Vol. 43 (2023)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

正测度 Cantor 集与正测度 Cantor 函数

李雨哲, 王　丽
(宁夏大学数学统计学院, 宁夏 银川 750021)

摘 要:　本文利用类比的方法, 将 Cantor 集上定义的 Cantor 函数进行了推广. 首先给出了正测度 Cantor 集及正测度 Cantor 函数的定义; 然后通过严格的证明得到了正测度 Cantor 函数的一些性质, 并给出了正测度 Cantor 函数的一些应用; 最后通过实例说明，由于正测度 Cantor 函数构造的特殊性, 可以用来作为一些命题的反例.

关 键 词:　Cantor 集; 正测度 Cantor 集; Cantor 函数; 正测度 Cantor 函数
MR(2010) **主题分类号**:　28A78　　　　**中 图 分 类 号**:　O174.1
文 献 标 识 码:　A　　　　**文 章 编 号**:　0255-7797(2023)03-0277-06

1 引言

集合论作为现代数学的基础, 是 19 世纪末由伟大的德国数学家 Cantor 创立起来的. Cantor 于 1883 年引入后来以他名字命名的 Cantor 集. Cantor 集使得我们对集合论和点集拓扑以及分形等方面有了更加深刻的认识, 它是分数维的点集, 同时也是分形的重要例子. 它的测度为 0 并且为不可数集, 打破了我们对集合的传统认知. 其次由 Cantor 集的构造过程可知, Cantor 集是自相似的集合, 也就是分形. 该集合具有无处稠密并且完备的性质, 在集合论、拓扑学、实分析、测度论、分形理论等各个数学分支中都扮演着非常重要的角色. 而 Cantor 函数为定义在 Cantor 开集和 Cantor 集上的函数, 由于它具有极其特殊的处处连续但不绝对连续、导数几乎处处为 0 的性质, 打破了常规, 可以使得我们对函数有一个更加深刻的认识, 并且以 Cantor 函数经常作为反例可以加深对相关问题的认识. 将 Cantor 集中第 n 次分割去掉的小区间的长度由 $1/3^n$ 推广到 $(1-\alpha)/3^n$(其中 $0 \le \alpha < 1$) 便得到了正测度 Cantor 集, 而当 $\alpha = 0$ 的时候, 便是 Cantor 集, 由此可见正测度 Cantor 集为 Cantor 集的推广. 那么我们是否也能在正测度 Cantor 集与正测度 Cantor 开集上定义一个正测度 Cantor 函数去作为 Cantor 函数的一种推广呢？本文首先给出 Cantor 集和正测度 Cantor 集的定义和相关性质, 然后对比 Cantor 函数去定义正测度 Cantor 函数, 进一步探索与 Cantor 函数类似的相关性质, 并给出正测度 Cantor 函数的一些应用.

2 理论推导与证明

2.1 Cantor 集与正测度 Cantor 集

*收稿日期: 2022-12-01　　接收日期: 2023-02-20
基金项目: 2022 年宁夏大学研究生教育改革创新与实践项目基金资助.
作者简介: 李雨哲 (2001–), 男, 四川宜宾, 研究生, 主要研究方向: 实分析. E-mail:634431176@qq.com.
通讯作者: 王丽 (1977–), 女, 宁夏银川, 讲师, 主要研究方向: 测度论. E-mail:wangli229@126.com.

将闭区间 $[0,1]$ 三等分, 去掉中间长度为 $(1-\alpha)/3$ 的开区间, 留剩下两段闭区间, 再将剩下的两段闭区间再分别去掉中间一段长度为 $(1-\alpha)/3^2$ 的开区间, 剩下更短的四段闭区间, $\cdots\cdots$, 将这样的操作一直继续下去, 直至无穷, 由于在不断分割舍弃过程中, 所形成的闭区间数目越来越多, 长度越来越小, 在极限的情况下, 得到一个疏朗集, 称其为正测度 Cantor 集 [1], 记为 P_α(其中 $0\leq\alpha<1$). 把剩下的集合称为正测度 Cantor 开集. 而当 $\alpha=0$ 的时候, 正 Cantor 集测度就是经典的 Cantor 集 [2].

