Vol. 43 (2023)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

一个新的求解加权线性互补问题的非单调光滑牛顿法

贺晓瑞, 汤京永
(信阳师范学院数学与统计学院, 河南 信阳 464000)

摘 要: 本文研究了求解加权线性互补问题的光滑牛顿法. 利用一类光滑函数将加权线性互补问题等价转化成一个光滑方程组, 然后提出一个新的光滑牛顿法去求解它. 在适当条件下, 证明了算法具有全局和局部二次收敛性质. 与现有的光滑牛顿法不同, 我们的算法采用一个非单调无导数线搜索技术去产生步长, 从而具有更好的收敛性质和实际计算效果.

关 键 词: 加权线性互补问题; 光滑牛顿法; 全局收敛; 二次收敛
MR(2010) **主题分类号:** 90C30; 65K05 **中图分类号:** O221.1
文献标识码: A **文章编号:** 0255-7797(2023)03-0253-14

1 引言

2012 年, Florian A. Potra 提出了加权线性互补问题 (weighted Linear Complementarity Problem)[1], 其数学模型定义如下: 求 $(x,s,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, 使得

$$x\geq 0,\ s\geq 0,\ Px+Qs+Ry=a,\ xs=w, \tag{1.1}$$

这里 $P\in\mathbb{R}^{(n+m)\times n}, Q\in\mathbb{R}^{(n+m)\times n}, R\in\mathbb{R}^{(n+m)\times m}$ 为给定矩阵, $a\in\mathbb{R}^{n+m}$ 是给定向量, $w\geq 0$ 为权重向量. xs 表示向量 x 和 s 对应分量相乘组成的向量, 即 $xs:=(x_1s_1,...,x_ns_n)^T$. 我们称加权线性互补问题是单调的, 如果其满足对任意的 $(\Delta x,\Delta s,\Delta y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$,

$$P\Delta x+Q\Delta s+R\Delta y=0\Longrightarrow\langle\Delta x,\Delta s\rangle\geq 0.$$

经济、管理等领域中的许多均衡问题都可以转化成加权线性互补问题模型进行求解, 比如 Fisher 竞争市场均衡问题可以转化为单调加权线性互补问题, Arrow-Debreue 竞争市场均衡问题可以转化成自对偶加权线性互补问题等等 [2]. 有些市场均衡问题既可以转化成标准的互补问题, 也可以转化成加权线性互补问题, 但后者往往可以更有效地进行求解. 比如 Fisher 竞争市场均衡问题既可以转化为非线性互补问题, 也可以转化为单调加权线性互补问题, 而后者可以被内点法有效地求解 [1]. 2018 年, Potra 在其综述性论文 [2] 中详细介绍了加权线性互补问题的应用. 自从 Potra 提出了加权线性互补问题的数学模型后, 许多学者对该问题的求解方法展开了深入研究, 取得了很好的结果. 比如, Potra 在文献 [1,2,3] 中给出了求解加权线性互补问题的内点算法, Dong 等人 [4] 给出了一个求解加权线性互补问题的非内部连续化算法, Asadi 等人 [5] 给出了一个求解加权线性互补问题的完全牛顿步内点法, Tang 和 Zhou 在文献 [6,7] 中给出了求解加权线性互补问题的阻尼高斯牛顿法和非

*收稿日期: 2022-09-06 接收日期:2022-10-27
基金项目: 河南省自然科学基金项目 (222300420520) 和河南省高等学校重点科研项目 (22A110020).
作者简介: 贺晓瑞 (1998–), 女, 河南安阳, 硕士, 主要研究方向: 最优化理论与算法.

单调 Levenberg-Marquardt 型法, He 和 Tang[8] 给出了一个求解加权线性互补问题的光滑 Levenberg-Marquardt 法.

光滑牛顿法是求解加权线性互补问题十分有效的算法, 其基本思想是利用某个光滑函数将加权线性互补问题等价转化成一个光滑方程组, 然后利用牛顿法求解该方程组. 2016 年, Zhang[9] 给出了一个求解单调加权线性互补问题的光滑牛顿法, 证明了算法具有全局和局部二次收敛性质. 2018 年, Tang[10] 给出了一个适合求解大规模单调加权线性互补问题的光滑非精确牛顿法, 分析了算法的全局和局部收敛性质. 2020 年, Liu 和 Tang[11] 给出了一个求解加权线性互补问题的光滑牛顿法, 在非奇异条件下证明了算法具有局部二次收敛速度. 2021 年, Tang 和 Zhang[12] 给出了一个求解对称锥加权互补问题的非单调光滑牛顿法, 当问题的解集非空时, 证明了算法在弱于非奇异条件下具有局部二次收敛速度.

本文首先给出一类光滑函数, 分析了函数的性质. 基于此函数, 我们给出了一个新的求解加权线性互补问题的非单调光滑牛顿法, 在适当条件下证明了算法具有全局和局部二次收敛性质. 与文献 [9-12] 中的光滑牛顿法不同, 我们的算法采用一个非单调无导数线搜索技术去产生步长, 从而具有更好的收敛性质和实际计算效果.

在本文中, $\mathbb{R}^n$ 定义为 n 维实列向量空间, $\mathbb{R}^n_+$ 和 $\mathbb{R}^n_{++}$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中的非负和正象限. $\|\cdot\|$ 表示 2- 范数. 定义 $\mathbb{N} := \{1,2,...,n\}$. 对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$, 用 $\mathrm{vec}\{x_i : i\in\mathbb{N}\}$ 表示向量 x, 用 $\mathrm{diag}\{x_i : i\in\mathbb{N}\}$ 表示第 i 个对角元素为 x_i 的对角矩阵.

2 一类光滑函数

光滑函数在光滑牛顿法的设计中起着至关重要的作用. 在本文中, 我们考虑如下单参数光滑函数:

$$\phi^c_\theta(\mu,a,b) = a+b-\sqrt{\theta(a-b)^2+(1-\theta)(a^2+b^2)+2(1+\theta)c+\mu^2},\ \forall(\mu,a,b)\in\mathbb{R}^3, \tag{2.1}$$

其中 $c\ge 0$ 为固定的常数, $\theta\in(-1,1]$ 为给定的参数.

