, 称之为 **奇 Hamilton 超代数**. 它的 $\mathbb{Z}_2$- 阶化结构为:

$$\mathrm{HO}(n,n)_{\bar{0}}=\langle\mathrm{T_H}(f)|\ f\in\Lambda(n,n)_{\bar{1}}\rangle,\ \ \mathrm{HO}(n,n)_{\bar{1}}=\langle\mathrm{T_H}(f)|\ f\in\Lambda(n,n)_{\bar{0}}\rangle.$$

它的 $\mathbb{Z}$- 阶化结构为: $\mathrm{HO}(n,n)_i=\mathrm{T_H}(\Lambda(n,n)_{i+2})$.

由文献 [7] 可知, $\forall f,g\in\Lambda(n,n)$, $[\mathrm{T_H}(f),\mathrm{T_H}(g)]=\mathrm{T_H}(\mathrm{T_H}(f)(g))=\mathrm{T_H}(h)$, 其中 $h=\mathrm{T_H}(f)(g)$, 为此可在 $\Lambda(n,n)$ 中定义一个方括号运算 $[f,g]:=\mathrm{T_H}(f)(g),\ f,g\in\Lambda(n,n)$, 使得 $\Lambda(n,n)$ 作成李超代数. 因为 $\mathrm{kerT_H}=\mathbb{F}$, 所以

$$\bar{\Lambda}(n,n):=\Lambda(n,n)/\mathbb{F}\simeq\mathrm{HO}(n,n).$$

下面简要回顾李超代数 $\tilde{P}(2)$. 在一般线性李超代数 $\mathrm{gl}(m,n)$ 中,

$$\tilde{P}(m):=\left\{\begin{pmatrix}\mathrm{A} & \mathrm{B}\\ \mathrm{C} & -\mathrm{A}^T\end{pmatrix}\in\mathrm{gl}(m,m)|\ \mathrm{B}=\mathrm{B}^T,\ \mathrm{C}=-\mathrm{C}^T\right\}.$$

易见 $\tilde{P}(2)$ 的一组基为

$$E_{33}-E_{11},\ E_{44}-E_{22},\ E_{13},\ E_{24},\ E_{23}+E_{14},\ E_{43}-E_{12},\ E_{34}-E_{21},\ E_{41}-E_{32}.$$

我们可以定义 $\tilde{P}(2)$ 到 $\mathrm{HO}(2,2)_0$ 的线性映射 φ:

$$\begin{aligned}&E_{23}+E_{14}\to \mathrm{T_H}(x_1x_2);\ \ E_{41}-E_{23}\to \mathrm{T_H}(x_3x_4);\\&E_{ij}\to \mathrm{T_H}(x_ix_i),\ i=1,2,\ j=i+2;\\&E_{ij}-E_{kl}\to \mathrm{T_H}(x_kx_i),\ i,j=3,4,\ k=j-2,\ l=i-2.\end{aligned}$$

显然, φ 是 $\tilde{P}(2)$ 到 $\mathrm{HO}(2,2)_0$ 的同构映射, 故 $\tilde{P}(2)\simeq \mathrm{HO}(2,2)_0$. 又由于 $\mathrm{HO}(2,2)_0\simeq \Lambda(2,2)_2$, 其中 $\Lambda(2,2)_2$ 的一组基为

$$\jmath=\{x_1x_1,x_1x_2,x_1x_3,x_1x_4,x_2x_2,x_2x_3,x_2x_4,x_3x_4\}.$$

故计算 $\tilde{P}(2)$ 到 $\mathrm{HO}(n,n)$ 的低维上同调可转化为计算 $\Lambda(2,2)_2$ 到 $\bar{\Lambda}(n,n)$ 的低维上同调. 下文简记同构的李超代数 $\tilde{P}(2)$, $\mathrm{HO}(2,2)_0$ 或 $\Lambda(2,2)_2$ 为 g, $\mathrm{HO}(n,n)$ 和 $\bar{\Lambda}(n,n)$ $(n\geq 2)$ 分别为 HO 和 $\bar{\Lambda}$.

