

## 单位圆内有界解析函数的导函数的新 Bohr 型定理

罗 茜<sup>1</sup>, 刘名生<sup>2</sup>

(1. 嘉应学院数学学院, 广东 梅州, 514015)

(2. 华南师范大学数学科学学院, 广东 广州, 510631)

**摘要:** 本文主要研究了单位圆内解析自映射及其导函数的 Bohr 不等式, 利用新的系数不等式, 建立了导函数的三类新 Bohr 型不等式, 并得到了新 Bohr 型不等式成立的精确半径, 该结果比 Bappaditya Bhowmik 和 Nilanjan Das (*arXiv:1911.06597v1[math.CV]*, 2019.11) 的结果更精细.

**关键词:** 解析函数; 导函数; Bohr 不等式; Bohr 半径

MR(2010) 主题分类号: 30C99; 30C62

中图分类号: O174.5

文献标识码: A

文章编号: 0255-7797(2023)02-0168-11

### 1 引言

记单位圆盘  $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $\mathcal{B} = \{f(z) \text{ 在 } \mathbb{U} \text{ 内解析: } |f(z)| < 1\}$ .

1914 年, Bohr 在研究形如  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n^{-s}$  的 Dirichlet 级数的绝对收敛的问题时发现早期的 Bohr 不等式 [1]: 设  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  是单位圆盘  $\mathbb{U}$  内的解析函数, 对任意的  $z \in \mathbb{U}$ ,  $|f(z)| < 1$ , 则对任意的  $|z| \leq \frac{1}{6}$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq 1.$$

后来, Wiener, Riesz 和 Schur 独立地证明了不等式成立的条件是  $|z| \leq \frac{1}{3}$ , 且常数  $\frac{1}{3}$  不能再改进.  $\frac{1}{3}$  也称为 Bohr 半径. 进一步, 如果  $a_0 = 0$ , 则精确的 Bohr 半径是  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (见 [2, 3]). 近年来这个问题已经成为研究的热点, 许多学者把这个问题延伸到了多复变量和高维上面, 得到了许多有趣的结果.

另一方面, 许多专家学者研究了不等式的变形, 扩展和改进 (见 [2, 4–12] 等). 一些学者给出了满足各类条件的解析函数的 Bohr 不等式, 如, Muhanma [13] 给出了从属于单叶函数类的 Bohr 不等式, Muhanma, Ali, Zhen Chuan Ng 和 Hasni [14] 研究了单位圆内的解析函数  $f$  满足  $f + \alpha z f' + \gamma z^2 f''$  从属于凸函数或星象函数时的 Bohr 不等式, Kayumov 和 Ponnusamy [9, 15] 研究了奇解析函数和缺项幂级数的 Bohr 不等式, Ali, Barnard 和 Solynin [4] 研究了奇和偶的解析函数的 Bohr 不等式, 同时也给出了单位圆盘映到  $W_\alpha = \{w : |\arg w| < \frac{\pi\alpha}{2}, 1 \leq \alpha \leq 2\}$  的解析函数的 Bohr 半径, 等等. 还有许多学者把函数类扩展到调和映照, 得到了满足各类条件的调和映照的 Bohr 型不等式 (见 [15–19] 等等). 另外, 还有一些学者研究了 Bohr 不等式的改进, 得到了更精细的形式 (如 [12, 20] 等等).

\*收稿日期: 2022-01-23

接收日期: 2022-02-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61976104); 广东省自然科学基金 (2021A1515010058).

作者简介: 罗茜 (1981–), 女, 广东梅州, 讲师, 研究方向: 复分析及其应用.

通讯作者: 刘名生 (1965–), 男, 江西大余, 教授, 研究方向: 几何函数论; 值分布论等.

