Vol. 43 (2023)
No. 3

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

三维稳态 Navier-Stokes-Poission 方程的 Liouville 型定理

李洲煜 [1], 崔美英 [2,3]

(1. 西安理工大学理学院, 陕西 西安 710054)

(2. 榆林学院数学与统计学院, 陕西 榆林 719000)

(3. 西北大学数学学院, 陕西 西安 710127)

摘 要: 本文研究了三维稳态 Navier-Stokes-Poission 方程的 Liouville 型定理. 利用能量方法, 证明了如果光滑解 $(\rho, \mathbf{u}, \Phi)$ 满足一些合适的条件, 则 $\mathbf{u} = 0$. 本文的结果推广了 Chae 的结果 (Nonlinearity, 2012, 25(5): 1345–1349) 到 Lorentz 空间.

关键词: Navier-Stokes-Poission 方程; Liouville 型定理; Lorentz 空间

MR(2010) **主题分类号**: 35Q35; 76N10 **中图分类号**: O175.29

文献标识码: A **文章编号**: 0255-7797(2023)03-0247-06

1 引言

考虑如下三维稳态带有 Poission 项的 Navier-Stokes 方程:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nu \Delta \mathbf{u} - (\lambda + \nu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla P = \kappa \rho \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi = \rho - \rho_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\rho, \mathbf{u}$ 和 Φ 分别表示密度、速度以及牛顿重力势能. P 表示压力, 由于 γ 法则可以得到 $P(\rho) = a\rho^\gamma (a > 0, \gamma > 1)$. 粘性系数 λ 和 ν 满足物理的要求 $\nu > 0$ 且 $3\lambda + 2\nu > 0$. κ 是一个物理常数, 它的符号表示力的性质. 如果 $\kappa > 0$ 表示斥力, 则 $\kappa < 0$ 表示引力.

在研究偏微分方程的正则性时, 我们很自然地会考虑方程的 Liouville 型定理. 直至目前, 对于稳态情形下流体力学方程的 Liouville 型定理仍未解决. 注意到在方程 (1.1) 中, 若 $\kappa = 0$ (且没有 (1.1) 的第三个方程), 则方程 (1.1) 得到稳态可压缩 Navier-Stokes 方程. 关于该方程 Liouville 型定理的研究, 已经有大量结果. 在文献 [1] 中, D.Chae 研究了 N 维空间中稳态可压缩 Navier-Stokes 方程的 Liouville 型定理, 特别地, 在三维空间中得到了若

$$\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \infty,$$

则 $\mathbf{u} = 0$ 且 $\rho =$ 常数. 随后, 在文献 [2] 中, 作者提高了 [1] 的结果, 在如下假设条件下

$$\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \infty.$$

*收稿日期: 2021-12-07 接收日期: 2023-02-06

基金项目: 国家自然科学基金资助 (12201491), 陕西省教育厅科研计划项目资助 (22JK0475), 榆林市科技局产学研项目资助 (CXY-2022-76), 榆林学院博士科研启动基金项目资助 (21GK07).

作者简介: 李洲煜 (1992–), 男, 陕西西安, 讲师, 主要研究方向: 偏微分方程. E-mail:zylimath@163.com.

最近, 本文第一作者在文献 [3] 中, 研究了 Lorentz 空间中的 Liouville 型定理. 对于稳态 Navier-Stokes-Poission 方程的 Liouville 型定理, 结果较少. D.Chae 在文献 [1] 中证明了在三维空间中若假设

$$\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)} < \infty$$

条件下的 Liouville 型定理, 进一步又得到了 N 维空间中的结果. 关于其他流体力学方程的 Liouville 型定理, 感兴趣的读者可参考文献 [4–8].

本文考虑稳态情形下 Navier-Stokes-Poission 方程的 Liouville 型定理, 得到了在 Lorentz 空间中的结果.