3 简约

若 M 为李超代数 g- 模, 记 $kM:=M\oplus\cdots\oplus M$ (k- 个), 当 T 为平凡 g- 模, 且 $\dim T=k$, 那么 $T\otimes M\simeq kM$.

由上同调的性质, 我们计算 g 到 HO 的上同调可以计算 g 到 HO 子模的上同调. 为此, 我们将 g- 模 HO 进行适当的分解. 根据前文的内容, 我们只需对 $\bar{\Lambda}(2,2)_2$- 模 $\bar{\Lambda}$ 进行子模分解.

设 $\gamma=\{1,2,n+1,n+2\}$, $S=\mathrm{Y}\backslash\gamma$. 则 $\bar{\Lambda}$ 首先有下面的子模分解:

$$\bar{\Lambda}=M\oplus T.$$

其中,

$$M\simeq \langle x^{(\alpha)}x^u|\ \partial_i(x^{(\alpha)}x^u)\neq 0,\ \exists i\in\gamma\rangle,$$

$$T\simeq \langle x^{(\alpha)}x^u|\ \partial_i(x^{(\alpha)}x^u)=0,\ \forall i\in\gamma\rangle/\mathbb{F}.$$

作为 $\bar{\Lambda}$ 的 g- 子模, 易见 $M\simeq M_1\otimes T$, 其中

$$M_1\simeq \langle x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}x_{n+1}^{\beta_1}x_{n+2}^{\beta_2}|\ 0\leq\alpha_1,\alpha_2\leq p-1,\beta_1,\beta_2=0\text{ 或 }1\rangle/\mathbb{F}\simeq\bar{\Lambda}(2,2).$$

这样, 作为 g- 模有 $\bar{\Lambda}\simeq\bar{\Lambda}(2,2)\otimes T\oplus T$, 易见 T 为平凡 g- 模, 且

$$\dim T=2^{n-2}p^{n-2}-1.$$

综上, 作为 g- 模有

$$\bar{\Lambda}(n,n)\simeq \mathrm{HO}(n,n)\simeq(2^{n-2}p^{n-2}-1)\bar{\Lambda}(2,2)\oplus T. \tag{1}$$

这样, 计算 g 到 HO 的低维上同调只需计算 g 到 g- 子模 $\bar{\Lambda}(2,2)$ 与 T 的上同调.

下面给出本文计算一维上同调所需的概念和引理. 设 L 为李超代数, M 为 L- 模. 一个 L 到 M 的 $\mathbb{Z}_2$- 齐次线性映射 φ 叫做导子, 如果满足:

$$\varphi([x,y])=(-1)^{|\varphi||x|}x\cdot\varphi(y)-(-1)^{|y|(|\varphi|+|x|)}y\cdot\varphi(x),\ \forall x,y\in L. \tag{2}$$

若存在 $m \in M$ 使得

$$\varphi(x) = (-1)^{|x||m|} x \cdot m,\ \forall x \in L,$$

则 φ 称为内导子, 否则称为外导子. 记 $\mathrm{Der}(L, M)$ 和 $\mathrm{Ider}(L, M)$ 分别为 L 到模 M 的导子空间和内导子空间. 李超代数 L 到模 M 的零维上同调与一维上同调分别为

$$H^0(L, M) := \{m \in M | L \cdot m = 0\},$$

$$H^1(L, M) := \mathrm{Der}(L, M)/\mathrm{Ider}(L, M).$$

定义 3.1 设 H 是 L 的 Cartan 子代数, L 与 L- 模 M 关于 H 的权空间分解为 $L = \oplus_{\alpha \in H^*} L_\alpha$ 和 $M = \oplus_{\alpha \in H^*} M_\alpha$. 一个 L 到 M 的导子 φ 称为关于 H 的权导子, 若 $\varphi(L_\alpha) \subseteq M_\alpha$, $\forall \alpha \in H^*$.

引理 3.2 [15, 16] 任何一个李超代数 L 到 L- 模 M 的导子都是一个权导子与内导子之和.