类似 Bohr 半径, 可以定义另一种半径叫 Rogosinski 半径: 若  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  在单位圆盘  $\mathbb{U}$  上解析, 且  $|f(z)| < 1$ , 则对任意的正整数  $N \geq 1$ , 当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $|S_N(z)| < 1$ , 且这个半径是精确的, 其中  $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$ . 同时, 我们称  $f$  的 Bohr-Rogosinski 和  $R_N^f(z)$  为

$$R_N^f(z) := |f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| r^k, \quad |z| = r.$$

2017 年, Kayumov 和 Ponnusamy [9] 得到解析函数的 Bohr-Rogosinski 半径. 2018 年, 刘名生, 尚银苗和徐俊峰 [21] 建立了单位圆内有界解析函数多个新的 Bohr-Rogosinski 型不等式, 他们将经典的 Bohr 不等式的泰勒系数的各次项系数部分替换或全替换成了  $f(z)$  的相应阶数的高阶导数的式子. 下列两个定理, 一个将  $|a_0|$  和  $|a_1|$  分别换成  $|f(z)|$  和  $|f'(z)|$ , 一个将所有  $k \geq N$  的系数  $|a_k|$  换成  $|\frac{f^{(k)}(z)}{k!}|$ .

**定理 1** ([21, 定理 2.1]) 设  $f(z) \in \mathcal{B}$ , 且  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ , 则当  $r \leq \frac{\sqrt{17}-3}{4}$  时,

$$|f(z)| + |f'(z)||z| + \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| r^k \leq 1,$$

半径  $r = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$  是精确的.

**定理 2** ([21, 定理 2.2]) 设正整数  $N \geq 2$ ,  $f(z) \in \mathcal{B}$ , 且  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ , 则当  $r \leq R_N$  时,

$$|f(z)| + \sum_{k=N}^{\infty} \left| \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \right| |z|^k \leq 1,$$

其中  $R_N$  是方程  $(1+r)(1-2r)(1-r)^{N-1} - 2r^N = 0$  的最小正根, 半径  $R_N$  是精确的.

2020 年, Ponnusamy, Vijayakumar 和 Wirths 对  $\mathcal{B}$  族函数类建立了新的系数不等式, 这个不等式比经典的 Bohr 不等式更精细.

**定理 3** ([12, 定理 1]) 设  $f \in \mathcal{B}$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $f_0(z) = f(z) - a_0$ , 且  $\|f_0\|_r$  表示为

$$\|f_0\|_r = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n + \left( \frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r} \right) \|f_0\|_r \leq 1, \quad 0 < r \leq \frac{1}{2+|a_0|} \quad (1.1)$$

且  $\frac{1}{2+|a_0|}$  和  $\frac{1}{1+|a_0|}$  不能再改进. 进一步,

$$|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \left( \frac{1}{1+|a_0|} + \frac{r}{1-r} \right) \|f_0\|_r \leq 1, \quad 0 < r \leq \frac{1}{2} \quad (1.2)$$

且  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{1+|a_0|}$  不能再改进.

2019 年, Bappaditya Bhowmik 和 Nilanjan Das [7] 研究了  $\mathbb{U}$  上的解析自映射  $f$  的导函数, 得到了导函数  $f'$  的 Bohr 不等式.

**定理 4** ([7, 定理 1]) 设  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  是单位圆  $\mathbb{U}$  内的解析自映射, 则  $\mathcal{M}_{f'} \leq 1$ ,  $|z| = r \leq r_0 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ , 其中  $\mathcal{M}_{f'} = \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n||z|^{n-1}$ . 半径  $r_0$  是精确的.

解析函数的 Bohr 不等式有更精细的形式, 如定理 3, 解析自映射  $f$  的导函数  $f'$  的 Bohr 不等式是否也有更精细的形式? 我们对解析自映射  $f$  的导函数  $f'$  做了进一步的研究, 得到了三个新的 Bohr 型不等式, 其成立的半径也是精确的, 即定理 5, 6, 7.

## 2 预备知识

为了得到主要结果, 我们需要如下一些引理.

**引理 1** ([22]) 设  $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  在单位圆盘  $\mathbb{U}$  内解析, 且  $|\psi(z)| < 1$ . 则有

$$|a_n| \leq 1 - |a_0|^2, n = 1, 2, \dots$$

**引理 2** (Schwarz-Pick 引理) 设  $\phi(z) \in \mathcal{B}$ , 则

(i) 对任意的  $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ ,  $|\phi(z_1) - \phi(z_2)|/|1 - \overline{\phi(z_1)}\phi(z_2)| \leq |z_1 - z_2|/|1 - \overline{z_1}z_2|$ , 等号成立当且仅当  $\phi$  是 Möbius 变换;

(ii) 对任意的  $z \in \mathbb{U}$ ,  $|\phi'(z)| \leq \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$ , 等号成立当且仅当  $\phi$  是 Möbius 变换.