引理 2.1 设 ϕ^c_θ 由 (2.1) 定义, 则

$$\phi^c_\theta(\mu,a,b)=0 \Longleftrightarrow a\ge 0,\ b\ge 0,\ ab=c+\frac{\mu^2}{2(1+\theta)}. \tag{2.2}$$

证 首先证明 “$\Longrightarrow$”. 由 $\phi^c_\theta(\mu,a,b)=0$ 可得

$$a+b=\sqrt{\theta(a-b)^2+(1-\theta)(a^2+b^2)+2(1+\theta)c+\mu^2}. \tag{2.3}$$

将上式两边同时平方, 可得 $2(1+\theta)ab = 2(1+\theta)c+\mu^2$, 即

$$ab=c+\frac{\mu^2}{2(1+\theta)}. \tag{2.4}$$

将 (2.4) 代入 (2.3) 可得

$$a=\sqrt{a^2+b^2+2c+\frac{\mu^2}{1+\theta}}-b\ge 0,\quad b=\sqrt{a^2+b^2+2c+\frac{\mu^2}{1+\theta}}-a\ge 0.$$

接下来证明 "$\Longleftarrow$". 因为 $ab = c + \frac{\mu^2}{2(1+\theta)}$, 故可知 $2(1+\theta)c = 2(1+\theta)ab - \mu^2$. 再结合 $a \geq 0, b \geq 0$, 可得

$$\begin{aligned}\phi_\theta^c(\mu, a, b) &= a + b - \sqrt{a^2 + b^2 - 2\theta ab + 2(1+\theta)ab} \\ &= a + b - \sqrt{(a+b)^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

因此, 引理成立. 证毕.

由 (2.2) 可知, 函数 ϕ_θ^c 满足如下性质:

$$\phi_\theta^c(0, a, b) = 0 \Longleftrightarrow a \geq 0,\ b \geq 0,\ ab = c. \tag{2.5}$$

引理 2.2 设 ϕ_θ^c 由 (2.1) 定义, 则 ϕ_θ^c 在任意点 $(\mu, a, b) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 处是连续可微的, 并且

$$\nabla \phi_\theta^c(\mu, a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial \mu}(\mu, a, b) \\ \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial a}(\mu, a, b) \\ \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial b}(\mu, a, b) \end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial \mu}(\mu, a, b) &= -\frac{\mu}{\sqrt{\theta(a-b)^2 + (1-\theta)(a^2+b^2) + 2(1+\theta)c + \mu^2}}, \\ \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial a}(\mu, a, b) &= 1 - \frac{a - \theta b}{\sqrt{\theta(a-b)^2 + (1-\theta)(a^2+b^2) + 2(1+\theta)c + \mu^2}}, \\ \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial b}(\mu, a, b) &= 1 - \frac{b - \theta a}{\sqrt{\theta(a-b)^2 + (1-\theta)(a^2+b^2) + 2(1+\theta)c + \mu^2}}.\end{aligned}$$

证 因为对任意的 $(\mu, a, b) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 有 $\theta(a-b)^2 + (1-\theta)(a^2+b^2) + 2(1+\theta)c + \mu^2 > 0$, 所以由导数的定义可知结论成立. 证毕.

引理 2.3 设 ϕ_θ^c 由 (2.1) 定义, 则在任意点 $(\mu, a, b) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 处满足

$$0 < \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial a}(\mu, a, b) < 2,\ \ 0 < \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial b}(\mu, a, b) < 2.$$

证 对任意的 $(\mu, a, b) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 因为 $\mu > 0$, 故

$$\begin{aligned}(a - \theta b)^2 &\leq a^2 + b^2 - 2\theta ab \\ &= \theta(a-b)^2 + (1-\theta)(a^2+b^2) \\ &< \theta(a-b)^2 + (1-\theta)(a^2+b^2) + 2(1+\theta)c + \mu^2,\end{aligned}$$

进而可得

$$-1 < \frac{a - \theta b}{\sqrt{\theta(a-b)^2 + (1-\theta)(a^2+b^2) + 2(1+\theta)c + \mu^2}} < 1.$$

这表明 $0 < \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial a}(\mu, a, b) < 2$. 同理可证 $0 < \frac{\partial \phi_\theta^c}{\partial b}(\mu, a, b) < 2$. 证毕.

引理 2.4 设 ϕ_θ^c 由 (2.1) 定义, 则对任意的 $(\mu,a,b),(\bar\mu,\bar a,\bar b)\in\mathbb{R}^3$, 有

$$|\phi_\theta^c(\mu,a,b)-\phi_\theta^c(\bar\mu,\bar a,\bar b)| \quad\le\quad 2\sqrt{2}\|(\mu,a,b)-(\bar\mu,\bar a,\bar b)\|.$$

证 我们定义 $g_\theta^c(\mu,a,b):=\sqrt{\theta(a-b)^2+(1-\theta)(a^2+b^2)+2(1+\theta)c+\mu^2}$. 注意到 g_θ^c 等价于

$$\begin{aligned} g_\theta^c(\mu,a,b) &= \sqrt{(a-\theta b)^2+(1-\theta^2)b^2+2(1+\theta)c+\mu^2} \\ &= \|(a-\theta b,\sqrt{1-\theta^2}b,\sqrt{2(1+\theta)c},\mu)\|. \end{aligned}$$

因此, 对任意的 $(\mu,a,b),(\bar\mu,\bar a,\bar b)\in\mathbb{R}^3$, 有

$$\begin{aligned} |g_\theta^c(\mu,a,b)-g_\theta^c(\bar\mu,\bar a,\bar b)| &= |\|(a-\theta b,\sqrt{1-\theta^2}b,\sqrt{2(1+\theta)c},\mu)\| \\ &\quad -\|(\bar a-\theta\bar b,\sqrt{1-\theta^2}\bar b,\sqrt{2(1+\theta)c},\bar\mu)\|| \\ &\le \|(a-\theta b,\sqrt{1-\theta^2}b,\sqrt{2(1+\theta)c},\mu) \\ &\quad -(\bar a-\theta\bar b,\sqrt{1-\theta^2}\bar b,\sqrt{2(1+\theta)c},\bar\mu)\| \\ &= \|(a-\bar a+\theta(\bar b-b),\sqrt{1-\theta^2}(b-\bar b),\mu-\bar\mu\| \\ &= \sqrt{[a-\bar a+\theta(\bar b-b)]^2+(1-\theta^2)(b-\bar b)^2+(\mu-\bar\mu)^2} \\ &\le \sqrt{2(a-\bar a)^2+2\theta^2(b-\bar b)^2+(1-\theta^2)(b-\bar b)^2+(\mu-\bar\mu)^2} \\ &= \sqrt{2(a-\bar a)^2+(1+\theta^2)(b-\bar b)^2+(\mu-\bar\mu)^2} \\ &\le \sqrt{2}\|(\mu,a,b)-(\bar\mu,\bar a,\bar b)\|, \end{aligned}$$