由引理 3.2 和 (1) 式, 计算 $H^1(\mathrm{g}, \mathrm{HO})$ 只需分别计算 g 到 T 和 $\bar{\Lambda}(2, 2)$ 的权导子, 为此我们首先需要确定 g 的一个 Cartan 子代数 $h = \langle x_1x_3, x_2x_4 \rangle$, 相应的权分别为 $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$.

根据定义 3.1 和引理 3.2, 计算 $H^1(\mathrm{g}, \mathrm{HO})$ 只需考虑 $\bar{\Lambda}(2, 2)$ 中与 g 有相同权的权向量. 由以下公式

$$[x_1x_3, x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{\beta_3}x_4^{\beta_4}] = (\beta_3 - k_1)x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{\beta_3}x_4^{\beta_4},$$
$$[x_2x_4, x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{\beta_3}x_4^{\beta_4}] = (\beta_4 - k_2)x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{\beta_3}x_4^{\beta_4}.$$

可做如下图表:

表 1 g 与 $\bar{\Lambda}(2, 2)$ 的权向量

g 权	g 权向量	$\bar{\Lambda}(2,2)$ 权向量
$(0, 0)$	x_1x_3, x_2x_4	$x_1x_3, x_2x_4, x_1x_2x_3x_4$
$(1, 1)$	x_3x_4	$x_3x_4, x_1^{p-1}x_2^{p-1}, x_1^{p-1}x_4, x_2^{p-1}x_3$
$(-1, 1)$	x_1x_4	$x_1x_4, x_1^2x_3x_4, x_1x_2^{p-1}, x_1^2x_2^{p-1}x_3$
$(1, -1)$	x_2x_3	$x_2x_3, x_1^{p-1}x_2, x_2^2x_3x_4, x_1^{p-1}x_2x_4$
$(-1, -1)$	x_1x_2	$x_1x_2, x_1^2x_2x_3, x_1x_2^2x_4, x_1^2x_2^2x_3x_4$
$(-2, 0)$	x_1x_1	$x_1x_1, x_1^3x_3, x_1^2x_2x_4, x_1^3x_2x_3x_4$
$(0, -2)$	x_2x_2	$x_2x_2, x_2^3x_4, x_1x_2^2x_3, x_1x_2^3x_3x_4$

引理 3.3 李超代数 g 到 $\bar{\Lambda}(2, 2)$ 的非零权导子都是外导子.

证 设 φ 是李超代数 g 到 $\bar{\Lambda}(2, 2)$ 的权导子, 根据表 1 可见, $\mathrm{zd}(\varphi) = 0, 2, 4, p-2, p, 2p-4$. 下面我们按 φ 的 $\mathbb{Z}$- 次数分情况进行讨论. 约定在下文中, 在 φ 的映射没有出现的 $\jmath$ 中元素的像为 0.

情况 1 $\mathrm{zd}(\varphi)=0$ 时. 根据表 1 可设

$$\varphi(x_1x_3)=a_{13}x_1x_3+b_{13}x_2x_4,\qquad \varphi(x_2x_4)=a_{24}x_1x_3+b_{24}x_2x_4,$$
$$\varphi(x_ix_j)=a_{ij}x_ix_j,\ \ x_ix_j\in \jmath\backslash\{x_1x_3,\ x_2x_4\},\qquad a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{F}.$$

由 (2) 式可知

$$\begin{aligned}-a_{14}x_1x_4&=\varphi(-x_1x_4)=\varphi([x_1x_3,x_1x_4])\\&=(x_3\partial_3-x_1\partial_1)a_{14}x_1x_4+(x_4\partial_3-x_1\partial_2)(a_{13}x_1x_3+b_{13}x_2x_4)\\&=(a_{13}-b_{13}-a_{14})x_1x_4,\end{aligned}$$

比较系数可得 $a_{13}-b_{13}=0$. 又由于

$$\begin{aligned}a_{34}x_3x_4&=\varphi(x_3x_4)=\varphi([x_1x_3,x_3x_4])\\&=(x_3\partial_3-x_1\partial_1)a_{34}x_3x_4-(x_4\partial_1-x_3\partial_2)(a_{13}x_1x_3+b_{13}x_2x_4)\\&=(a_{34}+a_{14}+b_{14})x_3x_4,\end{aligned}$$