一般地, 关于  $k$  阶导数有

**引理 3** ([23]) 设  $\psi(z)$  是单位圆盘  $\mathbb{U}$  内解析的函数且  $|\psi(z)| < 1$ . 则任取  $k = 1, 2, \dots$ , 有

$$|\psi^{(k)}(z)| \leq \frac{k!(1-|\psi(z)|^2)}{(1-|z|^2)^k} (1+|z|)^{k-1}, |z| < 1.$$

**引理 4** ([12, 引理 B]) 设  $\phi(z) \in \mathcal{B}$ , 且有展开式  $\phi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ , 则

$$(i) \quad |b_{2n+1}| \leq 1 - |b_0|^2 - \dots - |b_n|^2, n = 0, 1, \dots;$$

$$(ii) \quad |b_{2n}| \leq 1 - |b_0|^2 - \dots - |b_{n-1}|^2 - \frac{|b_n|^2}{1+|b_0|}, n = 1, 2, \dots$$

**引理 5** 设  $0 < r < \sqrt{2} - 1$ ,  $g(t) = t + \frac{r}{1-r^2}(1-t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ , 则  $g(t)$  在  $[0, 1]$  上单调递增.

**证** 由于  $g'(t) = 1 - \frac{r}{1-r^2}2t$ , 且当  $0 < r < \sqrt{2} - 1$  时,  $\frac{2r}{1-r^2} < 1$ . 所以  $g'(t) \geq 0$ . 从而  $g(t)$  在  $[0, 1]$  上单调递增.

## 3 主要结果

应用引理 4, 我们首先给出下面解析函数导函数的新 Bohr 型不等式, 这个结果比定理 4 更精细.

**定理 5** 设  $f(z) \in \mathcal{B}$ ,  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ , 则

$$(I) \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \leq 1,$$

其中  $r \leq r_2 = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$ . 进一步,

$$(II) |a_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \leq 1,$$

其中  $r \leq r_3 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$ , 半径  $r_2$  和  $r_3$  均是精确的.

**证** 记  $f(z) = z\phi(z) = z(a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1} + \cdots)$ , 则  $|\phi(z)| < 1$ . 由引理 4, 可得

$$(i) \quad |a_{2n+1}| \leq 1 - |a_1|^2 - \cdots - |a_n|^2 - \frac{|a_{n+1}|^2}{1+|a_1|}, n = 1, 2, \cdots;$$

$$(ii) \quad |a_{2n}| \leq 1 - |a_1|^2 - \cdots - |a_n|^2, n = 1, 2, \cdots.$$

所以,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} &= |a_1| + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{2n+1}|r^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n|a_{2n}|r^{2n-1} \\ &\leq |a_1| + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(1 - |a_1|^2 - \cdots - |a_n|^2 - \frac{|a_{n+1}|^2}{1+|a_1|})r^{2n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} 2n(1 - |a_1|^2 - \cdots - |a_n|^2)r^{2n-1} \\ &= |a_1| + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_1|^2)(n+1)r^n - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \frac{|a_{n+1}|^2}{1+|a_1|} r^{2n} \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} [(2n+1) \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1}|^2 r^{2n} + 2n \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1}|^2 r^{2n-1}] \\ &= |a_1| + (1 - |a_1|^2) \frac{2r - r^2}{(1-r)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{n+1}|^2}{1+|a_1|} (2n+1)r^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 \sum_{k=2n+2}^{\infty} kr^{k-1} \\ &= |a_1| + (1 - |a_1|^2) \frac{2r - r^2}{(1-r)^2} - \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} \\ &\quad - \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r]. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} \\ &\quad + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \\ &\leq |a_1| + (1 - |a_1|^2) \frac{2r - r^2}{(1-r)^2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

注意到  $|a_1| < 1$ , 和  $r \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2+|a_1|}}$ , 故

$$|a_1| + (1 - |a_1|^2) \frac{2r - r^2}{(1 - r)^2} \leq 1.$$

记  $h(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2+x}}$ , ( $x \in [0, 1]$ ), 则  $h(x)$  在  $[0, 1]$  上是单调递减的, 所以有最小值  $h(1) = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} = r_2$ . 即当  $r \leq r_2$  时, (3.1) 的最后一个式子小于或等于 1.