主要结果如下

定理 1.1 假设 $\rho, \mathbf{u}, \Phi$ 是方程 (1.1) 在 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑解. 如果 $\rho \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ 且 $\mathbf{u} \in L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3) \cap L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)$, 则

$$D(\mathbf{u}) := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx \leq C_0 M(\mathbf{u}), \tag{1.2}$$

其中 $M(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u}\|^3_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}$. 如果额外假设

$$M(\mathbf{u}) \leq \delta D(\mathbf{u}), \tag{1.3}$$

其中 $0 < \delta < \frac{1}{C_0}$, 则在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbf{u} = 0$. 进一步, (Φ, ρ) 是如下方程的解

$$\begin{cases} \rho \nabla \Phi = \frac{a}{\kappa} \nabla \rho^\gamma, \\ \Delta \Phi = \rho - \rho_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

本文组织如下: 第一部分引入 Lorentz 空间的定义以及本文证明中所需要的不等式, 第二部分给出主要结论的证明.

2 预备知识

Lorentz 空间是比 Lesbegue 空间更一般的空间. 我们首先回顾 Lorentz 空间的定义, 详细可参考文献 [9].

定义 2.1 对于任意的 $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. 如果 $\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^3)} < +\infty$, 我们就称可测函数 $f \in L^{p,q}(\mathbb{R}^3)$, 其中

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^3)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty t^{q-1} |\{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > t\}|^{\frac{q}{p}} \, dt \right)^{\frac{1}{q}}, & q < +\infty, \\ \sup\limits_{t>0} t |\{x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > t\}|^{\frac{1}{p}}, & q = +\infty. \end{cases}$$

注 $\|\cdot\|_{L^{p,q}}$ 是拟范数, 即不满足三角不等式. 代替地, 满足

$$\|f + g\|_{L^{p,q}} \leq C(p,q)(\|f\|_{L^{p,q}} + \|g\|_{L^{p,q}}),$$

其中 $C(p,q) = 2^{1/p} \max(1, 2^{(1-q)/q})$. 下面回顾 Lorentz 空间中的 Hölder 不等式.

引理 2.2 (见文献 [10]) 假设 $1 \le p_1, p_2 \le \infty$, $1 \le q_1, q_2 \le \infty$, 且 $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^3)$, $g \in L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^3)$, 则存在常数 $C > 0$, 使得如下不等式成立:

$$\|fg\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^3)} \le C\|f\|_{L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^3)}\|g\|_{L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^3)},$$

其中 $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ 且 $\frac{1}{q} \le \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$.

3 定理 1.1 的证明

证 我们首先引入一个径向截断函数 $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, 满足

$$\sigma(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ [0,1], & 1 \le |x| \le 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

对于任意给定的 $R > 0$, 定义 $\sigma_R(x) := \sigma(\frac{|x|}{R})$, $x \in \mathbb{R}^3$ 且满足 $\|\nabla^k \sigma_R\|_{L^\infty} \leqslant CR^{-k}, k = 0, 1, 2,$ 其中常数 $C > 0$ 且与 R 无关.

以 $\mathbf{u}\sigma_R^2$ 为测试函数作用在 (1.1) 的第二个方程两边, 得到

$$\begin{aligned} &\nu \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 \sigma_R^2 \, dx + (\lambda + \nu) \int_{\mathbb{R}^3} |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2 \sigma_R^2 \, dx \\ =& -2\nu \int_{\mathbb{R}^3} \sigma_R \nabla \mathbf{u} : (\mathbf{u} \otimes \nabla \sigma_R) \, dx - 2(\lambda + \nu) \int_{\mathbb{R}^3} \sigma_R \operatorname{div} \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \nabla \sigma_R) \, dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^3} (\rho \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \sigma_R^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^3} \kappa \rho \nabla \Phi \cdot \mathbf{u} \sigma_R^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla P \cdot \mathbf{u} \sigma_R^2 \, dx \\ =& \sum_{i=1}^{5} I_i. \end{aligned} \tag{2.1}$$

下面逐项估计 I_1, $I_2 ... I_5$. 对于 I_1, 计算得

$$\begin{aligned} I_1 &= \nu \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \nabla(\sigma_R^2)) \, dx \\ &= \nu \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla(\sigma_R^2) + \mathbf{u} \Delta(\sigma_R^2)) \, dx \\ &= \frac{\nu}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 \Delta(\sigma_R^2) \, dx \\ &= \nu \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}|^2 (\sigma_R \Delta \sigma_R + |\nabla \sigma_R|^2) \, dx. \end{aligned}$$