比较系数可得 $a_{13}+b_{13}=0$. 那么

$$a_{13}=b_{13}=0,\ \ \text{即}\ \varphi(x_1x_3)=0. \tag{3}$$

同理可知

$$a_{24}=b_{24}=0,\ \ \text{即}\ \varphi(x_2x_4)=0. \tag{4}$$

再由 (2) 得以下两式

$$-a_{11}x_1x_1=\varphi(-x_1x_1)=\varphi([x_1x_4,x_1x_2])=-(a_{11}+a_{14})x_1x_1,$$

与

$$0=\varphi(x_2x_4-x_1x_3)=\varphi([x_1x_4,x_2x_3])=(a_{23}-a_{14})x_2x_4+(a_{14}-a_{23})x_1x_3,$$

可得

$$a_{23}=a_{14}=0,\ \ \text{即}\ \varphi(x_2x_3)=\varphi(x_1x_4)=0. \tag{5}$$

最后, 根据以下三个等式

$$\begin{aligned}&-2a_{12}x_1x_2=\varphi(x_1x_2)=\varphi([x_1x_4,x_2x_2])=(-a_{22})x_1x_2,\\&0=\varphi(x_2x_4-x_1x_3)=\varphi([x_1x_2,x_3x_4])=(a_{34}-a_{12})x_2x_4+(a_{12}-a_{34})x_1x_3,\\&0=\varphi(2x_1x_4)=\varphi([x_3x_4,x_1x_1])=(a_{11}-2a_{34})x_1x_4,\end{aligned}$$

可得

$$a_{11}=a_{22}=2a_{12}=2a_{34}. \tag{6}$$

综合 (3)-(6) 式, 可知 $\varphi=a\varphi_1,\ a\in\mathbb{F}$, 其中 φ_1 为 g 到 $\bar{\Lambda}(2,2)$ 的线性映射, 使得

$$\varphi_1:\ x_1x_2\to x_1x_2,\ x_3x_4\to x_3x_4,\ x_1x_1\to 2x_1x_1,\ x_2x_2\to 2x_2x_2. \tag{7}$$

由 (2) 验证可知, φ_1 是 g 到 $\bar{\Lambda}(2,2)$ 的权导子.

情况 2 $\mathrm{zd}(\varphi)=2,4,p,p-2$ 时. 可根据表 1 设出不同次数的权导子, 如 $\mathrm{zd}(\varphi)=2$ 时, 可设

$$\begin{aligned}\varphi: x_1x_3 &\to a_{13}x_1x_2x_3x_4, \quad x_2x_4 \to a_{24}x_1x_2x_3x_4,\\ x_1x_4 &\to a_{14}x_1^2x_3x_4, \quad x_2x_3 \to a_{23}x_1^2x_3x_4,\\ x_1x_2 &\to a_{12}x_1^2x_2x_3+b_{12}x_1x_2^2x_4,\\ x_2x_2 &\to a_{22}x_1x_2^2x_3+b_{22}x_2^3x_4,\\ x_1x_1 &\to a_{11}x_1^3x_3+b_{11}x_1^2x_2x_4, \qquad a_{ij},b_{ij}\in\mathbb{F}.\end{aligned}$$

再根据 (2), 与情况 1 同样的方法, 计算得系数全为 0, 即 $\varphi=0$.

同理, 可以证明 $\mathrm{zd}(\varphi)=4,p,p-2$ 时, φ 为 0.

情况 3 $\mathrm{zd}(\varphi)=2p-4$ 时. 由表 1, 可设 $\varphi(x_3x_4)=bx_1^{p-1}x_2^{p-1}$, $b\in\mathbb{F}$. 则 $\varphi=b\varphi_2$, 其中,

$$\varphi_2: x_3x_4\to x_1^{p-1}x_2^{p-1}. \tag{8}$$

易见, φ_2 是 g 到 $\bar{\Lambda}(2,2)$ 的权导子.