这里最后一个不等式成立是因为 $\theta\in(-1,1]$. 此外, 对任意的 $(\mu,a,b),(\bar\mu,\bar a,\bar b)\in\mathbb{R}^3$, 我们有

$$\begin{aligned} |a+b-(\bar a+\bar b)| &\le |a-\bar a|+|b-\bar b| \\ &\le \sqrt{2[(a-\bar a)^2+(b-\bar b)^2]} \\ &\le \sqrt{2[(a-\bar a)^2+(b-\bar b)^2+(\mu-\bar\mu)^2]} \\ &= \sqrt{2}\|(\mu,a,b)-(\bar\mu,\bar a,\bar b)\|. \end{aligned}$$

因此, 对任意的 $(\mu,a,b),(\bar\mu,\bar a,\bar b)\in\mathbb{R}^3$, 有

$$\begin{aligned} |\phi_\theta^c(\mu,a,b)-\phi_\theta^c(\bar\mu,\bar a,\bar b)| &= |a+b-(\bar a+\bar b)-(g_\theta^c(\mu,a,b)-g_\theta^c(\bar\mu,\bar a,\bar b))| \\ &\le |a+b-(\bar a+\bar b)|+|g_\theta^c(\mu,a,b)-g_\theta^c(\bar\mu,\bar a,\bar b)| \\ &\le 2\sqrt{2}\|(\mu,a,b)-(\bar\mu,\bar a,\bar b)\|. \end{aligned}$$

这表明 ϕ_θ^c 在 $\mathbb{R}^3$ 上全局 Lipschitz 连续. 证毕.

函数的强半光滑性质在光滑牛顿型算法局部收敛速度的分析中起着重要作用. 关于函数强半光滑的具体定义, 可参见文献 [13].

引理 2.5 设 ϕ_θ^c 由 (2.1) 定义, 则 ϕ_θ^c 在任意点 $(\mu,a,b)\in\mathbb{R}^3$ 处是强半光滑的.

证 如果 $c>0$, 则易知 ϕ_θ^c 在任意点 $(\mu,a,b)\in\mathbb{R}^3$ 处二次连续可微. 这表明梯度 $\nabla\phi_\theta^c$ 在 $(\mu,a,b)\in\mathbb{R}^3$ 处局部 Lipschitz 连续. 因此, ϕ_θ^c 在点 $(\mu,a,b)\in\mathbb{R}^3$ 处强半光滑. 如果 $c=0$, 则由 (2.1) 可知 $\phi_\theta^c(\mu,a,b)=a+b-\sqrt{(a-\theta b)^2+(1-\theta^2)b^2+\mu^2}$. 由文献 [14] 中的引理 2.1 可知函数 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ 在任意点 $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ 处局部 Lipschitz 连续、方向可微并且强半光滑. 此外, 函数 $a-\theta b$ 和 $\sqrt{(1-\theta^2)}b$ 显然处处强半光滑. 因为强半光滑函数的复合函数仍然是强半光滑的, 所以函数 $\sqrt{(a-\theta b)^2+(1-\theta^2)b^2+\mu^2}$ 在任意点 $(\mu,a,b)\in\mathbb{R}^3$ 处是强半光滑的. 显然, 函数 $a+b$ 处处强半光滑. 因此, ϕ_θ^c 在任意点 $(\mu,a,b)\in\mathbb{R}^3$ 处是强半光滑的. 证毕.

3 算法

记 $z:=(\mu,x,s,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$. 我们定义函数

$$H_\theta(z):=\begin{pmatrix}\mu\\ Px+Qs+Ry-a\\ \phi_\theta^{w_1}(\mu,x_1,s_1)\\ \vdots\\ \phi_\theta^{w_n}(\mu,x_n,s_n)\end{pmatrix},\tag{3.1}$$

其中 $w=(w_1,...,w_n)^T$ 为权重向量, 则由 (2.5) 可知 $H_\theta(z)=0\Longleftrightarrow\mu=0$ 且 (x,s,y) 是加权线性互补问题 (1.1) 的解.

引理 3.1 (i) $H_\theta(z)$ 在任意点 $z\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 处连续可微, 其雅克比矩阵为

$$H_\theta'(z)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&P&Q&R\\d_\mu&D_x&D_s&0\end{pmatrix},$$

其中

$$d_\mu:=\mathrm{vec}\left\{-\frac{\mu}{\sqrt{\theta(x_i-s_i)^2+(1-\theta)(x_i^2+s_i^2)+2(1+\theta)w_i+\mu^2}}:i\in\mathbb{N}\right\},$$

$$D_x:=\mathrm{diag}\left\{1-\frac{x_i-\theta s_i}{\sqrt{\theta(x_i-s_i)^2+(1-\theta)(x_i^2+s_i^2)+2(1+\theta)w_i+\mu^2}}:i\in\mathbb{N}\right\},$$

$$D_s:=\mathrm{diag}\left\{1-\frac{s_i-\theta x_i}{\sqrt{\theta(x_i-s_i)^2+(1-\theta)(x_i^2+s_i^2)+2(1+\theta)w_i+\mu^2}}:i\in\mathbb{N}\right\}.$$

(ii) $H_\theta(z)$ 在 $\mathbb{R}^{1+2n+m}$ 上全局 Lipschitz 连续, 即存在常数 $L>0$ 使得

$$\|H_\theta(z_1)-H_\theta(z_2)\|\le L\|z_1-z_2\|,\ \forall\, z_1,z_2\in\mathbb{R}^{1+2n+m}.$$

(iii) $H_\theta(z)$ 在 $\mathbb{R}^{1+2n+m}$ 上是强半光滑的.

(iv) 如果加权线性互补问题是单调的, 则 $H_\theta'(z)$ 在任意点 $z\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 处可逆.

证 由引理 2.2 和引理 2.4 可知结论 (i) 和 (ii) 成立. 因为一个向量值函数强半光滑当且仅当它所有的组成函数强半光滑, 故由引理 2.5 可知结论 (iii) 成立. 由引理 2.3 可知 D_x 和

D_s 是正的对角矩阵. 利用这个性质, 类似于文献 [9] 中引理 1 的证明, 我们可以证明结论 (iv) 成立. 证毕.

下面, 我们给出具体的算法.