下面以对比的方法给出 Cantor 集与正测度 Cantor 集的定义及性质, 如下表:

表 1 Cantor 集与正测度 Cantor 集的异同

Cantor 集	正测度 Cantor 集
第 n 次所去掉区间长度为 $1/3^n$	第 n 次所去掉区间长度为 $(1-\alpha)/3^n$ $(0\leq\alpha<1)$
第 n 次所去掉区间个数为 $2^{(n-1)}(n\geq1)$	第 n 次所去掉区间个数为 $2^{(n-1)}(n\geq1)$
非空有界闭集	非空有界闭集
自密集	自密集
完备集	完备集
疏朗集	疏朗集
基数: 连续统基数 c	基数: 连续统基数 c
Cantor 集 Lebesgue 测度为 0	正测度 Cantor 集 Lebesgue 测度为 α
Cantor 开集的 Lebesgue 测度为 1	正测度 Cantor 开集的 Lebesgue 测度为 $1-\alpha$

2.2 Cantor 函数与正测度 Cantor 函数

定义 Cantor 函数 $f(x)$ 如下 [3]: 令 $f(0)=0$, $f(1)=1$, 在 G_{11} 上定义 $f(x)=1/2$, 在 G_{21} 上定义 $f(x)=1/4$, 在 G_{22} 上定义 $f(x)=3/4$. 在 G_{kj} 上定义 $f(x)=(2j-1)/2^k$ $(j=1,2,3,\ldots,2^{k-1})$. 当 $x\in P$, 且 $x\notin\{0,1\}$ 时定义 $f(x)=\sup\{f(t)|t\in G,t<x\}$. Cantor 函数挑战了关于连续性和测度的天然直觉; 尽管它处处连续, 但是几乎处处导数为零, 并且可以作为很多例子的反例. 所以我们思考对 Cantor 函数的推广是有意义的.

定义正测度 Cantor 函数 $\theta(x)$: 令 $\theta(0)=0$, $\theta(1)=1$, 在 $G_{11\alpha}$ 上定义 $\theta(x)=1/2$, 在 $G_{21\alpha}$ 上定义 $\theta(x)=1/4$, 在 $G_{22\alpha}$ 上定义 $\theta(x)=3/4$. 在 $G_{kj\alpha}$ 上定义 $\theta(x)=(2j-1)/2^k$ $(j=1,2,3,\ldots,2^{k-1})$. 当 $x\in P_\alpha$, 且 $x\notin\{0,1\}$ 时定义 $\theta(x)=\sup\{\theta(t)|t\in G_\alpha,t<x\}$.

可以直观的看出, 当 $\alpha=0$ 的时候, 正测度 Cantor 函数就是 Cantor 函数. 故正测度 Cantor 函数可以看作是 Cantor 函数的一种推广.

下面对正测度 Cantor 函数的一些性质进行讨论:

1) 正测度 Cantor 函数为 [0, 1] 上单调不减的函数.

$\forall x<y$, 若 $x,y\in P_\alpha$, 则由定义可得, $\theta(x)=\sup\{\theta(t)|t\in G_\alpha,t<x\}\leq\theta(y)=\sup\{\theta(t)|t\in G_\alpha,t<y\}$.

若 $x,y\in G_\alpha$, 则分三种讨论.

(1) x,y 在同一个 $G_{kj\alpha}$, 则 $\theta(x)\leq\theta(y)$ 显然成立 (事实上 $\theta(x)=\theta(y)$).

(2) x,y 在同一个 $G_{k\alpha}$, 而不在同一个 $G_{kj\alpha}$(也就是同一次分割的不同区间段上). 因为 $x<y$, 则 x 所在的 $G_{ki\alpha}$ 中的 i 小于 y 所在的 $G_{kj\alpha}$ 中的 j. 故 $\theta(x)=(2i-1)/2^k\leq\theta(x)=(2j-1)/2^k$.

(3) x, y 在不同的 $G_{k\alpha}$(也就是不是同一次分割). 由函数的构造可得 $\theta(x) \le \theta(y)$(类似 Cantor 函数在其相应定义域上的单调性).