由引理 2.2 可推出

$$\begin{aligned} |I_1| &\le \nu \int_{R \le |x| \le 2R} |\mathbf{u}|^2 (|\sigma_R \Delta \sigma_R| + |\nabla \sigma_R|^2) \, dx \\ &\le C(\nu) R^{-2} \||\mathbf{u}|^2\|_{L^{\frac{9}{4},\infty}(R \le |x| \le 2R)} \|1\|_{L^{\frac{9}{5},1}(R \le |x| \le 2R)} \\ &\le C(\nu) R^{-\frac{1}{3}} \|\mathbf{u}\|^2_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

对于 I_2, 利用 Young 不等式以及嵌入关系 $L^2(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^{2,\infty}(\mathbb{R}^3)$, 可得

$$\begin{aligned}
|I_2| &\le C(\lambda+\nu)\int_{R\le|x|\le 2R}|\sigma_R\operatorname{div}\mathbf{u}||\mathbf{u}||\nabla\sigma_R|\,dx\\
&\le C(\lambda+\nu)R^{-1}\|\sigma_R\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{7},1}(R\le|x|\le 2R)}\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2},\infty}(R\le|x|\le 2R)}\\
&\le C(\lambda+\nu)R^{-1}\|\sigma_R\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^{2,\infty}(R\le|x|\le 2R)}\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2},\infty}(R\le|x|\le 2R)}\|1\|_{L^{\frac{18}{5},1}(R\le|x|\le 2R)}\\
&\le C(\lambda+\nu)R^{-\frac{1}{6}}\|\sigma_R\operatorname{div}\mathbf{u}\|_{L^{2}(R\le|x|\le 2R)}\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2},\infty}(R\le|x|\le 2R)}\\
&\le \frac{(\lambda+\nu)}{2}\|\sigma_R\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}+CR^{-\frac{1}{3}}\|\mathbf{u}\|^2_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

对于 I_3, 利用方程 $\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=0$ 以及分部积分可得

$$\begin{aligned}
I_3 &= -\int_{\mathbb{R}^3}(\rho\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\sigma_R^2)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^2\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\sigma_R^2)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^2(\sigma_R^2\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})+2\sigma_R\nabla\sigma_R\cdot\rho\mathbf{u})\,dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^3}|\mathbf{u}|^2\sigma_R\nabla\varphi_R\cdot\rho\mathbf{u}\,dx,
\end{aligned}$$

则

$$|I_3|\le CR^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\||\mathbf{u}|^3\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(R\le|x|\le 2R)}\|1\|_{L^{3,1}(R\le|x|\le 2R)}\le C\|\mathbf{u}\|^3_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}.\tag{2.4}$$

计算 I_4 得

$$\begin{aligned}
I_4 &= -\kappa\int_{\mathbb{R}^3}\Phi\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\sigma_R^2)\,dx\\
&= -\kappa\int_{\mathbb{R}^3}\Phi\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\sigma_R^2\,dx-\kappa\int_{\mathbb{R}^3}\Phi\rho\mathbf{u}\cdot\nabla(\sigma_R^2)\,dx\\
&= -\kappa\int_{\mathbb{R}^3}2\sigma_R\Phi\rho\mathbf{u}\cdot\nabla\sigma_R\,dx,
\end{aligned}$$

则利用引理 2.2 得

$$\begin{aligned}
|I_4| &\le C\int_{R\le|x|\le 2R}\rho|\Phi||\mathbf{u}||\nabla\sigma_R|\,dx\\
&\le CR^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(R\le|x|\le 2R)}\|1\|_{L^{3,1}(R\le|x|\le 2R)}\\
&\le C\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

注意到

$$\nabla P=\nabla(a\rho^\gamma)=\frac{a\gamma}{\gamma-1}\rho\nabla(\rho^{\gamma-1}).$$

对于 I_5, 可得

$$
\begin{aligned}
I_5 &= -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{a\gamma}{\gamma-1}\rho\nabla(\rho^{\gamma-1})\cdot\mathbf{u}\sigma_R^2\,dx\\
&= \frac{a\gamma}{\gamma-1}\int_{\mathbb{R}^3}\rho^{\gamma-1}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\sigma_R^2)\,dx\\
&= \frac{2a\gamma}{\gamma-1}\int_{\mathbb{R}^3}\rho^{\gamma}\mathbf{u}\cdot(\sigma_R\nabla\sigma_R)\,dx.
\end{aligned}
$$