算法 3.1 (非单调光滑牛顿法)

步骤 0 选取参数 $\lambda_1, \lambda_2, \delta \in (0,1)$ 和 $\mu_0 > 0$. 选取 $\gamma \in (0,1)$ 使得 $\mu_0 \geq \gamma$. 选取 $x^0, s^0 \in \mathbb{R}^n, y^0 \in \mathbb{R}^m$ 并令 $z^0 := (\mu_0, x^0, s^0, y^0)$. 令 $C_0 := \|H_\theta(z^0)\|$, $\beta_0 := \gamma \min\{1, \|H_\theta(z^0)\|^2\}$. 选取常数 $\eta_{\min}$ 和 $\eta_{\max}$ 满足 $0 \leq \eta_{\min} < \eta_{\max} < 1$. 选取点列 $\{\eta_k\}$ 满足 $\eta_k \in [\eta_{\min}, \eta_{\max}]$. 选取 $Q_0 := 1$. 令 $h := (1,0,0,0) \in \mathbb{R}^{1+2n+m}$. 令 $k := 0$.

步骤 1 如果 $\|H_\theta(z^k)\| = 0$, 则算法停止迭代.

步骤 2 解下面方程得 $\Delta z^k := (\Delta\mu_k, \Delta x^k, \Delta s^k, \Delta y^k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

$$H_\theta(z^k) + H'_\theta(z^k)\Delta z^k = \beta_k h. \tag{3.2}$$

步骤 3 令 $\alpha_k := \delta^{l_k}$, 其中 l_k 是满足下式的最小非负整数 l,

$$\|H_\theta(z^k + \delta^l \Delta z^k)\| \leq C_k - \lambda_1 \|\delta^l \Delta z^k\|^2 - \lambda_2 \|\delta^l H_\theta(z^k)\|^2. \tag{3.3}$$

步骤 4 令 $z^{k+1} := z^k + \alpha_k \Delta z^k$. 令

$$Q_{k+1} := \eta_k Q_k + 1,\ C_{k+1} := \frac{\eta_k Q_k C_k + \|H_\theta(z^{k+1})\|}{Q_{k+1}}. \tag{3.4}$$

$$\beta_{k+1} := \gamma \min\{1, \|H_\theta(z^{k+1})\|^2, \beta_k\}. \tag{3.5}$$

令 $k := k+1$. 转步骤 1.

注: 与文献 [9-12] 中的光滑牛顿法不同, 算法 3.1 在步骤 3 采用一个非单调无导数线搜索技术去产生步长 α_k, 该技术是基于著名的 Zhang-Hager[15] 非单调线搜索技术设计的.

定理 3.1 如果加权线性互补问题是单调的, 那么算法 3.1 有好的定义.

证 假设对于某个 k 有 $z^k = (\mu_k, x^k, s^k, y^k) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 和 $\|H_\theta(z^k)\| \leq C_k$. 由引理 3.1(iv) 可知 $H'_\theta(z^k)$ 可逆, 故方程 (3.2) 是可解的. 这表明步骤 2 是可行的. 记 $f_\theta(z) := \|H_\theta(z)\|^2$, 则 $f_\theta(z)$ 在任意点 $z \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 处连续可微, 并且 $f'_\theta(z) = 2H_\theta(z)^T H'_\theta(z)$. 因为

$$\mu_k < \|H_\theta(z^k)\| = \sqrt{f_\theta(z^k)},\ \beta_k \leq \gamma \min\{1, \|H_\theta(z^k)\|^2\} \leq \gamma \|H_\theta(z^k)\| = \gamma \sqrt{f_\theta(z^k)},$$

故 $\mu_k \beta_k \leq \gamma f_\theta(z^k)$, 再结合 (3.2) 可得

$$\begin{aligned} f'(z^k)\Delta z^k &= 2H_\theta(z^k)^T H'_\theta(z^k)\Delta z^k \\ &= -2f_\theta(z^k) + 2\mu_k\beta_k \\ &\leq -2f_\theta(z^k) + 2\gamma f_\theta(z^k) \\ &= -2(1-\gamma) f_\theta(z^k) \\ &< 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

这里最后一个不等式成立是因为 $f_\theta(z^k) \geq \mu_k^2 > 0$ 和 $\gamma \in (0,1)$. 现在我们证明步骤 3 是可行的. 采用反证法, 假设对所有的非负整数 l, 都有 $\|H_\theta(z^k + \delta^l \Delta z^k)\| > C_k - \lambda_1 \|\delta^l \Delta z^k\|^2 - \lambda_2 \|\delta^l H_\theta(z^k)\|^2$. 因为 $C_k \geq \|H_\theta(z^k)\|$, 故可知

$$\frac{\|H_\theta(z^k + \delta^l \Delta z^k)\| - \|H_\theta(z^k)\|}{\delta^l} > -\lambda_1 \delta^l \|\Delta z^k\|^2 - \lambda_2 \delta^l \|H_\theta(z^k)\|^2. \tag{3.7}$$

在不等式 (3.7) 两端同时乘以 $\|H_\theta(z^k + \delta^l \Delta z^k)\| + \|H_\theta(z^k)\|$ 可得

$$\frac{f_\theta(z^k + \delta^l \Delta z^k) - f_\theta(z^k)}{\delta^l} > [-\lambda_1 \delta^l \|\Delta z^k\|^2 - \lambda_2 \delta^l \|H_\theta(z^k)\|^2][\|H_\theta(z^k + \delta^l \Delta z^k)\| + \|H_\theta(z^k)\|]. \tag{3.8}$$

因为 $f_\theta(z)$ 在 z^k 点连续可微, 故在 (3.8) 两边令 $l \to \infty$, 则可得 $f'(z^k)\Delta z^k \geq 0$, 这与 (3.6) 矛盾, 故至少存在一个非负整数 l 使得 (3.3) 成立, 即步骤 3 是可行的. 因此, 我们可以在步骤 4 得到新的迭代点 $z^{k+1} = z^k + \alpha_k \Delta z^k$.

下面我们证明 $z^{k+1} \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 并且 $\|H_\theta(z^{k+1})\| \leq C_{k+1}$. 事实上, 由 (3.2) 的第一个方程, 我们有 $\Delta \mu_k = -\mu_k + \beta_k$, 再结合 $\alpha_k \in (0,1]$ 和 $\beta_k > 0$ 可得

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \alpha_k \Delta \mu_k = (1-\alpha_k)\mu_k + \alpha_k \beta_k > 0. \tag{3.9}$$

这表明 $z^{k+1} = (\mu_{k+1}, x^{k+1}, s^{k+1}, y^{k+1}) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. 此外, 由步骤 3 和步骤 4, 我们有 $\|H_\theta(z^{k+1})\| \leq C_k$, 结合 (3.4) 可得

$$C_{k+1} \geq \frac{\eta_k Q_k \|H_\theta(z^{k+1})\| + \|H_\theta(z^{k+1})\|}{Q_{k+1}} = \|H_\theta(z^{k+1})\|.$$

因此, 我们可以得出结论: 如果 $z^k \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 并且 $\|H_\theta(z^k)\| \leq C_k$ 对于某个 k 成立, 那么 z^{k+1} 可以由算法3.1生成, 其满足 $z^{k+1} \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 并且 $\|H_\theta(z^{k+1})\| \leq C_{k+1}$. 因为 $z^0 \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 并且 $\|H_\theta(z^0)\| = C_0$, 所以由数学归纳法可知定理成立. 证毕.