接着, 证明  $r_2$  的精确性, 任取  $a \in [0, 1)$ , 考虑函数

$$\psi_a(z) = z \frac{a - z}{1 - az} = az - (1 - a^2) \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} z^{n+1}, z \in \mathbb{U}, a \in [0, 1).$$

记  $a_1 = a, a_n = (1 - a^2)a^{n-2}, n = 2, 3, \dots$ , 则有下列 3 个表示:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} &= a + (1 - a^2) \sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}(n+1)r^n = a + (1 - a^2) \frac{2r - ar^2}{(1 - ar)^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - a^2)^2 a^{2(n-1)} (2n+1)r^{2n} = (1 - a^2)^2 \frac{r^2(3 - a^2r^2)}{(1 - a^2r^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] &= \sum_{n=1}^{+\infty} (1 - a^2)^2 a^{2(n-1)} r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \\ &= (1 - a^2)^2 r^3 \frac{4 - 3r - 2a^2r^2 + a^2r^3}{(1 - a^2r^2)^2}. \end{aligned}$$

应用上述式子得,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1 + |a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} \\ &+ \frac{r}{(1 - r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \\ &= a + (1 - a^2) \frac{2r - ar^2}{(1 - ar)^2} + (1 - a)^2 (1 + a) \frac{r^2(3 - a^2r^2)}{(1 - a^2r^2)^2} \\ &+ \frac{(1 - a)^2 (1 + a)^2 r^4 (4 - 3r - 2a^2r^2 + a^2r^3)}{(1 - a^2r^2)^2 (1 - r)^2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

上述不等式最后的式子不大于 1 当且仅当

$$\begin{aligned} &(1 + a) \frac{2r - ar^2}{(1 - ar)^2} + (1 - a)(1 + a) \frac{r^2(3 - a^2r^2)}{(1 - a^2r^2)^2} \\ &+ \frac{(1 - a)(1 + a)^2 r^4 (4 - 3r - 2a^2r^2 + a^2r^3)}{(1 - a^2r^2)^2 (1 - r)^2} \leq 1. \end{aligned}$$

记

$$A_1(a, r) = (1+a) \frac{2r - ar^2}{(1-ar)^2},$$

$$A_2(a, r) = (1-a)(1+a) \frac{r^2(3-a^2r^2)}{(1-a^2r^2)} + \frac{(1-a)(1+a)^2r^4(4-3r-2a^2r^2+a^2r^3)}{(1-a^2r^2)^2(1-r)^2}.$$

容易看出, 当  $a \in (0, 1), r \in (0, 1)$  时,  $A_2(a, r) > 0$ . 而  $A_1(a, r) \leq 1$  当且仅当  $-(2a^2 + a)r^2 + (2 + 4a)r - 1 \leq 0$ . 这个不等式成立只要

$$r \leq k(a) = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+2a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+2a}(\sqrt{1+2a} + \sqrt{1+a})}.$$

容易看出,  $k(a)$  在  $(0, 1)$  上是单调递减的. 令  $a \rightarrow 1$ , 则  $k(a) \rightarrow k(1) = r_2$ . 由于  $k(a)$  单调递减, 则对任意的  $r' \in (r_2, 1)$ , 存在  $a' \in (0, 1)$ , 使得  $r' = k(a')$ . 于是  $A_1(a', r') = 1$ .

又由于  $A_2(a', r') > 0$ , 所以  $A_1(a', r') + A_2(a', r') > 1$ . 因此, 要使 (3.2)  $\leq 1$  成立,  $r$  不能取大于  $r_2$ . 即  $r_2$  是精确的.

为了证明 (II), 可以把 (I) 中  $f'$  的强级数中的  $|a_1|$  换成  $|a_1|^2$ , 由 (3.1) 式, 可得

$$\begin{aligned} & |a_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2r^{2n} \\ & + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2r^{2n+1}[(2n+2) - (2n+1)r] \\ & \leq |a_1|^2 + (1-|a_1|^2) \frac{2r-r^2}{(1-r)^2}. \end{aligned}$$

显然, 当  $r \leq r_3 = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$  时, 上式小于等于 1.