综上 3 种情况, 有 $\varphi=a\varphi_1+b\varphi_2$, $a,b\in\mathbb{F}$. 下证当 $\varphi\neq 0$ 时为外导子. 假设 φ 是由 $m\in\bar{\Lambda}(2,2)$ 决定的内导子, 由于 φ 是权导子, 故 m 为零权向量. 由表 1, 可设 $m=l_1x_1x_2x_3x_4+l_2x_1x_3+l_3x_2x_4$, $l_i\in\mathbb{F}$. 一方面, 由已知

$$\begin{aligned}\varphi(x_3x_4)&=(a\varphi_1+b\varphi_2)(x_3x_4)=a\varphi_1(x_3x_4)+b\varphi_2(x_3x_4)=ax_3x_4+bx_1^{p-1}x_2^{p-2},\\ \varphi(x_1x_1)&=(a\varphi_1+b\varphi_2)(x_1x_1)=a\varphi_1(x_1x_1)+b\varphi_2(x_1x_1)=2ax_1x_1.\end{aligned}$$

另一方由内导子定义有

$$\begin{aligned}\varphi(x_3x_4)&=[x_3x_4,l_1x_1x_2x_3x_4+l_2x_1x_3+l_3x_2x_4]\\ &=(x_4\partial_1-x_3\partial_2)(l_1x_1x_2x_3x_4+l_2x_1x_3+l_3x_2x_4)\\ &=-(l_2+l_3)x_3x_4,\\ \varphi(x_1x_1)&=[x_1x_1,l_1x_1x_2x_3x_4+l_2x_1x_3+l_3x_2x_4]\\ &=2x_1\partial_3(l_1x_1x_2x_3x_4+l_2x_1x_3+l_3x_2x_4)\\ &=2l_1x_1x_2x_3x_4+2l_2x_1x_1.\end{aligned}$$

可得

$$l_1=0,\ l_2+l_3=-a. \tag{9}$$

同理, 一方面

$$\varphi(x_1x_2)=a\varphi_1(x_1x_2)+b\varphi_2(x_1x_2)=ax_1x_2.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\varphi(x_1x_2) &= [x_1x_2, l_1x_1x_2x_3x_4 + l_2x_1x_3 + l_3x_2x_4]\\ &= (x_2\partial_3 + x_1\partial_4)(l_1x_1x_2x_3x_4 + l_2x_1x_3 + l_3x_2x_4)\\ &= 2l_1x_1x_2^2x_4 + 2l_1x_1^2x_2x_3 + (l_2 + l_3)x_1x_2.\end{aligned}$$

可得

$$l_2 + l_3 = a. \tag{10}$$

综合 (9) 与 (10) 得, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, 即 $m = 0$, 从而 $\varphi = 0$, 与已知矛盾. 引理 3.3 得证.

4 结论

引理 4.1 $H^0(\mathrm{g}, \mathrm{HO}) = T$, 且 $\dim H^0(\mathrm{g}, \mathrm{HO}) = 2^{n-2}p^{n-2} - 1$.

证 由零维上同调定义以及 (1) 式知 $T \subseteq H^0(\mathrm{g}, \mathrm{HO})$, 下面只需证 $H^0(\mathrm{g}, \bar{\Lambda}(2,2)) = 0$. 设 $l \in H^0(\mathrm{g}, \bar{\Lambda}(2,2))$, 由于

$$H^0(\mathrm{g}, \bar{\Lambda}(2,2)) \subseteq\ H^0(h, \bar{\Lambda}(2,2)) \subseteq \bar{\Lambda}(2,2)_{(0)}$$

(其中 $\bar{\Lambda}(2,2)_{(0)}$ 表示 $\bar{\Lambda}(2,2)$ 中的零权空间), 可设 $l = f_1x_1x_3 + f_2x_2x_4 + f_3x_1x_2x_3x_4$, 其中 $f_i \in \mathbb{F}$, 则

$$\begin{aligned}[x_3x_4, l] &= [x_3x_4, f_1x_1x_3 + f_2x_2x_4 + f_3x_1x_2x_3x_4]\\ &= (x_4\partial_1 - x_3\partial_2)(f_1x_1x_3 + f_2x_2x_4 + f_3x_1x_2x_3x_4)\\ &= -(f_1 + f_2)x_3x_4 = 0,\end{aligned}$$