若 $x \in G_\alpha$, $y \in P_\alpha$, 此时 $\theta(y) = \sup\{\theta(t) | t \in G_\alpha, t < y\}$ 而 $x < y$, 故 $\theta(x) \le \theta(y)$.

若 $x \in P_\alpha$, $y \in G_\alpha$, 此时因为 $x < y$, $\theta(x) = \sup\{\theta(t) | t \in G_\alpha, t < x\}$. 而对于 $\forall t < x < y (t \in G_\alpha)$, $\theta(t) \le \theta(y)$(在 G_α 上 $\theta(x)$ 单调不减 (上面已证明)). 故 $\theta(x) = \sup\{\theta(t) | t \in G_\alpha, t < x\} \le \theta(y) = \sup\{\theta(t) | t \in G_\alpha, t < y\}$.

故 $\theta(x)$ 为单调不减的函数.

2) $\theta(x)$ 在 G_α 上取值为 $[0,1]$ 上的一切二进制有理数.

$\theta(x)$ 在 G_α 上取值为 $[0,1]$ 上的一切二进制有理数. (可从 Cantor 函数在 G 上取值为 $[0,1]$ 上的一切二进制有理数理解.)

也可以这样理解. 因为 $(2j-1)/2^k$ 在十进制中为有理数, 故 $\theta(x)$ 在 G_α 上取值只能为有理数. 再放到二进制中, $\theta(x)$ 在 G_α 上可取值到任意二进制有限位的有理数 (容易证明) 且由于 $(2j-1)/2^k$ 中的 $k \to +\infty$, 故 $\theta(x)$ 在 G_α 上可取值到一切二进制有理数.

3) 正测度 Cantor 函数是连续函数.

由上面证明知: 正测度 Cantor 函数在 G_α 上取值为 $[0,1]$ 上的一切二进制有理数.

假设 $\theta(x)$ 在 $x_0 \in [0,1]$ 处间断, 则由于 $\theta(x)$ 的单调有界性, 故 x_0 为第一类间断点.

由于在两个区间上单调有界, $\lim\limits_{x \to x_0^+} \theta(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^-} \theta(x)$ 都存在, 并且由于 x_0 为间断点, 故 $\lim\limits_{x \to x_0^+} \theta(x) \ne \lim\limits_{x \to x_0^-} \theta(x)$. 在区间 $(\lim\limits_{x \to x_0^-} \theta(x), \lim\limits_{x \to x_0^+} \theta(x))$ 中不含 $\theta(x)$ 的任何一个函数值. 而又从 $\theta(x)$ 在 G_α 上取值为 $[0,1]$ 上的一切二进制有理数得知 $\theta(x)$ 的值在 $[0,1]$ 中稠密. 因而得矛盾. 故无间断点, $\theta(x)$ 为连续函数.

4) 正测度 Cantor 函数在 P_α 中分割区间的端点上不可微, 在 G_α 上可微.

首先明确在不同的 $G_{kj\alpha}$ 上 (k 不同或者 j 不同) 都会导致 $\theta(x)$ 值不同.

取 $r_{(n+1)} = (1/3)^{(n+1)}(1-\alpha) + \alpha/2^{(n+1)}$, 并且使得 n 足够大. 为证明 $\theta(x)$ 在 P_α 中分割区间的端点上不可微, 只需证明在 P_α 中分割区间的端点上极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\theta(x+\Delta x)-\theta(x)}{\Delta x}$ 不存在即可.

首先证明, $\theta(x)$ 在 $G_{kj\alpha}$ 的值与 $\theta(x)$ 在离 $G_{kj\alpha}$ 最近且分别在其左右侧的第 $k+1$ 次分割的区间 $G_{(k+1)m_1\alpha}$, $G_{(k+1)n_1\alpha}$ 的值相差为 $1/2^{k+1}$.

$\theta(x)$ 在 $G_{kj\alpha}$ 的值为 $(2j-1)/2^k$, 而由于 $G_{(k+1)m_1\alpha}$ 为离 $G_{kj\alpha}$ 最近且在其左侧的第 $k+1$ 次分割的区间, 故 $m_1 = 2j-1$, $\theta(x)$ 在 $G_{(k+1)m_1\alpha}$ 值为 $(4j-3)/2^{k+1}$, 相差为 $1/2^{k+1}$.