接着, 为了证明  $r_3$  的精确性, 取  $a \in [0, 1)$ , 考虑函数

$$\psi_a(z) = z \frac{a-z}{1-az} = az - (1-a^2) \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}z^{n+1}, z \in \mathbb{U}, a \in [0, 1).$$

类似 (I) 中  $r_2$  精确性的证明, 有

$$\begin{aligned} & |a_1|^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2r^{2n} \\ & + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1}|^2r^{2n+1}[(2n+2) - (2n+1)r] \\ = & a^2 + (1-a^2) \frac{2r-ar^2}{(1-ar)^2} + (1-a)^2(1+a) \frac{r^2(3-a^2r^2)}{(1-a^2r^2)} \\ & + \frac{(1-a)^2(1+a)^2r^4(4-3r-2a^2r^2+a^2r^3)}{(1-a^2r^2)^2(1-r)^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

易得 (3.3) 小于等于 1 当且仅当

$$\frac{2r - ar^2}{(1 - ar)^2} + (1 - a) \frac{r^2(3 - a^2r^2)}{(1 - a^2r^2)} + \frac{(1 - a)(1 + a)r^4(4 - 3r - 2a^2r^2 + a^2r^3)}{(1 - a^2r^2)^2(1 - r)^2} \leq 1.$$

记

$$B_1(a, r) = \frac{2r - ar^2}{(1 - ar)^2},$$

$$B_2(a, r) = (1 - a) \frac{r^2(3 - a^2r^2)}{(1 - a^2r^2)} + \frac{(1 - a)(1 + a)r^4(4 - 3r - 2a^2r^2 + a^2r^3)}{(1 - a^2r^2)^2(1 - r)^2}.$$

容易算得当  $a \in (0, 1), r \in (0, 1)$  时,  $B_2(a, r) > 0$ . 并且  $B_1(a, r) \leq 1$  当且仅当  $-(a^2 + a)r^2 + (2 + 2a)r - 1 \leq 0$ . 而上式成立当且仅当

$$r \leq l(a) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+a}(\sqrt{1+a}+1)}.$$

容易看出,  $l(a)$  在  $(0, 1)$  上单调递减. 令  $a \rightarrow 1$ , 可得  $l(a) \rightarrow r_3$ .

由  $l(a)$  是连续且单调递减的, 则对任意的  $r' \in (r_3, 1)$ , 存在  $a' \in (0, 1)$ , 使得  $r' = l(a')$ . 从而  $B_1(a', r') = 1$ . 又  $B_2(a', r') > 0$ , 所以  $B_1(a', r') + B_2(a', r') > 1$ , 因此, 要使 (3.3)  $\leq 1$ ,  $r$  不能取大于  $r_3$ . 即  $r_3$  是精确的.

**定理 6** 设  $f(z) \in \mathcal{B}$ ,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

则当  $r \leq r_4$  时,

$$|f'(z)| + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \leq 1.$$

其中  $r_4$  是下面方程在  $[0, 1]$  上的根:

$$-r^4 + 2r^2 + 8r - 1 = 0,$$

且  $r_4$  是精确的.

**证** 由定理条件, 记  $f(z) = zg(z)$ , 则在  $\mathbb{U}$  内,  $|g(z)| < 1$ ,  $g(0) = a_1$ . 根据 Schwarz-Pick 引理, 对于  $z \in \mathbb{U}$ ,

$$\frac{|g(z) - a_1|}{|1 - \bar{a}_1 g(z)|} \leq |z|, |g'(z)| \leq \frac{1 - |g(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

记  $z = re^{i\theta}$ , 由引理 1, 可得

$$|g(z)| \leq \frac{r + |a_1|}{1 + r|a_1|}, |a_k| \leq 1 - |a_1|^2 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