即 $f_1 + f_2 = 0$. 又

$$\begin{aligned}[x_1x_4, l] &= [x_3x_4, f_1x_1x_3 + f_2x_2x_4 + f_3x_1x_2x_3x_4]\\ &= (x_4\partial_3 - x_1\partial_2)(f_1x_1x_3 + f_2x_2x_4 + f_3x_1x_2x_3x_4)\\ &= (f_1 - f_2)x_1x_4 - 2f_3x_1^2x_3x_4 = 0,\end{aligned}$$

得 $f_1 = f_2$, $f_3 = 0$, 即 $l = 0$, $H^0(\mathrm{g}, \bar{\Lambda}(2,2)) = 0$. 故 $H^0(\mathrm{g}, \mathrm{HO}) = T$, 其维数为 $2^{n-2}p^{n-2} - 1$, 得证.

注 在一维上同调中元素仍用导子表示.

命题 4.2 令 $\hbar = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$, 其中 E 是二阶单位阵, 则 $H^1(\mathrm{g}, T) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\hbar, T)$, 且

$$\dim H^1(\mathrm{g}, T) = 2^{n-2}p^{n-2} - 1.$$

证 由于 $\tilde{P}(2) = P(2) \oplus \mathbb{F}\hbar$, 其中

$$P(2) := \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & -\mathrm{A}^T \end{pmatrix} \in \tilde{P}(2) |\ \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0 \right\}$$

是单的线性李超代数. 此时 T 为 $P(2)$ 与 $\mathbb{F}\hbar$ 的平凡模. 由导子及单李超代数的性质知 $\mathrm{Der}(P(2),T)=0$, 且 $\mathrm{Der}(\mathbb{F}\hbar,T)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\hbar,T)$. 所以,

$$\mathrm{Der}(\mathrm{g},T)=\mathrm{Der}(\mathbb{F}\hbar,T)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\hbar,T).$$

又由任何 $\mathbb{F}\hbar$ 到 T 的非零导子都是外导子, 根据引理 3.2 知 $H^1(\mathrm{g},T)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\hbar,T)$. 最后由

$$\mathrm{dim}\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\hbar,T)=\mathrm{dim}T=2^{n-2}p^{n-2}-1$$

知命题成立.

命题 4.3 设 φ_1,φ_2 如 (7), (8) 所定义, 则

$$H^1(\mathrm{g},\bar{\Lambda}(2,2))=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle,\ \mathrm{dim}H^1(\mathrm{g},\bar{\Lambda}(2,2))=2.$$

证 根据引理 3.3 的证明, 有 $H^1(\mathrm{g},\bar{\Lambda}(2,2))\subseteq\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$, 因为 $\varphi_1-\varphi_2$ 是权导子, 由引理 3.3 知, $\varphi_1-\varphi_2$ 是外导子, 故 φ_1 与 φ_2 模内导子空间 $\mathrm{Ider}(\mathrm{g},\bar{\Lambda}(2,2))$ 是线性无关的, 又 φ_1 与 φ_2 在 $\mathbb{F}$ 上也是线性无关的, 所以 $\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle\subseteq H^1(\mathrm{g},\bar{\Lambda}(2,2))$, 即, $H^1(\mathrm{g},\bar{\Lambda}(2,2))=\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle$, 得证.

命题 4.4 $H^1(\mathrm{g},\mathrm{HO})=(2^{n-2}p^{n-2}-1)\langle\varphi_1,\varphi_2\rangle\oplus\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}\hbar,T)$, 特别地,

$$\mathrm{dim}H^1(\mathrm{g},\mathrm{HO})=3(2^{n-2}p^{n-2}-1).$$

证 由 $\mathrm{HO}\simeq(2^{n-2}p^{n-2}-1)\bar{\Lambda}(2,2)\oplus T$ 知, $H^1(\mathrm{g},\mathrm{HO})=(2^{n-2}p^{n-2}-1)H^1(\mathrm{g},\bar{\Lambda}(2,2))\oplus H^1(\mathrm{g},T)$, 根据命题 4.2 和 4.3 知结论成立.