4 全局收敛

本节给出算法 3.1 的全局收敛性. 为此, 我们需要以下引理.

引理 4.1 设 $\{z^k = (\mu_k, x^k, s^k, y^k)\}$ 是由算法 3.1 生成的迭代点列, 则对所有的 $k \geq 0$ 有 (i) $z^k \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$; (ii) $\|H_\theta(z^k)\| \leq C_k$; (iii)$\mu_k \geq \beta_k$.

证 由定理 3.1 的证明过程可知 (i) 和 (ii) 成立. 由步骤 0 可知 $\mu_0 \geq \gamma \geq \beta_0$. 假设对某个 k 有 $\mu_k \geq \beta_k$, 则由 (3.9) 可知 $\mu_{k+1} \geq (1-\alpha_k)\beta_k + \alpha_k \beta_k = \beta_k \geq \beta_{k+1}$, 其中最后一个不等式成立是因为 $\{\beta_k\}$ 是单调递减的. 因此, 由数学归纳法可知 (iii) 成立.

引理 4.2 设 $\{z^k\}$ 是由算法 3.1 生成的迭代点列, 则存在常数 $C^* \geq 0$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \|H_\theta(z^k)\| = \lim_{k\to\infty} C_k = C^*.$$

证 定理的具体证明可参见文献 [7] 中的引理 7.

引理 4.3 设 $\{z^k\}$ 是由算法 3.1 生成的迭代点列, 则

$$\lim_{k\to\infty} \|\alpha_k \Delta z^k\| = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \|\alpha_k H_\theta(z^k)\| = 0.$$

证 对所有的 $k\ge 0$, 由步骤 3 可知

$$\lambda_1\|\alpha_k\Delta z^k\|^2+\lambda_2\|\alpha_k H_\theta(z^k)\|^2\le C_k-\|H_\theta(z^{k+1})\|,$$

进而由引理 4.2 可知结论成立.

由引理 4.3, 我们可以直接得到如下结论.

定理 4.1 设 $\{z^k\}$ 是由算法 3.1 生成的迭代点列. 如果存在常数 $c>0$ 使得对所有的 $k\ge 0$ 满足 $\alpha_k>c$, 则有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|H_\theta(z^k)\|=0$.

定理 4.2 设 $\{z^k=(\mu_k,x^k,s^k,y^k)\}$ 是由算法 3.1 生成的迭代点列, 则 $\{z^k\}$ 的任意聚点都是 $H_\theta(z)=0$ 的解.

证 设 $z^*:=(\mu^*,x^*,s^*,y^*)$ 为 $\{z^k=(\mu_k,x^k,s^k,y^k)\}$ 的任意聚点, 则存在一个收敛子列 $\{z^k\}_{k\in K}$ 使得 $\lim\limits_{k\in K,\ k\to\infty} z^k=z^*$, 其中 $K\subset\{0,1,...\}$. 因为 $\{\beta_k\}$ 单调递减, 故存在 $\beta^*\ge 0$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k=\beta^*$. 此外, 由引理 4.2 可知存在 $C^*\ge 0$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|H_\theta(z^k)\|=\lim_{k\to\infty}C_k=C^*. \tag{4.1}$$

由 H 的连续性可知

$$\lim_{k\in K,\ k\to\infty}\|H_\theta(z^k)\|=\|H_\theta(z^*)\|=C^*. \tag{4.2}$$

我们现在假设 $C^*>0$, 然后推出一个矛盾. 因为 $C^*>0$, 故由 (3.5) 和 (4.1) 可知 $\beta^*>0$, 进而由引理 4.1(iii) 可得

$$\mu^*=\lim_{k\in K,\ k\to\infty}\mu_k\ge\lim_{k\in K,\ k\to\infty}\beta_k=\beta^*>0.$$

这表明 $z^*\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, 从而可知 $H_\theta(z)$ 在 z^* 点可微并且 $H'_\theta(z^*)$ 是非奇异的. 因此, 存在一个常数 $M>0$ 使得 $\|H'_\theta(z^k)^{-1}\|\le M$ 对所有充分大的 $k\in K$ 都成立. 由 (3.2) 可知对所有充分大的 $k\in K$,

$$\|\Delta z^k\|\le\|H'_\theta(z^k)^{-1}\|(\|H_\theta(z^k)\|+\beta_k)\le M(\|H_\theta(z^k)\|+\gamma).$$

由 (4.1) 可知 $\{\|H_\theta(z^k)\|\}$ 有界. 因此, $\{\|\Delta z^k\|\}_{k\in K}$ 有界, 从而可知 $\{\|\Delta z^k\|\}_{k\in K}$ 有一个收敛子列. 我们不妨假设 $\lim\limits_{k\in K_1,\ k\to\infty}\Delta z^k=\Delta z^*$, 其中 $K_1\subset K$. 在等式 (3.2) 的两端我们令 $k(\in K_1)\to\infty$, 则有

$$H_\theta(z^*)+H'_\theta(z^*)\Delta z^*=\beta^* h. \tag{4.3}$$

由引理 4.3 可知 $\lim\limits_{k\in K_1,k\to\infty}\|\alpha_k H_\theta(z^k)\|=0$. 因为 $\lim\limits_{k\in K,\ k\to\infty}\|H_\theta(z^k)\|=C^*>0$, 故有 $\lim\limits_{k\in K,\ k\to\infty}\alpha_k=0$. 由步骤 3 和引理 4.1(ii), 对所有的 $k\in K_1$, 我们有

$$\begin{aligned}\|H_\theta(z^k+\delta^{-1}\alpha_k\Delta z^k)\| &> C_k-\lambda_1\|\delta^{-1}\alpha_k\Delta z^k\|^2-\lambda_2\|\delta^{-1}\alpha_k H_\theta(z^k)\|^2\\ &\ge \|H_\theta(z^k)\|-\lambda_1\|\delta^{-1}\alpha_k\Delta z^k\|^2-\lambda_2\|\delta^{-1}\alpha_k H_\theta(z^k)\|^2.\end{aligned}$$