再根据引理 5, 对任意的  $r \in [0, \sqrt{2} - 1]$ , 有

$$\begin{aligned} |f'(z)| + \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k||z|^{k-1} &= |g(z) + zg'(z)| + \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k||z|^{k-1} \\ &\leq |g(z)| + |zg'(z)| + \sum_{k=2}^{\infty} k|a_k||z|^{k-1} \\ &\leq |g(z)| + \frac{r}{1-r^2}(1-|g(z)|^2) + (1-|a_1|^2) \sum_{k=2}^{\infty} kr^{k-1} \\ &\leq \frac{r+|a_1|}{1+|a_1|r} + \frac{r}{1-r^2} \left[ 1 - \left( \frac{r+|a_1|}{1+r|a_1|} \right)^2 \right] + (1-|a_1|^2) \frac{2r-r^2}{(1-r)^2} \\ &= \frac{|a_1|+2r+|a_1|r^2}{(1+|a_1|r)^2} + (1-|a_1|^2) \frac{2r-r^2}{(1-r)^2}. \end{aligned}$$

注意到  $|a_1| < 1$ , 我们知道上式小于等于 1 等价于  $h(r) \leq 0$ , 其中

$$\begin{aligned} h(r) &= (-1+2r+|a_1|r^2)(1-r)^2 + (1+|a_1|)(2r-r^2)(1+|a_1|r)^2 \\ &\leq (r^2+2r-1)(1-r)^2 + 2(2r-r^2)(1+r)^2 \\ &= -r^4+2r^2+8r-1. \end{aligned}$$

记  $l(r) = -r^4 + 2r^2 + 8r - 1$ , 则当  $r \in [0, 1]$  时,  $l'(r) = -4r^3 + 4r + 8 > 0$ , 即  $l(r)$  在  $[0, 1]$  上单调递增. 又  $l(0) = -1 < 0$ ,  $l(1) = 8 > 0$ , 故在  $(0, 1)$  内, 方程  $l(r) = 0$  存在唯一的根  $r_4 \approx 0.1213 < \sqrt{2} - 1$ . 因此, 当  $r \leq r_4$ ,  $h(r) \leq l(r) \leq 0$ .

下面证明  $r_4$  的精确性, 取  $a \in (0, 1)$  考虑

$$f(z) = z \frac{a-z}{1-az} = az - (1-a^2) \sum_{k=2}^{+\infty} a^{k-2} z^{k-1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

则有

$$\begin{aligned} |f'(-r)| + \sum_{k=2}^{\infty} ka_k r^{k-1} &= \frac{a+r}{1+ar} + \frac{1-a^2}{(1+ar)^2} r + \sum_{k=2}^{\infty} k(1-a^2)a^{k-2} r^{k-1} \\ &= \frac{a+2r+ar^2}{(1+ar)^2} + (1-a^2) \frac{2r-ar^2}{(1-ar)^2}. \end{aligned}$$

上式大于 1 当且仅当

$$(-1+2r+ar^2)(1-ar)^2 + (1+a)(2r-ar^2)(1+ar)^2 = -1 + (4a+4)r + 2a^2r^2 - a^4r^4 > 0.$$

令  $P(a, r) = -1 + (4a+4)r + 2a^2r^2 - a^4r^4$ . 则对任意的  $r \in [0, 1)$ ,  $a \in (0, 1)$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial a} = 4r + 4ar^2 - 4a^3r^4 = 4r[1 + ar(1 - a^2r^2)] \geq 0.$$

因此,

$$P(a, r) \leq P(1, r) = -r^4 + 2r^2 + 8r - 1.$$

可见  $P(1, r) = l(r)$ , 从而当  $r > r_4$ ,  $P(1, r_4) > 0$ . 由  $P(a, r)$  的连续性, 对所有的  $a \in (0, 1)$ ,  $P(a, r) \leq 0$  当且仅当  $r \leq r_4$ .

进一步, 我们应用定理 5 的方法可以得到如下定理.

**定理 7** 设  $f(z) \in \mathcal{B}$ , 且  $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ , 则当  $r \leq r_4$  时,

$$\begin{aligned} |f'(z)| + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} \\ + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \leq 1, \end{aligned}$$

其中  $r_4$  已在定理 6 给出.

**证** 为了证明这个定理, 我们只需将定理 6 中的式 (3.1) 的  $|a_1|$  换为  $|f'(z)|$ , 这时就有

$$\begin{aligned} |f'(z)| + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} \\ + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \\ \leq \frac{|a_1| + 2r + |a_1|r^2}{(1+|a_1|r)^2} + (1-|a_1|)^2 \frac{2r-r^2}{(1-r)^2}, \end{aligned}$$

显然, 当  $r \leq r_4$  时, 上式小于等于 1.