参 考 文 献

[1] Zhang Yongzheng. Finite-dimensional Lie superalgebras of Cartan type over fields of prime characteristic[J]. Chin. Sci. Bull., 1997, 42(7): 720–724.

[2] Fu Jiayuan, Zhang Qingcheng, Jiang Cuipo. The Cartan-type modular Lie superalgebra KO[J]. Commun. Algebra, 2006, 34(1): 523–546.

[3] Liu Wende, He Yinghua. Finite-dimensional special odd Hamiltonian superalgebras in prime characteristic[J]. Commun. Contemp. Math., 2009, 11(4): 107–128.

[4] 张永正, 刘文德. 模李超代数 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[5] 刘文德, 张永正. 有限维单 Cartan 型模李超代数 HO[J]. 数学学报, 2005, 48(02): 319–330.

[6] Zhang Qingcheng, Zhang Yongzheng. Derivation algebras of the modular Lie superalgebras W and S of Cartan-type[J]. Acta Math. Sci., 2000, 20(1): 137–144.

[7] Bai Wei, Liu Wende. Superderivations for modular graded Lie superalgebras of Cartan-type[J]. Alger. Represent. Theory, 2014, 17(1): 69–86.

[8] Liu Wende, Zhang Yongzheng, Wang Xiuling. The derivation algebra of the Cartan-type Lie superalgebra HO[J]. J. Algebra, 2004, 273: 176–205.

[9] Su Yucai, Zhang Ruibin. Coholomology of Lie superalgebras $\mathrm{sl}_{\mathrm{m|n}}$ and $\mathrm{osp}_{2|2\mathrm{n}}$[J]. Proc. London Math. Soc.(3), 2007, 94(1): 91–136.

[10] Xie Wenjuan, Zhang Yongzheng. Second cohomology of the modular Lie superalgebra of Cartan type K[J]. Algebra Colloq., 2009, 16(2): 309–324.

[11] Yuan Jixia, Liu Wende, Bai Wei. Associative forms and second cohomologies of Lie superalgebras HO and KO[J]. J. Lie Theory, 2013, 23: 203–215.

[12] Sun Liping, Liu Wende. Low-dimensional cohomology of Lie superalgebra A(1,0) with coefficients in Witt or Special superalgebras[J]. Taiwanese J. Math., 2013, 17(1): 83–107.

[13] 孙丽萍. 限制李超代数与 Hom- 李超代数中若干问题研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014.

[14] Sun Liping, Liu Wende, Wu Boying. Low-dimensional cohomology of Lie superalgebra $\mathrm{sl}_{\mathrm{m|n}}$ with coefficients in Witt or Special superalgebras[J]. Indag. Math. (N.S.), 2014, 25(1): 59–77.

[15] Farnsteiner R. Dual space derivations and $H^2(L,\mathbb{F})$ of modular Lie algebras[J]. Canad. J. Math., 1987, 39(5): 1078–1106.

[16] Wang Shujuan, Liu Wende. The first cohomology of $\mathrm{sl}_{2|1}$ with coefficients in χ-reduced Kac modules and simple modules[J]. J. Pure Appl. Algebra, 2020, 224(11): 106–403.

LOW-DIMENSIONAL COHOMOLOGY OF LIE SUPERALGEBRA $\tilde{P}(2)$ WITH COEFFICIENTS IN ODD HAMILTONIAN SUPERALGEBRA HO

HUO Xue-tong[1] , SUN Li-ping[1] , LIU Wen-de[2]

(*1. College of Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China*)

(*2. School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal of University, Haikou 571158, China*)

Abstract: In this paper, the classical Lie superalgebra $\tilde{P}(2)$ is embedded into the branch of zero-order of odd Hamiltonian Lie superalgebra HO, in a field of characteristic $p > 3$, so that HO becomes a $\tilde{P}(2)$-module in the sense of the adjoint representation. By submodule decomposition and weight space decomposition of HO, the low-dimensional cohomology of $\tilde{P}(2)$ with coefficients in HO is obtained.

Keywords: isomorphism; decomposition; derivation; cohomology

2010 MR Subject Classification: 17B50; 17B05