因此

$$\frac{\|H_\theta(z^k+\delta^{-1}\alpha_k\Delta z^k)\|-\|H_\theta(z^k)\|}{\delta^{-1}\alpha_k}>-\lambda_1\delta^{-1}\alpha_k\|\Delta z^k\|^2-\lambda_2\delta^{-1}\alpha_k\|H_\theta(z^k)\|^2,$$

即

$$\frac{\|H_\theta(z^k+\delta^{-1}\alpha_k\Delta z^k)\|^2-\|H_\theta(z^k)\|^2}{\delta^{-1}\alpha_k}>$$

$$[-\lambda_1\delta^{-1}\alpha_k\|\Delta z^k\|^2-\lambda_2\delta^{-1}\alpha_k\|H_\theta(z^k)\|^2][\|H_\theta(z^k+\delta^{-1}\alpha_k\Delta z^k)\|+\|H_\theta(z^k)\|]. \tag{4.4}$$

因为 $\|H_\theta(z)\|^2$ 在 $z^*\in\mathbb{R}_{++}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ 点处连续可微, 故在不等式 (4.4) 两端令 $k(\in K_1)\to\infty$, 我们有

$$H_\theta(z^*)^TH'_\theta(z^*)\Delta z^*\geq 0. \tag{4.5}$$

另一方面, 因为 $\mu^*\leq\|H_\theta(z^*)\|=C^*$, 故由 (4.3) 和 $\beta^*\leq\gamma\min\{1,(C^*)^2\}\leq\gamma C^*$ 可得

$$H_\theta(z^*)^TH'_\theta(z^*)\Delta z^*=-\|H_\theta(z^*)\|^2+\mu^*\beta^*\leq-(1-\gamma)(C^*)^2. \tag{4.6}$$

由 (4.5) 和 (4.6) 可知 $(1-\gamma)(C^*)^2\leq 0$. 因为 $\gamma\in(0,1)$, 我们有 $C^*=0$, 这与假设 $C^*>0$ 矛盾. 因此, 我们有 $C^*=0$, 进而由 (4.2) 可知 $H_\theta(z^*)=0$, 即定理成立. 证毕.

由定理 4.2 的证明过程, 我们可以直接得到如下结论.

定理 4.3 如果算法 3.1 生成的迭代点列 $\{z^k\}$ 有一个聚点, 那么 $\lim\limits_{k\to\infty}\|H_\theta(z^k)\|=0$.

定理 4.4 如果算法 3.1 生成的迭代点列 $\{z^k\}$ 有一个孤立的聚点 z^*, 那么 $\lim\limits_{k\to\infty}z^k=z^*$.

证 由引理 4.3 可知 $\lim\limits_{k\to\infty}\|z^{k+1}-z^k\|=\lim\limits_{k\to\infty}\|\alpha_k\Delta z^k\|=0$. 因此, 由文献 [16] 中的推论 8.3.10 可知定理成立. 证毕.

定理 4.5 如果水平集 $L(C):=\{z\in\mathbb{R}^{1+2n+m}|\|H_\theta(z)\|\leq C\}$ 对任意的 $C>0$ 都有界, 那么算法 3.1 生成的迭代点列 $\{z^k\}$ 至少有一个聚点.

证 对所有的 $k\geq 0$, 由步骤 3 和步骤 4 可得 $\|H_\theta(z^{k+1})\|\leq C_k$, 进而由 (3.4) 可知,

$$C_{k+1}=\frac{\eta_kQ_kC_k+\|H_\theta(z^{k+1})\|}{Q_{k+1}}\leq\frac{\eta_kQ_kC_k+C_k}{Q_{k+1}}=C_k.$$

因此, 由引理 4.1(ii) 可得 $\|H_\theta(z^k)\|\leq C_k\leq C_0=\|H_\theta(z^0)\|$. 这表明 $\{z^k\}\subset L(\|H_\theta(z^0)\|)$, 故 $\{z^k\}$ 有界, 从而至少有一个聚点. 证毕.

5 局部二次收敛

本节给出算法 3.1 的局部二次收敛性质. 利用函数 $H_\theta(z)$ 的强半光滑性质, 类似于文献 [17] 中定理 8 的证明, 我们可以得到如下结论.

引理 5.1 设 z^* 是由算法 3.1 生成的迭代点列 $\{z^k\}$ 的任意聚点. 如果所有的 $V\in\partial H_\theta(z^*)$ 是非奇异的, 那么对所有充分接近于 z^* 的 z^k, 有

$$\|z^k+\Delta z^k-z^*\|=O(\|z^k-z^*\|^2), \tag{5.1}$$

$$\|H_\theta(z^k+\Delta z^k)\|=O(\|H_\theta(z^k)\|^2). \tag{5.2}$$

定理 5.1 设 z^* 是由算法 3.1 生成的迭代点列 $\{z^k\}$ 的任意聚点. 如果所有的 $V\in\partial H_\theta(z^*)$ 是非奇异的, 则 $\{z^k\}$ 收敛到 z^* 并且

$$\|z^{k+1}-z^*\|=O(\|z^k-z^*\|^2),\ \ \|H_\theta(z^{k+1})\|=O(\|H_\theta(z^k)\|^2).$$

证 因为所有的 $V \in \partial H_\theta(z^*)$ 是非奇异的, 故由文献 [13] 中的推论 3.1 可知对所有充分接近于 z^* 的 z^k, 有

$$\|H'_\theta(z^k)^{-1}\| = O(1). \tag{5.3}$$

由 (3.5) 可知对所有充分接近于 z^* 的 z^k, 有

$$\beta_k \le \gamma \min\{1, \|H_\theta(z^k)\|^2\} \le \gamma \|H_\theta(z^k)\|. \tag{5.4}$$

由 (3.2),(5.3) 和 (5.4) 可知对所有充分接近于 z^* 的 z^k, 有

$$\|\Delta z^k\| \le \|H'_\theta(z^k)^{-1}\|(\|H_\theta(z^k)\| + \beta_k) = O(\|H_\theta(z^k)\|),$$

进而可知

$$\|\Delta z^k\|^2 = O(\|H_\theta(z^k)\|^2). \tag{5.5}$$

因此, 由 (5.2) 和 (5.5) 可知

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|H_\theta(z^k + \Delta z^k)\| + \lambda_1\|\Delta z^k\|^2 + \lambda_2\|H_\theta(z^k)\|^2}{\|H_\theta(z^k)\|} = 0.$$

因此, 对所有充分接近于 z^* 的 z^k, 有

$$\|H_\theta(z^k + \Delta z^k)\| + \lambda_1\|\Delta z^k\|^2 + \lambda_2\|H_\theta(z^k)\|^2 \le \|H_\theta(z^k)\| \le C_k.$$

这说明对所有充分接近于 z^* 的 z^k, 有 $\alpha_k = 1$, 即 $z^{k+1} = z^k + \Delta z^k$. 再结合 (5.1) 和 (5.2) 可知定理成立. 证毕.