进一步, 有

$$
\begin{aligned}
|I_5| &\le C\int_{R\le|x|\le 2R}\rho^{\gamma}|\mathbf{u}||\nabla\sigma_R|\,dx\\
&\le CR^{-1}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}^{\gamma}\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(R\le|x|\le 2R)}\|1\|_{L^{3,1}(R\le|x|\le 2R)}\\
&\le C\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

将 (2.2)-(2.6) 式代入 (2.1) 式中, 可得

$$
\begin{aligned}
&\nu\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\mathbf{u}|^2\sigma_R^2\,dx + \frac{(\lambda+\nu)}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2\sigma_R^2\,dx\\
&\le C\left(R^{-\frac{1}{3}}\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}^3 + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}\right),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

其中常数 C 与 R 无关.

下面关于 (2.7) 式取 $R\to\infty$, 借助 Levi 渐升定理得

$$
\nu\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx + \frac{(\lambda+\nu)}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2\,dx \le C\left(\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}^3 + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}\right),
$$

又因为 $3\lambda+2\nu\ge 0, \nu>0$, 我们得到

$$
D(\mathbf{u}) := \int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\mathbf{u}|^2\,dx \le C_0\left(\|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{9}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}^3 + \|\mathbf{u}\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)}\right).
$$

因此 (1.2) 式得证. 再结合假设 (1.3), 可得

$$
D(\mathbf{u}) \le C_0 M(\mathbf{u}) \le C_0\delta D(\mathbf{u}).
$$

因为 $0 < C_0\delta < 1$, 我们得到在 $\mathbb{R}^3$ 中 $\mathbf{u}=0$. 再结合 (1.1) 的第二个方程可证明 (1.4) 成立.

参 考 文 献

[1] Chae D. Remarks on the Liouville type results for the compressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^N$[J]. Nonlinearity, 2012, 25(5): 1345–1349.

[2] Li D, Yu X. On some Liouville type theorems for the compressible Navier-Stokes equations[J], Discrete Contin Dyn Syst., 2014, 34(11): 4719–4733.

[3] Li Z, Niu P. Notes on Liouville type theorems for the stationary compressible Navier-Stokes equations[J]. Appl. Math. Lett., 2021, 114: 106908.

[4] Li Z, Niu P. Liouville type Theorems for the 3-D stationary Hall-MHD equations[J]. Z. Angew. Math. Mech., 2020, 100(5): e201900200.

[5] Kozono H, Terasawa Y, Wakasugi. Y. A remark on Liouville-type theorems for the stationary Navier-Stokes equations in three space dimensions[J]. J. Funct. Anal., 2017, 272(2): 804–818.

[6] Seregin G. Liouville type theorem for stationary Navier-Stokes equations[J]. Nonlinearity, 2016, 29(8): 2191–2195.

[7] Chae D, Wolf J. On Liouville type theorems for the steady Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$[J]. J. Differential Equations, 2016, 261(10): 5541–5560.

[8] Gong H, Liu X, Zhang X. Liouville theorem for the steady-state solutions of Q-tensor system of liquid crystal[J]. Appl. Math. Lett., 2018, 76: 175–180.

[9] Lorentz G. Some new functional spaces[J]. Ann. Math., 1950, 51(1): 37–55.

[10] O'Neil R. Convolution operators and $L^{p,q}$ spaces[J]. Duke Math., 1963, 30(1): 129–142.

A LIOUVILLE TYPE THEOREM FOR THE 3D STATIONARY NAVIER-STOKES-POISSION EQUATIONS

LI Zhou-yu[1], CUI Mei-ying[2,3]

(*1. School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China*)

(*2. School of Mathematics and Statistics, Yulin University, Yulin 719000, China*)

(*3. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China*)

Abstract: In this paper, we study Liouville type theorem for the 3D stationary Navier-Stokes-Poission equations. Based on energy method, we prove that if a smooth solution $(\rho, \mathbf{u}, \Phi)$ satisfies some suitable conditions, then $\mathbf{u} = 0$. Our result extends and generalizes the corresponding result of Chae (Nonlinearity, 2012, 25(5): 1345–1349) to the Lorentz space.

Keywords: Navier-Stokes-Poission equations; Liouville type theorem; Lorentz space

2010 MR Subject Classification: 35Q35; 76N10