$\theta(x)$ 在 $G_{kj\alpha}$ 的值为 $(2j-1)/2^k$, 而由于 $G_{(k+1)n_1\alpha}$ 为离 $G_{kj\alpha}$ 最近且在其右侧的第 $k+1$ 次分割的区间, 故 $n_1 = 2j$, $\theta(x)$ 在 $G_{(k+1)n_1\alpha}$ 值为 $(4j-1)/2^{k+1}$, 相差为 $1/2^{k+1}$.

其次来看: $\theta(x)$ 在 $G_{kj\alpha}$ 的值与 $\theta(x)$ 在离 $G_{kj\alpha}$ 最近且分别在其左右侧的第 $k+2$ 次分割的区间 $G_{(k+2)m_2\alpha}$, $G_{(k+2)n_2\alpha}$ 的值相差为 $1/2^{k+2}$.

前面已证明 $\theta(x)$ 在 $G_{kj\alpha}$ 的值与 $\theta(x)$ 在离 $G_{kj\alpha}$ 最近且分别在其左右侧的第 $k+1$ 次分割的区间 $G_{(k+1)m_1\alpha}$, $G_{(k+1)n_1\alpha}$ 的值相差为 $1/2^{k+1}$.

故 $\theta(x)$ 在 $G_{(k+1)m_1\alpha}$ 的值与 $\theta(x)$ 在离 $G_{(k+1)m_1\alpha}$ 最近并且在其右侧的第 $k+2$ 次分割的区间 $G_{(k+2)n_2\alpha}$ 的值相差为 $1/2^{k+2}$; $\theta(x)$ 在 $G_{(k+1)n_1\alpha}$ 的值与 $\theta(x)$ 在离 $G_{(k+1)n_1\alpha}$ 最近且在其左侧的第 $k+2$ 次分割的区间 $G_{(k+2)m_2\alpha}$ 的值相差为 $1/2^{k+2}$. 因此, $\theta(x)$ 在 $G_{kj\alpha}$ 的值与 $\theta(x)$ 在离 $G_{kj\alpha}$ 最近且在其左右侧的第 $k+2$ 次分割的区间 $G_{(k+2)m_2\alpha}$,$G_{(k+2)n_2\alpha}$ 的值相

差为 $1/2^{k+2}$.

由此下去, 可以证明出 $\theta(x)$ 在 $G_{kj\alpha}$ 的值与 $\theta(x)$ 在离 $G_{kj\alpha}$ 最近且在其左右侧的第 $k+i$ 次分割的区间 $G_{(k+i)m_i\alpha}$, $G_{(k+i)n_i\alpha}$ 的值相差为 $1/2^{k+i}$. 因为 $(1/2^{(k+1)}-1/2^{(k+2)}-1/2^{(k+3)}-\cdots-1/2^{(k+i)}=1/2^{(k+i)}$)

若 $x\in P_\alpha$, 且 x 为 $G_{kj\alpha}$ 分割区间右端点时, $x+r_{(k+1)}$ 刚好到达离 $G_{kj\alpha}$ 最近且在其右侧的第 $k+1$ 次分割的区间端点.

若 $x\in P_\alpha$, 且 x 为 $G_{kj\alpha}$ 分割区间左端点时, $x-r_{(k+1)}$ 刚好到达离 $G_{kj\alpha}$ 最近且在其左侧的第 $k+1$ 次分割的区间端点.

由此得出 $\forall x\in P_\alpha$:

(1) x 为分割区间的右端点时, $\theta\left(x+r_n\right)-\theta\left(x\right)=\ 1/2^n$ (n 足够大);

(2) x 为分割区间的右端点时, $\theta\left(x-r_n\right)-\theta\left(x\right)=0$(n 足够大);

(3) x 为分割区间的左端点时, $\theta\left(x-r_n\right)-\theta\left(x\right)=0$(n 足够大);

(4) x 为分割区间的左端点时, $\theta\left(x-r_n\right)-\theta\left(x\right)=\ 1/2^n$ (n 足够大).