6 数值实验

本节我们对算法 3.1 进行数值实验. 参数取值为 $\mu_0 = 10^{-2}$, $\delta = 0.5$, $\sigma = 0.2$, $\gamma = 10^{-3}$, $\lambda_1 = 10^{-3}$, $\lambda_2 = 10^{-3}$, $\eta_k = 0.85$. Potra 教授在文献 [1] 中证明了二次规划和加权中心问题 (Quadratic Programming and Weighted Centering Problem) 的最优性条件为如下单调加权线性互补问题:

$$x \ge 0,\ s \ge 0,\ Px + Qs + Ry = a,\ xs = w, \tag{6.1}$$

其中矩阵 P, Q, R 和向量 a 定义如下:

$$P = \begin{pmatrix} A \\ M \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} 0 \\ -A^T \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} b \\ -f \end{pmatrix},$$

这里 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是一个 $m < n$ 的满秩矩阵, I 为 $n \times n$ 单位矩阵, $b, f \in \mathbb{R}^n$. 我们应用算法 3.1 去求解这个问题. 在实验中, 我们产生一个行满秩的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 选择 $M = BB^T/\|BB^T\|$, 其中 $B = \mathbf{rand}(n, n)$, 然后令 $\hat{x} = \mathbf{rand}(n, 1)$, $f = \mathbf{rand}(n, 1)$, 再定义 $b := A\hat{x}$, $\hat{s} := M\hat{x} + f$ 和 $w := \hat{x}\hat{s}$.

首先, 我们生成一个 $n = 1000, m = 500$ 的测试问题, 然后应用算法 3.1 去求解此问题. 我们使用 $x^0 = s^0 = (1, 0, ..., 0)^T, y^0 = (0, ..., 0)^T$ 作为初始点进行测试. 表 1 给出了迭代过程中 $\|H_\theta(z^k)\|$ 的值. 从表 1 可以看出, 算法 3.1 的收敛速度至少是超线性.

表 1 迭代过程中 $\|H_\theta(z^k)\|$ 的值

	$\theta=0$	$\theta=1$
$k=0$	413.5964	414.7754
$k=1$	11.0324	9.3554
$k=2$	2.0005	0.9534
$k=3$	0.3300	0.0404
$k=4$	0.0347	1.5550e-04
$k=5$	5.1684e-04	3.1996e-09
$k=6$	1.4162e-07	2.9375e-13
$k=7$	2.9031e-13	0

接下来, 对于每个测试问题, 我们生成 10 个算例, 然后应用算法 3.1 去求解这些算例. 对于每个问题, 我们仍然使用 $x^0=s^0=(1,0,...,0)^T, y^0=(0,...,0)^T$ 作为初始点进行测试. 在实验中, 我们采用 $\|H_\theta(z^k)\|\le 10^{-12}$ 作为终止准则. 数值实验的结果列于表 2, 其中**AIT**和**ACPU**分别表示算法 3.1 求解问题所需的迭代次数和 CPU 时间的平均值, **AHK**表示算法终止时 $\|H_\theta(z^k)\|$ 的平均值. 从表 2 可以看出, 算法 3.1 对于求解加权线性互补问题是非常有效的, 它只需很少的迭代次数和 CPU 时间就可以找到满足终止条件的解.

表 2 算法 3.1 求解问题 (6.1) 的数值结果

θ	n	m	AIT	ACPU	AHK
-0.5	200	100	7.9	0.08	1.2517e-13
	400	200	8.1	0.27	1.0750e-13
	600	300	7.9	0.61	1.7565e-13
	800	400	8.3	1.18	2.2604e-13
	1000	500	8.1	1.81	3.1109e-13
	1200	600	8.2	2.83	3.9982e-13
0	200	100	7.0	0.08	5.4396e-14
	400	200	6.9	0.24	1.6167e-13
	600	300	7.0	0.50	2.1404e-13
	800	400	7.0	0.93	2.4662e-13
	1000	500	7.0	1.55	3.5946e-13
	1200	600	7.0	2.40	4.2982e-13
0.5	200	100	6.2	0.06	1.3450e-13
	400	200	6.2	0.17	9.2518e-14
	600	300	6.2	0.42	2.2094e-13
	800	400	6.3	0.85	2.4762e-13
	1000	500	6.4	1.42	3.1518e-13
	1200	600	6.7	2.28	4.1619e-13
1	200	100	6.0	0.04	5.1346e-14
	400	200	6.0	0.15	8.1014e-14
	600	300	6.0	0.40	1.4226e-13
	800	400	6.0	0.82	2.1993e-13
	1000	500	6.0	1.41	3.1419e-13
	1200	600	6.0	2.20	4.0268e-13

最后, 我们将算法 3.1 与文献 [18] 中的非单调光滑牛顿法进行比较. 需要说明的是, 文献 [18] 中的非单调光滑牛顿法也是基于 Zhang-Hager[15] 非单调线搜索技术设计的, 该算法在步骤 3 采用如下形式的线搜索准则：

令 $\alpha_k := \delta^{l_k}$, 其中 l_k 是满足下式的最小非负整数 l,

$$\|H_\theta(z^k + \delta^l \Delta z^k)\| \leq [1 - 2\sigma(1 - \tau\beta)\delta^l]C_k, \tag{6.2}$$

这里 $\sigma \in (0, 1/2)$, $0 < \tau\beta < 1$. 然后令 C_{k+1} 按照 (3.4) 迭代更新. 注意到, 除了文献 [18], 文献 [19,20] 也研究了基于 (6.2) 这种线性搜索准则的非单调光滑牛顿法.