下面证明  $r_4$  的精确性. 取  $a \in [0, 1)$ , 考虑函数

$$f(z) = z \frac{a-z}{1-az} = az - (1-a^2) \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} z^{n+1}, z \in D, a \in [0, 1).$$

类似  $r_1$  精确性的证明, 我们有

$$\begin{aligned} |f'(-r)| + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} + \frac{1}{1+|a_1|} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)|a_{n+1}|^2 r^{2n} \\ + \frac{r}{(1-r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1}|^2 r^{2n+1} [(2n+2) - (2n+1)r] \\ = \frac{a+2r+ar^2}{(1+ar)^2} + (1-a^2) \frac{2r-ar^2}{(1-ar)^2} + (1-a)^2(1+a) \frac{r^2(3-a^2r^2)}{(1-a^2r^2)} \\ + \frac{(1-a)^2(1+a)^2 r^4 (4-3r-2a^2r^2+a^2r^3)}{(1-a^2r^2)^2(1-r)^2}. \end{aligned}$$

上面最后一个式子小于等于 1 当且仅当

$$\begin{aligned} \frac{-1+2r+ar^2}{(1+ar)^2} + (1+a) \frac{2r-ar^2}{(1-ar)^2} + (1-a^2) \frac{r^2(3-a^2r^2)}{(1-a^2r^2)} \\ + \frac{(1-a^2)(1+a)r^4(4-3r-2a^2r^2+a^2r^3)}{(1-a^2r^2)^2(1-r)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

记

$$C_1(a, r) = \frac{-1 + 2r + ar^2}{(1 + ar)^2} + (1 + a) \frac{2r - ar^2}{(1 - ar)^2},$$

$$C_2(a, r) = (1 - a^2) \frac{r^2(3 - a^2r^2)}{(1 - a^2r^2)} + \frac{(1 - a^2)(1 + a)r^4(4 - 3r - 2a^2r^2 + a^2r^3)}{(1 - a^2r^2)^2(1 - r)^2}.$$

经基本的运算可得当  $a \in (0, 1), r \in (0, 1)$  时,  $C_2(a, r) > 0$ . 又  $C_1(a, r) \leq 0$  当且仅当

$$(-1 + 2r + ar^2)(1 - ar)^2 + (1 + a)(2r - ar^2)(1 + ar)^2 = -1 + (4a + 4)r + 2a^2r^2 - a^4r^4 \leq 0.$$

类似定理 6 的证明过程, 对任意  $a \in (0, 1)$ , 上式成立当且仅当  $r \leq r_4$ .  $r_4$  的精确性得证.

### 参 考 文 献

- [1] Bohr H. A theorem concerning power series[J]. Proc. Lond. Math. Soc., 1914, 2(13): 1–5.
- [2] Kayumov I R, Ponnusamy S. Bohr inequality for odd analytic functions[J]. Comput. Methods Funct. Theory, 2017, 17: 679–688.
- [3] Paulsen V I, Popascu G, Singh D. On Bohr’s inequality[J]. Proc. Lond. Math.Soc., 2002, 3(85): 493–512.
- [4] Ali R M, Roger W. Barnard, Alexander Yu Solynin. A note on Bohr’s phenomenon for power series[J]. J. Math. Anal. Appl.,2017, 44: 154–167.
- [5] Aizenberg L. Multidimensional analogues of Bohr’s theorem on power series[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2000,128: 1147–1155.
- [6] Aizenberg L. Generalization of results about the Bohr radius for power series[J]. Stud. Math., 2007, 180: 161–168.
- [7] Bhowmik B, Das N. A note on the Bohr inequality[EB]. arXiv:1911.06597v1[math.CV], 15 Nov 2019.
- [8] Boas H P, Khavinson D. Bohr’s power series theorem in several variables[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1997, 125: 2975–2979.
- [9] Kayumov I R, Ponnusamy S. Bohr–Rogosinski radius for analytic functions[EB]. arXiv preprint arXiv:1708.05585 (2017).
- [10] Paulsen V I, Singh D. Bohr’s inequality for uniform algebras[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2004, 132: 3577–3579.
- [11] Paulsen V I, Singh D. Extensions of Bohr’s inequality[J]. Bull. Lond. Math. Soc., 2006, 38(6): 991–999.
- [12] Ponnusamy S, Vijayakumar R, Wirths K. Refinement of the classical Bohr inequality[EB]. arXiv:1911.05315v2[math.CV] , 11 Jun 2020.
- [13] Abu-Muhanna Y. Bohr’s phenomenon in subordination and bounded harmonic classes[J]. Complex Var. Elliptic Equ., 2010, 15: 1–8.
- [14] Muhanna Y Abu, Ali R M, Ng Z C, Hasni S F M. Bohr radius for subordinating families of analytic functions and bounded harmonic mappings[J]. J. Math. Anal. Appl. , 2014,420 (1): 124–136.
- [15] Kayumov I R, Ponnusamy S. Bohr’s Inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions[J]. J. Math. Anal. Appl.,2018,465(2): 857–871.
- [16] Alkhaleefah S A, Kayumov I R, Ponnusamy S. On the Bohr inequality with a fixed zero coefficient[J]. Proc. Amer. Math. Soc., 2019, 147: 5263–5274.