对于极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\theta(x+\Delta x)-\theta(x)}{\Delta x}$, 有一个路径为 0, 另一个路径为 $1/\alpha$, 明显不为 0. 由海涅定理可知 $\theta(x)$ 在分割区间的端点上不可微. 而对于 $\forall x\in G_\alpha$, 由于其为常值函数, 故其可微.

5) $\theta(x)$ 一致连续于闭区间 $[0,1]$. 由于 $\theta(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续, 故其在 $[0,1]$ 上一致连续.

6) $\theta(x)$ 为可测函数. 由于 $\theta(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 连续, 故其为可测函数.

7) $\theta(x)$ 在 $[0,1]$ 上的积分. 由于 $\theta(x)$ 为闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数, 所以 $\theta(x)$ 可积, 且其积分等于所有小区间 $G_{kj\alpha}$ 面积之和, 即:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\theta(x)&=\frac{(1-\alpha)}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{(1-\alpha)}{3^2}\times(\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^2})+\frac{(1-\alpha)}{3^3}\times(\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^3})+\dots\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\alpha}{3^n}\times(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{2^n}+\frac{5}{2^n}+\frac{7}{2^n}+\cdots+\frac{2^n-1}{2^n})\\
&=\frac{1-\alpha}{4}\times\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n\\
&=\frac{1-\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

3 关于正测度 Cantor 函数的应用

从 Cantor 函数以及正测度 Cantor 函数构造的抽象性可以思考, 是否可以将其用于当作某些抽象命题的反例? 下面通过几道例题来说明可以利用正测度 Cantor 函数作为一些命题反例:

3.1 存在连续函数, 把疏朗集映成区间 [4]

只需说明正测度 Cantor 函数 $\theta(x)$ 在 $[0,1]\setminus P_\alpha$ 所取的值, $\theta(x)$ 在 P_α 上也均能取到即可. 而由 $\theta(x)$ 的定义这是明显的. 因为每个挖出来的区间的右端点都属于 P_α, 而 $\theta(x)$ 在此点的取值等于 $\theta(x)$ 在该区间上的值. 所以 $\theta(P_\alpha)=\theta([0,1])=[0,1]$.

3.2 存在一个定义在 R 上的可微函数 $f(x)$, 其稳定点之集为正测度 Cantor 集 P_α(或者 Cantor 集 P), 而 $f(x)$ 无极值点 [5]

令 $\Phi(x)=\min\{|x-a|:a\in P_\alpha\}(x\in R)$, 下证明对一切 $x,y\in R$, $|\Phi(x)-\Phi(y)|\le|x-y|$.

若 x, y 都在 P_α 上, 则 $|\Phi(x)-\Phi(y)=0|\le|x-y|$;

若 $x\in P_\alpha$, $y\notin P_\alpha$ 时, 则 $|\Phi(x)-\Phi(y)|=\Phi(y)$, 因为 $x\in P_\alpha$, 故 $\Phi(y)\le|x-y|$;

若 $x\notin P_\alpha$, $y\notin P_\alpha$ 时, 不妨设 $x<y$.

若 x,y 在同一个分割区间段上, 此时如果 x,y 同时靠近右端点 n 近一点, $|\Phi(x)-\Phi(y)|=|n-x-(n-y)|=|x-y|$.

若 x, y 同时靠近左端点近一点也同理.

如果 x, y 分别靠近左端点 m、右端点 n 近一点时, $\Phi(x)\le n-x$, $\Phi(y)=n-y$. 故 $\Phi(x)-\Phi(y)\le y-x$. 又 $\Phi(y)\le y-m$, $\Phi(x)=x-m$. 故 $\Phi(x)-\Phi(y)\ge x-y$. 因此 $|\Phi(x)-\Phi(y)|\le|x-y|$.

若 x, y 不在同一个分割区间段上, 并且设 x 所在区间段上右端点为 m, x 所在区间段上左端点为 n, 此时 $|\Phi(x)-\Phi(y)|\le|\Phi(x)|+|\Phi(y)|\le m-x+y-m=|x-y|$. 证毕.