表 3 算法 3.1 和算法 [18] 求解问题 (6.1) 的数值结果

			算法 3.1		算法 [18]	
θ	n	m	AIT	ACPU	AIT	ACPU
-0.5	500	250	6.3	0.29	7.0	0.56
	1000	500	6.9	1.64	7.0	3.13
	1500	750	7.0	4.40	7.1	9.74
	2000	1000	7.0	9.02	7.3	21.64
	1500	1000	7.0	5.26	7.8	12.61
	2000	1500	7.2	12.18	8.0	30.61
0	500	250	6.0	0.26	6.0	0.46
	1000	500	6.0	1.56	6.0	3.05
	1500	750	6.0	3.85	6.0	8.36
	2000	1000	6.3	8.23	6.0	18.05
	1500	1000	6.6	4.91	6.0	10.35
	2000	1500	7.0	11.82	6.5	24.90
0.5	500	250	5.9	0.29	6.0	0.49
	1000	500	6.0	1.45	6.0	2.88
	1500	750	6.0	3.97	6.0	8.39
	2000	1000	6.0	8.04	6.0	18.25
	1500	1000	6.6	4.49	6.6	11.13
	2000	1500	7.0	11.73	7.0	27.11
1	500	250	5.1	0.24	6.0	0.47
	1000	500	5.1	1.27	6.0	2.78
	1500	750	5.0	3.31	6.0	7.90
	2000	1000	5.9	7.63	6.0	17.89
	1500	1000	6.0	4.58	6.0	9.73
	2000	1500	6.4	10.67	6.5	24.99

在实验中, 对于每个测试问题, 我们仍然生成 10 个算例, 然后分别应用算法 3.1 和文献 [18] 中的非单调光滑牛顿法去求解这些算例. 对于每个问题, 我们选取初始点 $x^0 = \mathbf{rand}(n,1), s^0 = \mathbf{rand}(n,1), y^0 = \mathbf{rand}(m,1)$. 我们采用 $\|H_\theta(z^k)\| \leq 10^{-6}$ 作为终止准则. 数值实验结果列于表 3, 其中**算法 3.1** 和**算法** [18] 分别表示本文给出的算法 3.1 和文献 [18] 中的非单调光滑牛顿法. 由表 3 可以看出, 当求解相同规模的测试问题时, 我们的算法比文献

[18] 中的非单调光滑牛顿法需要更少的迭代次数和 CPU 时间. 这表明, 相比于文献 [18-20] 所采用的非单调线搜索技术 (6.2), 本文所给出的非单调无导数线搜索技术 (3.3) 更有效. 此外, 由表 1, 表 2 和表 3 中的数据, 我们发现随着参数 θ 的增大, 算法求解相同规模的问题所需的迭代次数和 CPU 时间都减少. 当参数 $\theta = 1$ 时, 算法的计算效果最好. 这是一个新的发现, 值得进一步研究.

参 考 文 献

[1] Potra F A. Weighted complementarity problems-a new paradigm for computing equilibria[J]. SIAM Journal on Optimization, 2012, 22(4): 1634–1654.

[2] Potra F A. Equilibria and weighted complementarity problems[M]. In: Al-Baali M., Grandinetti L., Purnama A.(eds)Numerical Analysis and Optimization. NAO 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, vol 235. Cham: Springer.

[3] Potra F A. Sufficient weighted complementarity problems[J]. Computational Optimization and Applications, 2016, 64(1): 467–488.

[4] Dong L, Tang J Y, Song X Y. A non-monotone inexact non-interior continuation method based on a parametric smoothing function for LWCP[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2018, 95(4): 739–751.

[5] Asadi S, Darvay Z, Lesaja G. A full-Newton step interior-point method for monotone weighted linear complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2020, 186(3): 864–878.

[6] Tang J Y, Zhou J C. A modified damped Gauss-Newton method for non-monotone weighted linear complementarity problems[J]. Optimization Methods and Software, 2022, 37(3): 1145–1164

[7] Tang J Y, Zhou J C. Quadratic convergence analysis of a nonmonotone Levenberg-Marquardt type method for the weighted nonlinear complementarity problem[J]. Computational Optimization and Applications, 2021, 80(1): 213–244.

[8] He X R, Tang J Y. A smooth Levenberg-Marquardt method without nonsingularity condition for wLCP[J]. AIMS Mathematics, 2022, 7(5): 8914–8932.

[9] Zhang J. A smoothing Newton algorithm for weighted linear complementarity problem[J]. Optimization Letters, 2016, 10(3): 499–509.

[10] Tang J Y. A variant nonmonotone smoothing algorithm with improved numerical results for large-scale LWCPs[J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(3): 3927–3936.

[11] Liu Z Y, Tang J Y. A new smoothing-type algorithm for nonlinear weighted complementarity problem[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2020, 64(12): 215-226.

[12] Tang J Y, Zhang H C. A nonmonotone smoothing Newton algorithm for weighted complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2021, 189(3): 679–715.

[13] Qi L, Sun J. A nonsmooth version of Newton's method[J]. Mathematical Programming, 1993, 58(1–3): 353–367.

[14] Jiang H. Smoothed Fischer-Burmeister equation methods for the complementarity problem[R]. Parille, Victoria, Australia: Department of Mathematics, The University of Melbourne, 1997.

[15] Zhang H C, Hager W W. A nonmonotone line search technique and its application to unconstrained optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2004, 14(4): 1043–1056.

[16] Facchinei F, Pang J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems(I & II)[M]. New York: Springer, 2003.

[17] Qi L, Sun D, Zhou G. A new look at smoothing Newton methods for nonlinear complementarity problems and box constrained variational inequality problems[J]. Mathematical Programming, 2000, 87(1): 1–35.

[18] Chen J S, Ko C H, Liu Y D, etal. New smoothing functions for solving a system of equalities and inequalities[J]. Pacific Journal of Optimization, 2016, 12(1): 185–206.

[19] Ni T, Wang P. A smoothing-type algorithm for solving nonlinear complementarity problems with a non-monotone line search[J]. Applied Mathematics and Computation, 2010, 216(7): 2207–2214.

[20] Zhu J G, Liu H W, Liu C H. A family of new smoothing functions and a nonmonotone smoothing Newton method for the nonlinear complementarity problems[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2011, 37(1–2): 647–662.

A NEW NON-MONOTONE SMOOTHING NEWTON METHOD FOR SOLVING WEIGHTED LINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEMS

HE Xiao-rui, TANG Jing-yong

(*College of Mathematics and Statistics, Xinyang Normal University, Henan 464000, China*)

Abstract: In this paper, we investigate the smoothing Newton method for solving the weighted linear complementarity problem. By using a class of smoothing functions, we reformulate the weighted linear complementary problem as a system of smooth equations and then propose a new smoothing Newton method to solve it. Under suitable conditions, we prove that the algorithm has global and local quadratic convergence. Different from current smoothing Newton-type methods, our method uses a non-monotone derivative-free line search technique to generate the step size, which makes it have better convergence properties and practical calculation effects.

Keywords: weighted linear complementary problem; smoothing newton method; global convergence; quadratic convergence

2010 MR Subject Classification: 90C30; 65K05