- [17] Kayumov I R, Ponnusamy S, Shakirov N. Bohr radius for locally univalent harmonic mappings[J]. *Math. Nachr.*, 2017, 291: 1757–1768.
- [18] Liu M S, Ponnusamy S, Wang J. Bohr’s phenomenon for the classes of quasi-subordination and  $K$ -quasiregular harmonic mappings[J]. *Rev. R. Acad.Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A. Mat. (RACSAM)*, 2020, 115: 1–15.
- [19] Liu Z H, Ponnusamy S. Bohr-type inequalities for subordination and  $K$ -quasiconformal harmonic mappings[J]. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2019, 42: 2151–2168.
- [20] Liu G, Liu Z, Ponnusamy S. Refined Bohr inequality for bounded analytic functions[EB]. arXiv:2006.08930v1[math.CV], 2020.
- [21] Liu M S, Shang Y M, Xu J F. Bohr-type inequalities of analytic functions[J]. *J. Inequal. Appl.*, 2018, 345: 1–13.
- [22] Graham I, Kohr G. Geometric function theory in one and higher dimensions[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 2003.
- [23] Dai S Y, Pan Y F. Note on Schwarz-Pick estimates for bounded and positive real part analytic functions[J]. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2008, 136(2): 635–640.
- [24] Ali R M, Abu-Muhanna Y, Ponnusamy S. On the Bohr inequality[J]. In “Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis” (Edited by N.K. Govil et al. ), Springer Optimization and Its Applications, 2016, 117: 265–295.
- [25] Aizenberg L. Generalization of Caratheodory’s inequality and the Bohr radius for multidimensional power series[J]. *Oper. Theory: Adv. Appl.*, 2005, 158: 87–94.
- [26] Kayumov I R, Ponnusamy S. On a powered Bohr Inequality[J]. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 2019, 44: 301–310.
- [27] Rogosinski W. Uber Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten[J]. *Math. Z.*, 1923, 17: 260–276.
- [28] Sidon S. Uber einen satz von Herrn Bohr[J]. *Math. Zeit* 1927, 26: 731–732.
- [29] Tomic M. Sur un theoreme de H. Bohr[J]. *Math. Scand.*, 1962, 11: 103–106.

## NEW BOHR-TYPE THEOREMS FOR THE DERIVATIVE FUNCTION OF ANALYTIC FUNCTION

LUO Xi<sup>1</sup>, LIU Ming-sheng<sup>2</sup>

(1. School of Mathematics, Jiaying University, Meizhou 514015, China)

(2. School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

**Abstract:** In the paper, we mainly investigate Bohr-type inequalities for the analytic self-mappings and their derivative functions. By utilizing new coefficients inequalities, we establish three new Bohr-type inequalities, and obtain corresponding sharp Bohr-radius, which refine the results of Bappaditya Bhowmik and Nilanjan Das (arXiv:1911.06597v1[math.CV], November 2019).

**Keywords:** analytic function; derivative; Bohr-type inequality; Bohr radius

**2010 MR Subject Classification:** 30C99; 30C62