因此 $\Phi(x)$ 为连续函数, 并且其值非负. 当 $\Phi(x)=0$ 时等价于 $x\in P_\alpha$. 令 $f(x)=\int_0^x\Phi(t)dt,(x\in R)$. 由于 $\forall x,y\in P_\alpha$, x, y 之间都存在区间段, 使得 $\Phi(x)$ 为正数. 而对 $\forall x\notin P_\alpha$, $\Phi(x)$ 为正数. 故 $f(x)$ 严格递增, 没有极值点, 而 $f'(x)=\Phi(x)$, 故 $\{x:f'(x)=0\}=P_\alpha$.

3.3 存在连续函数, 它把 Lebesgue 测度为 $\alpha(0\le\alpha<1)$ 的集合映为正测度集

如正测度 Cantor 函数把 P_α 映成 Lebesgue 测度为 1 的区间 $[0,1]$.

4 结论

在正测度 Cantor 集上去类似定义 Cantor 函数得到正测度 Cantor 函数, 其可作为 Cantor 函数的一种推广. 定义了正测度 Cantor 函数后, 我们得到一个与 α 有关的函数. 通过控制 $\alpha(0\le\alpha<1)$ 进而控制积分和调节函数图像, 从而得到一个定义在 $[0,1]$ 上, 一致连续并且可测的理想函数. 由于其构造的特殊性, 我们经常可以应用到一些例子中充当反例.

笔者曾在文献 [6] 中研究了 Cantor 集的分割可以看作为按比例 (比例为 1/3) 或者按照长度进行的分割. 因此, 除本文将 Cantor 集看作按照长度分割进而去构造的正测度 Cantor 函数外, 也可以构造出一个将其看作为按比例分割的 Cantor 集构造的类似的 Cantor 函数. 在用类似方法定义完成类似的 Cantor 函数后, 再接着对其函数的图像进行绘制以及对其性质进行探讨, 研究其与 Cantor 函数以及正测度 Cantor 函数的异同之处 [7](除此之外, 还可以在其他如: 四分 Cantor 集、广义 Cantor 集 [8] 上类似定义). 这是下一步将要进行的工作.

参 考 文 献

[1] 匡继昌. 实分析与泛函分析 (第 3 版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[2] 李翠香, 石凌, 刘丽霞. Cantor 集的性质及应用 [J]. 大学数学, 2011, 27(02): 156–158.

[3] 栾佳璇. Cantor 集与 Cantor 函数性质探究 [J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 1222–1228.

[4] 吴杰, 夏雪. 著名的 Cantor 函数及其应用实例 [J]. 高等函授学报 (自然科学版), 2004(05): 26–27.

[5] 刘仁义. Cantor 集、Cantor 函数及其在构造反例中的应用 [J]. 河西学院学报, 2005, 21(2): 3–9.

[6] 李雨哲, 王丽. 关于正测度 Cantor 集的一些思考 [J]. 中文科技期刊数据库 (全文版) 教育科学, 2022, 1(2): 216–219.

[7] Dovgoshey O, Martio O, Ryazanov V, Vuorinen M. The Cantor function-Science Direct[J]. Expositiones Mathematicae, 2006, 24(1): 1–37.

[8] 曾超益, 袁德辉. 含参变量 Cantor 集的 Hausdorff 测度 [J]. 数学杂志, 2011, 31(04): 729–737.

POSITIVE MEASURE CANTOR SET AND POSITIVE MEASURE CANTOR FUNCTION

LI Yu-zhe, WANG Li

(*School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 751601, China*)

Abstract: By using of the method of analogy, Cantor function defining on Cantor set is generalized in this paper. Firstly, the definition of positive measure Cantor set and positive measure Cantor function are given; Secondly, some properties about positive measure Cantor function are obtained by strict proofs, and some applications are proposed; Finally, we find that positive measure Cantor function can be regarded as counter-example owing to its particularity of structure.

Keywords: Cantor set; positive measure Cantor set; Cantor function; positive measure Cantor function

2010 MR Subject Classification: 28A78